О новых симметриях и законах сохранения для электромагнитного поля

А.Г. НИКИТИН, В.А. ВЛАДИМИРОВ, В.И. ФУЩИЧ

Хорошо известно, что классические законы сохранения энергии, импульса, углового момента и центра энергии электромагнитного поля являются следствием симметрии уравнений Максвелла относительно группы Пуанкаре. Однако симметрия уравнений Максвелла не исчерпывается релятивистской инвариантностью. В связи с этим возникает естественный вопрос, существуют ли другие законы сохранения для электромагнитного поля (помимо перечисленных выше?). Надеяться получить положительный ответ на этот вопрос можно только в том случае, если уравнения Максвелла обладают дополнительной симметрией помимо релятивистской и конформной инвариантности, поскольку симметрия относительно собственно конформных преобразований не приводит к новым законам сохранения [1]. Мы покажем ниже, что уравнения для электромагнитного поля действительно обладают некоторой скрытой симметрией, из которой следует существование новых (неклассических) интегралов движения.

1. Прежде всего изложим коротко известные свойства симметрии уравнений Максвелла

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\operatorname{rot}\vec{H},\qquad \frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=-\operatorname{rot}\vec{E},\\&\operatorname{div}\vec{E}=\operatorname{div}\vec{H}=0.\end{aligned}\tag{1}$$

В 1893 г. Хевисайд [2] обратил внимание на инвариантность уравнений (1) относительно замены

$$\vec{E}\to\vec{H},\qquad \vec{H}\to-\vec{E}.\tag{2}$$

Лармор [3] и Райнич [4] обобщили эту симметрию до группы однопараметрических преобразований вида

$$\begin{aligned}&\vec{E}\to\vec{E}\cos\varphi+\vec{H}\sin\varphi,\\&\vec{H}\to\vec{H}\cos\varphi-\vec{E}\sin\varphi.\end{aligned}\tag{3}$$

Лоренц и Пуанкаре установили инвариантность уравнений Максвелла относительно десятипараметрической группы Пуанкаре $P(1,3)$. Затем в 1909 г. Бейтмен [5] и Канингхем [6] доказали, что уравнения (1) инвариантны относительно конформных преобразований. Эти преобразования совместно с преобразованиями Лоренца образуют пятнадцатипараметрическую конформную группу $C(1,3)$. Сравнительно недавно было показано [7], что группа $G=C(1,3)\otimes H$, где H — однопараметрическая подгруппа преобразований Хевисайда–Лармора–Райнича (ХЛР) (3), является

Труды международного семинара “Теоретико-групповые методы в физике”, Звенигород, 24–26 ноября 1982 г., Москва, Наука, 1983, Т.2, С. 421–428.

максимальной группой симметрии уравнений (1) в классе точечных преобразований. Иными словами, группой G определяется максимальная симметрия уравнений (1) в смысле С. Ли.

2. В 1970 г. был предложен новый нелиевский подход к исследованию свойств симметрии дифференциальных уравнений [8, 9]. Основное отличие этого подхода от классических методов С. Ли состоит в том, что он позволяет находить не только локальные группы инвариантности, но также скрытую симметрию уравнений относительно интегральных преобразований. В рамках нелиевского подхода были найдены новые алгебры инвариантности многих важных уравнений релятивистской и нерелятивистской физики [10–15]. Применительно к уравнениям для электромагнитного поля удалось получить результаты, изложенные ниже в теоремах 1 и 2.

Запишем уравнения (1) в матричной форме

$$\begin{aligned} &L_1\Psi = 0, \qquad L_1 = i\frac{\partial}{\partial t} + \sigma_2\vec{S}\cdot\vec{p}, \\ &L_2\Psi = 0, \qquad L_2 = p_1 - \vec{S}\cdot\vec{p}S_1, \qquad \Psi = \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$S_a = \begin{pmatrix} \hat{S}_a & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{S}_a \end{pmatrix}, \sigma_2 = i\begin{pmatrix} \hat{0} & -I \\ I & \hat{0} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

I и $\hat{0}$ — единичные и нулевые матрицы размерности 3×3, $\hat{S}_a$ — спиновые матрицы, соответствующие спину $s = 1$, $(\hat{S}_a)_{bc} = i\varepsilon_{abc}$.

Обозначим через $\{Q_A\}$ множество базисных элементов конечномерной алгебры Ли. Эта алгебра по определению является алгеброй инвариантности (АИ) уравнений Максвелла, если Q_A определены на множестве решений уравнений (4), т.е. удовлетворяют условиям

$$L_1 Q_A\Psi = 0, \qquad L_2 Q_A\Psi = 0, \tag{6}$$

где Ψ — произвольное решение уравнений (4). Хорошо известным примером АИ уравнений (4) является 16-мерная алгебра Ли группы $C(1,3)\otimes H$. Оказывается, уравнения Максвелла обладают еще некоторой дополнительной симметрией, что может быть сформулировано в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Уравнения Максвелла (4) инвариантны относительно восьмимерной алгебры Ли A_8, базисные элементы которой задаются интегродифференциальными операторами следующего вида:*

$$\begin{aligned} &Q_1 = \sigma_3\vec{S}\cdot\vec{\tilde{p}}D, \qquad Q_2 = i\sigma_2, \qquad Q_3 = \sigma_1\vec{S}\cdot\vec{\tilde{p}}D, \\ &Q_{3+a} = -i\sigma_2\vec{S}\cdot\vec{\tilde{p}}Q_a, \qquad Q_7 = I, \qquad Q_8 = i\sigma_2\vec{S}\cdot\vec{\tilde{p}}, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} D = \Bigg\{ &\sum_{a\neq b\neq c} \left[\left(p_a^2p_b^2 + p_a^2p_c^2 - p_b^2p_c^2\right)\left(1 - S_a^2\right) + p_1p_2p_3S_aS_bp_c\right] - \\ &- pp_1p_2p_3\left[1 - (\vec{S}\cdot\vec{\tilde{p}})^2\right]\Bigg\}\varphi^{-1}, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[p_1^4 \left(p_2^2 - p_3^2\right)^2 + p_2^4 \left(p_1^2 - p_3^2\right)^2 + p_3^4 \left(p_1^2 - p_2^2\right)^2 \right]^{1/2},$$

σ_a — матрицы Паули, коммутирующие с S_b, $\hat{p}_a = p_a \cdot p^{-1}$, $p = \left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right)^{1/2}$. Операторы (7) удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} &[Q_a, Q_b] = -[Q_{3+a}, Q_{3+b}] = -\varepsilon_{abc} Q_c, \\ &[Q_{3+a}, Q_b] = \varepsilon_{abc} Q_{3+c}, \qquad [Q_7, Q_A] = [Q_8, Q_A] = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

которые определяют алгебру, изоморфную алгебре Ли группы $GL(2) \otimes GL(2)$.

Доказательство. В справедливости теоремы проще всего убедиться непосредственной проверкой. Для этого достаточно воспользоваться тождествами

$$\begin{aligned} &D\sigma_a = \sigma_a D, \qquad D\vec{S} \cdot \vec{p} = -\vec{S} \cdot \vec{p} D, \qquad D(\vec{S} \cdot \vec{p})^2 = D, \\ &D^2 \vec{S} \cdot \vec{\hat{p}} = \vec{S} \cdot \vec{\hat{p}}, \qquad L_2 \vec{S} \cdot \vec{p} = 0, \qquad [D, L_2] = \left(D + p p_1 p_2 p_3 \varphi^{-1}\right) L_2, \end{aligned} \tag{10}$$

из которых непосредственно вытекают соотношения (6), (7).

Очевидно, АИ уравнений Максвелла, описываемая теоремой 1, в принципе не может быть найдена в классическом подходе Ли, в котором базисные элементы алгебры инвариантности всегда принадлежат классу дифференциальных операторов первого порядка.

Поскольку Q_A (7) являются интегродифференциальными операторами, приведем конечные преобразования для фурье-компонент E_a и H_a. Из соотношения

$$\tilde{\Psi} \to \tilde{\Psi}' = \exp(\theta_A Q_A) \tilde{\Psi}, \qquad \tilde{\Psi} = (2\pi)^{-3/2} \int d^3x\, \Psi(\vec{x}, t) \exp(-i\vec{p} \cdot \vec{x}) \tag{11}$$

получаем

$$\begin{aligned} &E_a \to E_a' = E_a \cos\theta_1 + i\varepsilon_{abc} \hat{p}_b D_{cd} E_d \sin\theta_1, \\ &H_a \to H_a' = H_a \cos\theta_1 - i\varepsilon_{abc} \hat{p}_b D_{cd} H_d \sin\theta_1, \end{aligned} \tag{12а}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{E}_a \to \tilde{E}_a' = \tilde{E}_a \cos\theta_2 + \tilde{H}_a \sin\theta_2, \\ &\tilde{H}_a \to \tilde{H}_a' = \tilde{H}_a \cos\theta_2 - \tilde{E}_a \sin\theta_2, \end{aligned} \tag{12б}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{E}_a \to \tilde{E}_a' = \tilde{E}_a \cos\theta_3 - i\varepsilon_{abc} \hat{p}_b D_{cd} \tilde{H}_d \sin\theta_3, \\ &\tilde{H}_a \to \tilde{H}_a' = \tilde{H}_a \cos\theta_3 - i\varepsilon_{abc} \hat{p}_b D_{cd} \tilde{E}_d \sin\theta_3, \end{aligned} \tag{12в}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{E}_a \to \tilde{E}_a' = \tilde{E}_a \operatorname{ch}\theta_4 - D_{ab} \tilde{H}_b \operatorname{sh}\theta_4, \\ &\tilde{H}_a \to \tilde{H}_a' = \tilde{H}_a \operatorname{ch}\theta_4 - D_{ab} \tilde{E}_b \operatorname{sh}\theta_4, \end{aligned} \tag{12г}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{E}_a \to \tilde{E}_a' = \tilde{E}_a \operatorname{ch}\theta_5 + i\varepsilon_{abc} \hat{p}_b \tilde{E}_c \operatorname{sh}\theta_5, \\ &\tilde{H}_a \to \tilde{H}_a' = \tilde{H}_a \operatorname{ch}\theta_5 + i\varepsilon_{abc} \hat{p}_b \tilde{H}_c \operatorname{sh}\theta_5, \end{aligned} \tag{12д}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{E}_a \to \tilde{E}_a' = \tilde{E}_a \operatorname{ch}\theta_6 - D_{ab} \tilde{E}_b \operatorname{sh}\theta_6, \\ &\tilde{H}_a \to \tilde{H}_a' = \tilde{H}_a \operatorname{ch}\theta_6 + D_{ab} \tilde{H}_b \operatorname{sh}\theta_6, \end{aligned} \tag{12е}$$

$$\tilde{E}_a \to \tilde{E}_a' = \tilde{E}_a \exp\theta_7, \qquad \tilde{H}_a \to \tilde{H}_a' = \tilde{H}_a \exp\theta_7, \tag{12ж}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{E}_a \to \tilde{E}'_a = \tilde{E}_a \cos\theta_8 + i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\tilde{E}_c \sin\theta_8, \\ &\tilde{H}_a \to \tilde{H}'_a = \tilde{H}_a \cos\theta_8 - i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\tilde{H}_c \sin\theta_8, \end{aligned} \tag{12з}$$

где θ_A $(A = 1, 2, \ldots, 8)$ — вещественные параметры, $\tilde{E}_a$ и $\tilde{H}_a$ — фурье-образы векторов напряженности электрического и магнитного полей,

$$\begin{aligned} &D_{ab} = \left[\delta_{ab}\left(p_a^2 p_d^2 + p_a^2 p_e^2 - p_d^2 p_e^2\right) + p_1 p_2 p_3 p_c\right]\varphi^{-1}, \\ &a \neq d, \qquad d \neq e, \qquad e \neq a, \qquad c \neq a, b. \end{aligned} \tag{13}$$

Преобразования для $E_a(t, \vec{x})$ и $H_a(t, \vec{x})$ могут быть получены из (12) с помощью интеграла Фурье

$$\begin{aligned} &H'_a(t, \vec{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p\, \tilde{H}'_a \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x}), \\ &E'_a(t, \vec{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p\, \tilde{E}'_a \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x}). \end{aligned} \tag{14}$$

Преобразования (12), (14) образуют представление группы $GL(2) \otimes GL(2)$ и включают однопараметрическую подгруппу преобразований ХЛР (3).

3. Итак, помимо хорошо известной инвариантности относительно группы $C(1, 3) \otimes H$ уравнения Максвелла обладают дополнительной нелокальной симметрией относительно преобразований (12), (14). Еще более высокую дополнительную симметрию имеют уравнения для вектор-потенциала электромагнитного поля

$$\begin{aligned} &\Box A_\mu = 0, \\ &\partial_\mu A^\mu = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Теорема 2 [16]. *Уравнения (15) инвариантны относительно алгебры Ли группы $GL(3)$. Базисные элементы этой алгебры на множестве решений уравнений (15) имеют вид*

$$(F_{ab}A)^\mu = \frac{1}{p^2}\left(g_0^\mu p_0 p_a - g_a^\mu p_0^2\right) A_b, \qquad a, b = 1, 2, 3, \tag{16}$$

где g_μ^ν — матричный тензор, $g_{\nu\nu} = (1, -1, -1, -1)$, $\frac{1}{p^2}$ — интегральный оператор

$$\frac{1}{p^2} f(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3x'\, f(t, \vec{x}\,')}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|}. \tag{17}$$

Доказательство приведено в [16]. Можно убедиться непосредственной проверкой, что преобразованные функции (16) удовлетворяют уравнениям (15) и что операторы F_{ab} образуют алгебру, изоморфную алгебре Ли группы $GL(3)$

$$[F_{ab}, F_{cd}] = \delta_{bc}F_{ad} - \delta_{ad}F_{cb}. \tag{18}$$

Генераторы (16) принадлежат классу нелокальных (интегродифференциальных) операторов и в силу этого не могут быть найдены в классическом подходе Ли.

4. Какие же законы сохранения соответствуют симметрии, установленной в изложенных выше теоремах? К сожалению, эти законы невозможно получить используя теорему Нетер в общепринятой формулировке, поскольку скрытая симметрия уравнений Максвелла имеет нелокальный характер. Поэтому мы просто воспользуемся тем фактом, что каждому базисному элементу АИ уравнений Максвелла можно поставить в соответствие четырехвектор тока

$$J_A^0 = \Psi^\dagger M Q_A \Psi, \qquad J_A^a = -\Psi^\dagger M \sigma_2 S_a Q_A \Psi, \tag{19}$$

удовлетворяющий уравнению непрерывности

$$\partial_\mu J_A^\mu = 0. \tag{20}$$

Здесь Ψ — вектор-функция (4), σ_2, S_a — матрицы (5), M — произвольный оператор, удовлетворяющий условию

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} + \sigma_2 \vec{S}\cdot\vec{p}, M \right] \Psi = 0.$$

По теореме Остроградского–Гаусса из (19), (20) заключаем, что интегральные комбинации

$$B_A = \int d^3x\, J_A^0 = \int d^3x\, \Psi^\dagger M Q_A \Psi \tag{21}$$

сохраняются во времени. Таким путем можно получить как классические интегралы движения, так и новые законы сохранения, соответствующие нелиевской симметрии уравнений Максвелла. Оператор M может быть выбран исходя из требования, чтобы интегралы движения (21) допускали четкую физическую интерпретацию. Этому требованию соответствует выбор

$$M = -\frac{\sigma_2 \vec{S}\cdot\vec{p}}{p^2}, \tag{22}$$

где $\frac{1}{p^2}$ — интегральный оператор (17). Действительно, подставив (22) в (21) и выбирая $\{Q_A\} = \{P_\mu, J_{\mu\nu}\}$, где P_μ и $J_{\mu\nu}$ — генераторы группы Пуанкаре, приходим к классическим выражениям для импульса, энергии углового момента и центра энергии электромагнитного поля. Подстановка в (21) операторов (7) приводит к следующим результатам:

$$\begin{gathered}\langle Q_1\rangle = \int \frac{d^3p}{\varphi p}\left\{\sum_a \left[f\tilde{E}_a(t,-\vec{p})\tilde{H}_a(t,\vec{p}) + p_a^2 \dot{\tilde{E}}_a(t,-\vec{p})\dot{\tilde{H}}_a(t,\vec{p})\right]\right\},\\ f = p_1^2p_2^2 + p_1^2p_3^2 + p_2^2p_3^2;\end{gathered} \tag{23а}$$

$$\langle Q_2\rangle = \int \frac{d^3p}{2p^2}\left\{\vec{p}\cdot\left[\tilde{\vec{E}}(t,-\vec{p})\times\tilde{\vec{E}}(t,\vec{p}) + \tilde{\vec{H}}(t,-\vec{p})\times\tilde{\vec{H}}(t,\vec{p})\right]\right\}; \tag{23б}$$

$$\begin{gathered}\langle Q_3\rangle = \int \frac{d^3p}{2\varphi p}\left\{ f\left[\tilde{\vec{H}}(t,\vec{p})\tilde{\vec{H}}(t,-\vec{p}) - \tilde{\vec{E}}(t,\vec{p})\tilde{\vec{E}}(t,-\vec{p})\right] + \right.\\ \left. + \sum_a p_a^2\left[\dot{\tilde{H}}_a(t,\vec{p})\dot{\tilde{H}}_a(t,-\vec{p}) - \dot{\tilde{E}}_a(t,\vec{p})\dot{\tilde{E}}_a(t,-\vec{p})\right]\right\};\end{gathered} \tag{23в}$$

$$\langle Q_8\rangle = \int \frac{d^3p}{2p}\left[\vec{\tilde{E}}(t,\vec{p})\cdot\vec{\tilde{E}}(t,-\vec{p}) + \vec{\tilde{H}}(t,\vec{p})\cdot\vec{\tilde{H}}(t,-\vec{p})\right]; \tag{23г}$$

$$\langle Q_4\rangle = \langle Q_5\rangle = \langle Q_6\rangle = \langle Q_7\rangle = 0, \qquad \dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t}. \tag{23д}$$

Таким образом, помимо классических интегралов движения для электромагнитного поля в силу дополнительной симметрии уравнений Максвелла, описываемой теоремой 1, сохраняются во времени интегральные комбинации (23).

Аналогично получаем, что из симметрии уравнений (15) относительно алгебры (16) следует сохранение во времени интегралов

$$S_a = \frac{i}{2}\varepsilon_{abc}\int A_b(t,\vec{x})\overleftrightarrow{p}_0 A_c(t,\vec{x})\,d^3x, \qquad p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \tag{24а}$$

$$\Sigma_{ab} = \frac{1}{2}\int\left\{A_a(t,\vec{x})\overleftrightarrow{p}_0\left[\frac{p_0}{p}A_b(t,\vec{x})\right] + A_b(t,\vec{x})\overleftrightarrow{p}_0\left[\frac{p_0}{p}A_a(t,\vec{x})\right]\right\}d^3x, \tag{24б}$$

Формулы (24а) определяют спин векторного поля [15]. Мы видим, что из дополнительной симметрии уравнений для вектор-потенциала, описываемой теоремой 2, следует сохранение во времени еще шести интегральных комбинаций (24б). Особо простой вид интегралы (24) принимают в импульсном пространстве. Полагая

$$A_\mu(x) = \int d^4k\,\delta\left(k_0^2 - k^2\right)\exp(-ikx)A_\mu(k),$$

получаем

$$\begin{aligned} S_a &= i\varepsilon_{abc}\int d^3k\,A_b^+(\vec{k})A_c^-(\vec{k}),\\ \Sigma_{ab} &= 2\int d^3k\left\{A_a^+(k)A_b^-(k) - A_b^+(k)A_a^-(k)\right\}, \end{aligned} \tag{25}$$

где

$$A_c^\pm(\vec{k}) = \frac{\theta(k_0)}{\sqrt{2k_0}}\,A_c(\pm k).$$

В заключение обсудим физическую интерпретацию интегралов движения (23), (24). Можно показать, что если электромагнитное поле представляет собой плоскую волну, то формулы (23а)–(23в) задают параметры Стокса, описывающие поляризацию этой волны. В общем случае интегралы (23а)–(23в) можно рассматривать как некое обобщение этих параметров на случаи произвольных решений уравнений Максвелла. Что же касается соотношений (24), то в случае монохроматической волны они могут быть сведены к матричным элементам поляризационной матрицы плотности для поля со спином 1.

Таким образом, нелиевская симметрия уравнений движения может использоваться для описания поляризационных свойств электромагнитного поля. То же самое можно сказать и о релятивистских уравнениях для частиц с отличной от нуля массой и произвольным спином, например, нелиевская симметрия уравнения Дирака [12] может быть использована при описании поляризации электрона [18].

1. Plybon D., *Am. J. Phys.*, 1974, **42**, 998.
2. Heaviside O., *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, 1893, **183**, 423.
3. Larmor I., Collected papers, London, 1928.
4. Rainich G.I., *Trans. Am. Math. Soc.*, 1925, **27**, 106.
5. Beteman H., *Proc. London Math. Soc.*, 1909, **8**, 223.
6. Cunningham E., *Proc. London Math. Soc.*, 1909, **8**, 77.
7. Ибрагимов Н.Х., *ДАН СССР*, 1968, **178**, 566.
8. Fushchych W.I., Preprint ITP-70-32E, Kiev, 1970.
9. Фущич В.И., *ТМФ*, 1971, **7**, 3.
10. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **11**, 506.
11. Никитин А.Г., Сегеда Ю.Н., Фущич В.И., *ТМФ*, 1976, **29**, 82.
12. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1979, **12**, 747.
13. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cim.*, 1979, **24**, 220.
14. Фущич В.И., Наконечный В.В., *УМЖ*, 1980, **32**, 267.
15. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Czech. J. Phys. B*, 1982, **32**, 470.
16. Фущич В.И., Владимиров В.А., *ДАН СССР*, 1981, **257**, 1105.
17. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., Введение в теорию квантованных полей, М., Наука, 1973.
18. Стражев В. И., *Весц. АН БССР*, 1981, **5**, 75.