О некоторых точных решениях многомерных нелинейных уравнений Даламбера, Лиувилля, Дирака и уравнения эйконала

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ, В.М. ШТЕЛЕНЬ

1. Введение

За последние 15 лет достигнут существенный прогресс в изучении двумерных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (НДУЧП), широко встречающихся в теоретической и математической физике. Основным методом исследования таких НДУЧП является метод обратной задачи теории рассеяния. Этот метод, несмотря на многочисленные попытки, не обобщен на многомерные НДУЧП.

В настоящем докладе приведены в явном виде некоторые классы точных решений следующих многомерных НДУЧП:

$$\Box u + \lambda u^k = 0, \qquad u \equiv u(x), \qquad x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}); \tag{1}$$

$$\Box u + \lambda \exp(u), \qquad \Box = -p_\mu p^\mu, \qquad p_\mu = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}; \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu} \frac{\partial u}{\partial x^\mu} = m^2; \tag{3}$$

$$\left[\gamma_\mu p^\mu - m - \lambda(\bar\psi\psi)^k\right] \psi = 0, \tag{4}$$

где γ_μ — матрицы Дирака, ψ — спинор, m, k, λ — произвольные действительные постоянные величины.

Фундаментальным свойством уравнений (1)–(4) является то, что все они обладают широкими группами симметрий. Именно симметрийные свойства этих уравнений дали возможность в явном виде построить их решения.

Хорошо известно, что впервые Софус Ли (1881–1885 гг.) использовал теорию непрерывных групп для решения нелинейных дифференциальных уравнений. Впоследствии Пуанкаре, Лиувилль, Аппель, Леви–Чивита, Уиттекер и многие другие использовали идеи и теорию С. Ли для явного построения решений линейного волнового уравнения. Важные идеи по отысканию инвариантных решений НДУЧП высказал Г. Бейтмен (1914) и Г. Биркгофф [1]. В СССР лиевские идеи и методы получили дальнейшее развитие в работах Л.В. Овсянникова [2].

Труды международного семинара “Теоретико-групповые методы в физике”, Звенигород, 24–26 ноября 1982 г., Москва, Наука, 1983, Т.2, С. 407–413.

2. Метод

Для нахождения явных решений уравнений (1)–(4) мы воспользуемся следующим анзатцем [3]

$$u(x) = \varphi(\omega) f(x) + g(x), \tag{5}$$

где $\varphi(\omega)$ — некоторая неизвестная функция (или вектор-функция в случае системы дифференциальных уравнений), зависящая от новых инвариантных переменных

$$\omega = \omega(x) = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}\},$$

число которых на единицу меньше, чем переменных в уравнении. Новые переменные $\omega(x)$ и явные выражения для функций $f(x)$ и $g(x)$ находятся из системы уравнений Эйлера–Лагранжа

$$\frac{dx_0}{\xi^0} = \frac{dx_1}{\xi^1} = \cdots = \frac{dx_{n-1}}{\xi^{n-1}} = \frac{du}{\eta}, \tag{6}$$

где ξ^μ и η — функции, задающие инфинитезимально группу инвариантности уравнений (1)–(3), т.е.

$$\begin{aligned} x'_\mu &= x_\mu + \varepsilon \xi^\mu(x,u) + o\left(\varepsilon^2\right), \\ u'(x') &= u(x) + \varepsilon \eta(x,u) + o\left(\varepsilon^2\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Явный вид функций ξ^μ и η зависит от симметрии уравнений.

Все приведенные ниже теоремы доказываются с помощью метода Ли [2].

3. Решения нелинейного уравнения Даламбера

Для отыскания решений уравнения Даламбера используются следующие симметрийные свойства уравнения (1).

Теорема 1. *Максимальной локальной группой инвариантности уравнения (1) является расширенная группа Пуанкаре $\tilde{P}(1,n-1)$ — группа вращении, сдвигов и масштабных преобразований. Базисные элементы алгебры Ли группы $\tilde{P}(1,n-1)$ задаются формулами*

$$p_\mu = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \qquad D = x_\nu p^\nu - 2iu \frac{\partial}{\partial u}.$$

Не вдаваясь в детали, приведем явный вид некоторых относительно простых решений уравнения (1), построенных указанным выше способом. Решение уравнения (1) ищутся в виде

$$u(x) = \varphi(\omega) f(x). \tag{8}$$

Полученные нами решения имеют такой вид:

$$\begin{gathered} u = \left\{ -\frac{\lambda}{4}(1-k)^2 \left[(\beta_\nu y^\nu)^2 + y_\nu y^\nu \right] \right\}^{1/(1-k)}, \\ \beta_\nu \beta^\nu = -1, \qquad y_\nu = x_\nu + a_\nu, \qquad \nu = 0,1,\ldots,n-1, \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} u = \left\{ \frac{\lambda}{2}(1-k)^2 \alpha_\nu y^\nu \beta_\sigma y^\sigma \right\}^{1/(1-k)}, \\ \alpha_\nu \alpha^\nu = \beta_\nu \beta^\nu = 0, \qquad \alpha_\nu \beta^\nu = -1, \end{gathered} \tag{10}$$

$$u = \{F(\alpha_\nu x^\nu) + \beta_\nu x^\nu\}^{2/(1-k)},$$
$$\alpha_\nu \alpha^\nu = \alpha_\nu \beta^\nu = 0, \qquad \beta_\nu \beta^\nu = -\frac{\lambda}{2}(1-k)^2(1+k)^{-1}, \tag{11}$$

где F — произвольная дифференцируемая функция, a_ν, α_ν, β_ν — параметры, удовлетворяющие указанным условиям.

Обратим внимание на следующий факт. Для всех $k > 1$ решения (9), (10) неаналитичны по константе связи λ. Это означает, что с помощью теории возмущений нельзя получить решения, которые бы были близки (в каком-то смысле) к найденным.

Уравнение (1) в случае $k = \frac{n+2}{n-2}$, как показано Ибрагимовым [4], инвариантно относительно конформной группы $C(1, n-1) \supset \tilde{P}(1, n-1)$. В этом случае, если задано какое-то решение $u_1 = F(x)$ конформно-инвариантного уравнения (1), то новое n-параметрическое решение u_2 находится по формуле

$$u_2(x) = \sigma^{(2-n)/2} F\left(\frac{x - c x_\nu x^\nu}{\sigma}\right),$$

где $c = (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ — параметры, $\sigma \equiv 1 - 2c_\nu x^\nu + c_\alpha c^\alpha x_\nu x^\nu$.

4. Решения уравнения Лиувилля

В 1853 г. Лиувилль нашел общее решение двумерного ($x = (x_0, x_1)$) уравнения (2). Метод Лиувилля неприменим к многомерным уравнениям (2).

Теорема 2. *Максимальной локальной группой инвариантности уравнения (2) (число переменных $n > 2$) является расширенная группа Пуанкаре $\tilde{P}(1, n-1)$. Базисные элементы алгебры Ли этой группы задаются операторами*

$$p_\mu = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \qquad D = x_\nu p^\nu - 2i \frac{\partial}{\partial u}. \tag{12}$$

Замечание 1. При $n = 2$ двумерное уравнение (2) допускает бесконечную группу Ли. Коэффициенты инфинитезимального оператора имеют вид

$$\xi^0 = f(x_0 + x_1) + g(x_0 - x_1),$$
$$\xi^1 = f(x_0 + x_1) - g(x_0 - x_1) + c_1, \qquad \eta = c_2 - 2\frac{\partial \xi^0}{\partial x_0},$$

где f и g — произвольные дифференцируемые функции, c_1 и c_2 — постоянные величины.

Решения уравнения (2) ищем в виде

$$u(x) = \varphi(\omega) + f(x). \tag{13}$$

Наиболее простые решения уравнения (2) задаются формулами

$$u = -2\ln[\gamma P(x) \operatorname{sh} Q(x)], \tag{14}$$

$$u = -2\ln[\delta P(x) \operatorname{ch} Q(x)], \tag{15}$$

$$u = -2\ln[\gamma P(x) \cos Q(x)], \tag{16}$$

$$u = -2\ln[c_1 P(x)R(x)], \qquad R(x) = Q(x)|_{c_1=1}, \tag{17}$$

где

$$P(x) = \alpha_\nu y^\nu, \qquad Q(x) = c_1(\alpha_\nu y^\nu)^{-1}\sqrt{y_\nu y^\nu} + c_2, \qquad \alpha_\nu \alpha^\nu = 0,$$

γ, δ, σ, c_1, c_2 — постоянные величины.

Непосредственной проверкой модно убедиться, что если в формулах (14)–(17) сделать следующую замену:

$$P(x) = F^{-1}(\alpha_\nu y^\nu), \qquad Q(x) = \beta_\nu y^\nu F(\alpha_\nu y^\nu),$$

то такие функции будут также удовлетворять уравнению (2) при произвольных дифференцируемых функциях F и F^{-1}.

5. Решения уравнений эйконала

При отыскании точных решений уравнения (3) $(m = 1)$ использовались следующие симметричные свойства этого уравнения.

Теорема 3. *Максимальная локальная группа инвариантности уравнения (3) — 21-параметрическая группа Ли, базисные инфинитезимальные операторы которой имеют вид*

$$\begin{aligned} &p_A = g_{AB}\frac{\partial}{\partial x_B}, \qquad A, B = 0, 1, \ldots, 4, \qquad g_{AB} = \{1, -1, -1, -1, -1\}, \\ &J_{AB} = x_A p_B - x_B p_A, \qquad x_A = \{x_0, x_1, x_2, x_3, u(x)\}, \\ &D = x_A p^A, \qquad K_A = 2x_A D - x_B x^B p_A \end{aligned} \tag{18}$$

и удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли конформной группы $C(1,4)$.

Приведем некоторые решения уравнения (3):

$$u(x) = f(\alpha_\nu x^\nu) + \beta_\nu x^\nu, \qquad \alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta^\nu = 0, \qquad \beta_\nu\beta^\nu = 1 \tag{19}$$

(где f — произвольная дифференцируемая функция),

$$u(x) = \left[(\alpha_\nu x^\nu)^2 + x_\nu x^\nu\right]^{1/2}, \qquad \alpha_\nu\alpha^\nu = -1, \tag{20}$$

$$u(x) = \left[x_0^2 - (\vec{\alpha}\vec{x})^2\right]^{1/2}, \qquad \vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha} = 1, \tag{21}$$

$$u(x) = \sqrt{x_\nu x^\nu}, \tag{22}$$

α_ν, β_ν — произвольные постоянные, удовлетворяющие указанным условиям. Для построения новых решений уравнения (3) по заданным воспользуемся теоремой 3, т.е. тем фактом, что эйкональное уравнение (3) инвариантно относительно группы конформных преобразований $C(1,4)$ в 5-мерном пространстве Минковского $R(1,4)$, метрика в котором задается формулой

$$s^2 = x_B x^B = x_\nu x^\nu - u^2(x). \tag{23}$$

Конечные преобразования, порождаемые операторами (18), имеют вид

$$x'_\mu = \frac{x_\mu - c_\mu\left(x_\nu x^\nu - u^2(x)\right)}{\sigma(x,u)}, \qquad u'(x') = \frac{u(x) - c_4\left(x_\nu x^\nu - u^2(x)\right)}{\sigma(x,u)}, \tag{24}$$

где c_μ, c_4 — произвольные постоянные,

$$\sigma(x,u) = 1 - 2c_\nu x^\nu + 2c_4 u(x) - \left(c_\nu c^\nu - c_4^2\right)\left(x_\alpha x^\alpha - u^2(x)\right).$$

Если $u(x) = \varphi(x)$ — какое-то решение уравнения (3), то, используя преобразования инвариантности, общий вид которых

$$x' = f(x, u(x), \theta), \qquad u'(x') = g(x, u(x), \theta) \tag{25}$$

(θ — параметры преобразований), новое решение $u_{\text{нов}}(x)$ находится из функционального уравнения

$$g(x, u_{\text{нов}}(x), \theta) = \varphi(x' = f(x, u_{\text{нов}}(x), \theta)). \tag{26}$$

Так, например, с помощью конформных преобразований (24) из очевидного решения уравнения (3)

$$u(x) = \beta_\nu x^\nu, \qquad \beta_\nu \beta^\nu = 1 \tag{27}$$

получаем новое решение:

$$\begin{aligned} &u(x) = (2a)^{-1}\left\{\pm\left[1 + 4(a x_\nu x^\nu + \beta_\nu x^\nu)\right]^{1/2} - 1\right\}, \\ &a = c_4 - \beta_\nu c^\nu \neq 0, \qquad \beta_\nu\beta^\nu = 1. \end{aligned} \tag{28}$$

6. Решение нелинейного уравнения Дирака

Для решения уравнения (4) используем следующий анзатц [3]

$$\psi(x) = A(x)\varphi(\omega), \tag{29}$$

где $A(x)$ — несингулярная матрица 4×4, $\varphi(\omega)$ — неизвестный 4-компонентный спинор, зависящий только от инвариантных переменных. Явный вид матрицы $A(x)$ находим из следующего уравнения:

$$QA(x) \equiv (\xi^\mu(x)\partial_\mu + \eta(x))A(x) = 0, \tag{30}$$

где Q — инфинитезимальный оператор группы инвариантности уравнения (4). Рассмотрим уравнение (4) с массой $m = 0$ и нелинейностью Гюрши ($k = 1/3$). В этом случае, кал известно [5], уравнение Дирака инвариантно относительно конформной группы $C(1,3)$. Конформно-инвариантное решение уравнения Дирака с нелинейностью Гюрши, зависящее от четырех параметров, имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{\gamma x}{(x_\nu x^\nu)^2}\exp\{i\lambda\varkappa(\gamma\beta)\omega\}\chi \equiv \\ &\equiv \frac{\gamma x}{(x_\nu x^\nu)^2}\left(\cos(\lambda\varkappa\beta\omega) + i\frac{\gamma\beta}{\beta}\sin(\lambda\varkappa\beta\omega)\right), \end{aligned} \tag{31}$$

где $\omega = \frac{\beta x}{x_\nu x^\nu}$, $\quad \beta_\nu\beta^\nu > 0$, $\beta = (\beta_\nu\beta^\nu)^{1/2}$, $\gamma x = \gamma_\nu x^\nu$, χ — постоянный спинор, $\bar\chi\chi = a$, $\chi = \frac{a^{1/3}}{\beta_\nu\beta^\nu}$.

Для получения решения (31) использовался оператор Q, представляющий собой линейную комбинацию генераторов конформных преобразований:

$$Q = c_\mu K^\mu = (2cx)x\partial - x^2 c\partial + \gamma c\gamma x + 2cx, \tag{32}$$

где c_μ — произвольные постоянные, $x^2 \equiv x^\nu x_\nu$, $x\partial \equiv x^\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}$ и т.д.

Другие решения уравнения (4) приведены в [6]. Следует подчеркнуть, что наши решения нелинейного уравнения Дирака (4) аналитичны по константе связи. Решения уравнения (4) с $m = 0$ и $k = 1/3$, полученные Кортелем [7], Мерве [8] с помощью анзатца Гейзенберга [9], неаналитичны по константе связи λ.

Общий вид конечных преобразований инвариантности уравнения (4) следующий:

$$x' = f(x, \theta), \qquad \psi'(x') = R(x, \theta)\psi(x), \tag{33}$$

где θ — параметры преобразования, $R(x, \theta)$ — матрицы 4×4. Формула для генерирования нового решения $\psi_2(x)$ по известному решению $\psi_1(x)$ имеет вид:

$$\psi_2(x) = R^{-1}(x, \theta)\psi_1(x'),$$

где $R^{-1}(x, \theta)$ — матрица 4×4, обратная к $R(x, \theta)$.

Заключение

1. Если НДУЧП обладает нетривиальной симметрией, то имеется надежда отыскать многопараметрические семейства его точных решений. Получаемые таким способом решения для НДУЧП, содержащих малый параметр ε, могут оказаться неаналитичными по ε; это означает, что с помощью теории возмущений нельзя получить решения, в каком-то смысле близкие к таким решениям. В некоторых случаях решение можно представить через произвольные функции, зависящие от инвариантов группы симметрии уравнения.

2. Для НДУЧП, инвариантных относительно нетривиальных преобразований независимых и зависимых переменных, справедлив симметрийный нелинейный принцип суперпозиции (преобразования) решений.

3. Точные решения НДУЧП могут служить “эталонами” для построения конструктивных приближенных методов решения НДУЧП.

4. С помощью указанного метода найдены классы точных решений многомерных нелинейных уравнений Шредингера [10], Гамильтона–Якоби [3], Борна–Инфельда [11], Дирака [6].

1. Биркгоф Г., Гидродинамика, М., ИЛ, 1954.
2. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978.
3. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
4. Ибрагимов Н.Х., Группы Ли в некоторых вопросах математической физика, Новосибирск, 1972.
5. Gursey F., *Nuovo Cim.*, 1956, **3**, 988.
6. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *J. Phys. A*, 1983, **16**, № 2, 271.
7. Kortel F., *Nuovo Cim.*, 1956, **4**, № 2, 210.
8. Merwe P.T., *Phys. Lett. B*, 1981, **106**, № 6, 485.
9. Heisenberg W., *Z. Naturf. A*, 1954, **9**, 292.
10. Fushchych W.I., Moskaliuk S.S., *Lett. Nuovo Cim.*, 1981, **31**, 571.
11. Фущич В.И., Серов Н.И., *ДАН СССР*, 1982, **263**, 582.
12. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *Lett. Nuovo Gim.*, 1982, **34**, № 16, 498.