О линейных и нелинейных системах дифференциальных уравнений, инвариантных относительно группы Шредингера

В.И. ФУЩИЧ, В.М. ШТЕЛЕНЬ

Получены линейные и нелинейные системы дифференциальных уравнений, инвариантные относительно группы Шредингера и описывающие движение нерелятивистской частицы массы m с произвольным спином s.

The Schrödinger-invariant linear and nonlinear systems of differential equations are obtained. They describe the motion of nonrelativistic massive particles with arbitrary spin s.

Введение

Группа Шредингера $Sch(1,3)$ — максимальная локальная 13-параметрическая группа инвариантности уравнения Шредингера [1].

$$\check{S}\psi_k(t,\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \check{S} \equiv p_0 - \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m},$$
$$p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{p} = \left\{p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}\right\}, \qquad a = 1,2,3, \quad k = 1,2,\ldots,n. \tag{0.1}$$

Группа $Sch(1,3)$ содержит в качестве подгруппы группу Галилея $G(1,3)$ и группу проективных и масштабных преобразований (более подробно об этом см., например, [2, 3] и цитированную там литературу).

На множестве решений уравнения (0.1) реализуется неприводимое представление $D(m, s=0)$ группы $Sch(1,3)$, т.е. представление с массой m и нулевым спином $s = 0$.

Требование инвариантности уравнений движения для частиц с ненулевым спином $s \neq 0$ в нерелятивистской квантовой теории относительно группы $Sch(1,3)$ аналогично требованию конформной инвариантности в релятивистской теории. Так, например, система свободных безмассовых векторных полей

$$\Box\boldsymbol{E} = 0, \qquad \boldsymbol{E} = \{E_1, E_2, E_3\},$$
$$\Box\boldsymbol{H} = 0, \qquad \boldsymbol{H} = \{H_1, H_2, H_3\}, \tag{0.2}$$

инвариантна относительно конформной группы $C(1,3)$ только тогда, когда $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ удовлетворяют уравнениям Максвелла [4]. Этот результат можно использовать для вывода релятивистских уравнений движения для безмассовых частиц.

Отметим также, что, как хорошо известно, среди всех скалярных пуанкаре-инвариантных уравнений вида

$$\Box\varphi + F(\varphi) = 0 \tag{0.3}$$

Теоретическая и математическая физика, 1983, **56**, № 3, С. 387–394.

существует только одно конформно-инвариантное нелинейное уравнение с кубической нелинейностью $F(\varphi) = \lambda\varphi^3$.

Аналогичный результат имеется и в нерелятивистской теории: среди всех галилеево-инвариантных уравнений вида

$$\check{S}\psi + F(\psi, \psi^*) = 0, \tag{0.4}$$

существует только одно нелинейное уравнение

$$\check{S}\psi + \lambda(\psi^*\psi)^{2/3}\psi = 0, \tag{0.5}$$

инвариантное относительно группы $Sch(1,3)$ [5].

Приведенная аналогия между релятивистскими и нерелятивистскими полями лежит в основе наших дальнейших рассуждений.

В настоящей работе решены следующие две задачи.

1. Найдены уравнения (условия) на вектор-функцию

$$\psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}, \qquad \check{S}\psi = 0, \tag{0.6}$$

при которых на множестве решений уравнения (0.6) реализуется представление группы $Sch(1,3)$ с массой m и ненулевым спином s, т.е. из требования инвариантности относительно группы $Sch(1,3)$ и условия (0.6) найдены уравнения движения для нерелятивистской частицы с ненулевым спином. Некоторые из выведенных таким способом уравнений движения известны в литературе: уравнения Леви–Леблонда [6], Хагена–Герлея [7] получены этими авторами из совершенно других предпосылок; некоторые уравнения получены впервые.

2. Описаны нелинейные системы дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$\check{S}\psi_k = F_k(\psi_l, \psi_l^*), \qquad k, l = 1, 2, \ldots, n, \tag{0.7}$$

инвариантные относительно группы $Sch(1,3)$, т.е. в явном виде построены все функции F_k, при которых уравнение (0.7) инвариантно относительно группы $Sch(1,3)$.

1. Основные определения и постановка задачи

Определение 1. *Система дифференциальных уравнений для вектор-функции* $\psi = \psi(t, \boldsymbol{x})$

$$\check{S}\psi = 0 \tag{1.1}$$

($\check{S}$ — оператор Шредингера (0.1)) инвариантна относительно группы Шредингера $Sch(1,3)$, если

$$\check{S}Q_l\psi = 0, \qquad \text{или} \qquad [\check{S}, Q_l]\psi = 0, \tag{1.2}$$

где Q_l — базисные элементы алгебры Ли группы $Sch(1,3)$, явный вид которых следующий:

$$\begin{gathered} p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad a = 1, 2, 3, \\ J_a = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p})_a + \hat{S}_a, \qquad G_a = tp_a - mx_a + \lambda_a, \\ D = 2tp_0 - \boldsymbol{x}\boldsymbol{p} + \lambda_0, \qquad A = tD - t^2 p_0 + \frac{1}{2}m\boldsymbol{x}^2 - \lambda\boldsymbol{x}, \qquad E = m, \end{gathered} \tag{1.3}$$

$\hat{S}_a$, λ_a, λ_0 — некоторые матрицы.

Можно проверить, что эти операторы реализуют представление алгебры $Sch(1,3)$, т.е. удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры $Sch(1,3)$ [3], если матрицы λ_a, $\hat{S}_a$, λ_0 удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
&[\hat{S}_a, \hat{S}_b] = i\varepsilon_{abc}\hat{S}_c, \qquad [\lambda_a, \lambda_b] = 0, \qquad [\lambda_0, \lambda_a] = i\lambda_a, \\
&[\lambda_0, \hat{S}_a] = 0, \qquad [\lambda_a, \hat{S}_b] = i\varepsilon_{abc}\lambda_c.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Явный вид матриц $\hat{S}_a$, λ_a, удовлетворяющих алгебре (1.4), построен в [3].

2. Уравнения движения, инвариантные относительно группы $Sch(1,3)$

Теорема 1. *Система уравнений (1.1) инвариантна относительно группы* $Sch(1,3)$*, если и только если удовлетворяются уравнения*

$$L\psi = 0, \qquad L \equiv \lambda_0 - \frac{3}{2}i - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{p}/m, \tag{2.1}$$

$$\Lambda\psi = 0, \qquad \Lambda \equiv \lambda_a\lambda_a \equiv \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2. \tag{2.2}$$

Доказательство. *Достаточность.* Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$[\check{S}, Q_l] = 0 \qquad \text{для} \quad l = 1, 2, \ldots, 10, 13, \tag{2.3}$$

$$[\check{S}, Q_{11}] \equiv [\check{S}, D] = 2i\check{S}, \tag{2.4}$$

$$[\check{S}, Q_{12}] \equiv [\check{S}, A] = 2it\check{S} + iL. \tag{2.5}$$

Необходимость. Легко проверить, что система уравнений (1.1), (2.1) и (2.2) инвариантна относительно группы Шредингера:

$$\begin{aligned}
&[L, Q_l] = 0 \qquad \text{для} \quad l = 1, 2, \ldots, 11, 13, \\
&[L, Q_{12}] \equiv [L, A] = (im)^{-1}\Lambda,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
&[\Lambda, Q_l] = 0 \qquad \text{для} \quad l = 1, 2, \ldots, 10, 13, \\
&[\Lambda, D] = -2i\Lambda, \qquad [\Lambda, A] = -2it\Lambda.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Таким образом, теорема доказана.

Итак, на множестве решений системы (1.1), (2.1) и (2.2), когда матрицы $\hat{S}_a$, λ_0, λ_a реализуют нетривиальное представление алгебры (1.4), реализуется представление группы с массой m и спином s. Величина спина зависит от размерности представления матриц $\hat{S}_a$, реализующих приводимое или неприводимое представление алгебры Ли группы $Sch(1,3)$. Для явного построения уравнений (2.1), (2.2) (дополнительных условий к (1.1)) необходимо иметь явные выражения для матриц $\hat{S}_a$, λ_a. Эти матрицы построены в [3]. В зависимости от того, какое представление для матриц $\hat{S}_a$, λ_a выбирать, мы получим различные галилеево-инвариантные уравнения (1.1), (2.1), (2.2).

Ниже мы приведем несколько примеров уравнений (2.1), (2.2) в явном виде для частиц со спином $1/2$ и произвольным спином s.

Пример 1. Рассмотрим представление $D(s) \oplus D(s)$ для матриц

$$\hat{S}_a = \begin{pmatrix} S_a & 0 \\ 0 & S_a \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

где S_a — матрицы, реализующие неприводимое представление алгебры Ли группы $SU(2)$, 0 — нулевые матрицы соответствующей размерности. Матрицы λ_0 и λ_a имеют вид

$$\lambda_0 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S_a & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

В развернутой записи система (1.1), (2.1), (2.2) имеет вид

$$\begin{aligned} &\check{S}\psi = 0, \qquad \psi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \\ &im\varphi_2 - \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}\varphi_1 = 0, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где φ_1 и φ_2 — $(2s+1)$-компонентные функции. В частности, для спина $s = 1/2$ матрицы $S_a = \frac{1}{2}\sigma_a$ (σ_a — матрицы Паули), и система (2.10) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} &\check{S}\psi = 0, \qquad \psi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \\ &2im\varphi_2 - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\varphi_1 = 0, \end{aligned} \tag{2.11}$$

(φ_1 и φ_2 — двухкомпонентные спиноры), или в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} &p_0\varphi_1 - i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\varphi_2 = 0, \\ &2im\varphi_2 - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\varphi_1 = 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Эта система совпадает с уравнениями движения Леви–Леблонда [6] для нерелятивистской частицы со спином $s = 1/2$.

Пример 2. Пусть матрицы $\hat{S}_a$ реализуют представление $D(s) \oplus D(s-1)$ [3]:

$$\hat{S}_a = \begin{pmatrix} S_a & 0 \\ 0 & \Sigma_a \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Тогда

$$\lambda_0 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ K_a & 0 \end{pmatrix},$$

здесь и в дальнейшем S_a, Σ_a — матрицы, реализующие неприводимое представление $D(s)$ и $D(s-1)$, соответственно, алгебры Ли группы $SU(2)$; K_a — матрицы размерности $(2s+1)\times(2s-1)$, их свойства детально обсуждаются в приложении.

В этом случае система уравнений (1.1), (2.1), (2.2) имеет вид

$$\begin{aligned} &\hat{S}\psi = 0, \qquad \psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \qquad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \vdots \\ \varphi^{2s+1} \end{pmatrix}, \qquad \chi = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \vdots \\ \chi^{2s-1} \end{pmatrix}, \\ &im\chi - (\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{p})\varphi = 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

В частности, для частицы со спином $s = 1$ получаем

$$(S_a)_{bc} = -i\varepsilon_{abc}, \qquad K_1 = (i00), \qquad K_2 = (0i0), \qquad K_3 = (00i), \tag{2.15}$$

и система (2.14) принимает вид

$$\begin{aligned} &\check{S}\psi = 0, \qquad \psi = \{\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \chi\}, \\ &m\chi - p_a\varphi^a = 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Эти систему, инвариантную относительно группы Шредингера $Sch(1,3)$, можно рассматривать как нерелятивистский аналог релятивистского уравнения Прока [2, 3] для векторных частиц ($s = 1$).

Пример 3. Пусть матрицы $\hat{S}_a$ реализуют представление $D(s) \oplus D(s) \oplus D(s-1)$, тогда [3]

$$\hat{S}_a = \begin{pmatrix} S_a & 0 & 0 \\ 0 & S_a & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_a \end{pmatrix}, \ \lambda_a = -\frac{i}{2s}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ S_a & 0 & 0 \\ K_a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \lambda_0 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

(S_a, Σ_a — матрицы, реализующие неприводимое представление $D(s)$ и $D(s-1)$, соответственно, алгебры $SU(2)$), а система (1.1), (2.1), (2.2) принимает вид

$$\begin{aligned} &\check{S}\psi = 0, \quad \psi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \chi \end{pmatrix}, \ \varphi_k = \begin{pmatrix} \varphi_k^1 \\ \vdots \\ \varphi_k^{2s+1} \end{pmatrix}, \ k = 1, 2, \ \chi = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \vdots \\ \chi^{2s-1} \end{pmatrix}, \\ &2ms\varphi_2 + (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})\varphi_1 = 0, \qquad 2ms\chi + (\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{p})\varphi_1 = 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Используя (П.2), систему (2.18) можно переписать в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} &sp_0\varphi_1 + \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}\varphi_2 + K_a^\dagger p_a\chi = 0, \\ &2ms\varphi_2 + \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}\varphi_1 = 0, \qquad 2ms\chi + \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{p}\varphi_1 = 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Эта система, инвариантная относительно группы Шредингера $Sch(1,3)$, совпадает с уравнениями движения Хагена–Герлея [7] для нерелятивистской частицы с произвольным спином s и массой m. Другие системы дифференциальных уравнений, инвариантные относительно группы $Sch(1,3)$, получаются аналогичным образом при использовании других представлений матриц $\hat{S}_a$, λ_a.

3. Конечные преобразования группы Шредингера

Прежде всего отметим, что встречавшиеся нам в разделе 2 матрицы λ_a нильпотентны 2-го и 3-го порядка. С учетом этого обстоятельства мы и приводим конечные преобразования для $\psi(x)$, хотя обобщение на более сложные случаи вполне очевидно.

Галилеевские преобразования:

$$\begin{aligned} &t' = t, \qquad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t, \\ &\psi'(x') = \exp\left\{im\left(\boldsymbol{v}\boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{v}^2}{2}t\right)\right\}\left[I - i(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{v}) + \frac{(i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{v})^2}{2!}\right]\psi(x). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Масштабные преобразования:

$$
\begin{aligned}
&t' = \exp\{2\alpha\}t, \qquad \boldsymbol{x}' = \exp\{\alpha\}\boldsymbol{x},\\
&\psi'(x') = \exp\{i\alpha\lambda_0\}\psi(x)
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

(запись $\exp\{i\lambda_0\}$ означает подстановку в показатель степени матричных элементов диагональной матрицы λ_0).

Проективные преобразования:

$$
\begin{aligned}
&t' = \frac{t}{1-\theta t}, \qquad \boldsymbol{x}' = \frac{\boldsymbol{x}}{1-\theta t},\\
&\psi'(x') = (1-\theta t)^{-i\lambda_0}\exp\{if\}\left[I - \frac{i\theta}{1-\theta t}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{x}) + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{1}{2!}\left(\frac{i\theta}{1-\theta t}\right)^2(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{x})^2\right]\psi(x), \qquad f \equiv \frac{m\boldsymbol{x}^2}{2}\frac{\theta}{1-\theta t}.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Доказательство справедливости формул (3.1)–(3.3) проще всего сделать, проверив выполнимость уравнений Ли. Продемонстрируем это на примере проективных преобразований (3.3):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\psi'(x')}{\partial\theta} &= i\lambda_0 t'\psi'(x') + i\frac{m\boldsymbol{x}'^2}{2}\psi'(x') + (1-\theta t)^{-i\lambda_0}\exp\{if\}\times\\
&\times\left(-i\frac{\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{x}}{1-\theta t}\right)\left[I - \frac{i\theta}{1-\theta t}\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{x} + \frac{1}{2!}\left(\frac{i\theta}{1-\theta t}\right)^2(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{x})^2\right]\psi(x) =\\
&= i\left(t'\lambda_0 + \frac{m\boldsymbol{x}'^2}{2} - \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{x}'\right)\psi'(x'),
\end{aligned}
$$

т. е. уравнения Ли для оператора A из (1.3) удовлетворяются тождественно.

4. Нелинейные системы дифференциальных уравнений, инвариантные относительно группы Шредингера

В этом разделе решена вторая задача, т. е. построены нелинейные системы уравнений вида (0.7), инвариантные относительно группы $Sch(1,3)$. Задача сводится к построению явных выражений для функций F_k, зависящих только от компонент волновой функции $\psi = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$, при которых уравнение (0.7) инвариантно относительно группы $Sch(1,3)$. Для решения этой задачи используются конечные преобразования группы $Sch(1,3)$, т.е. формулы (3.1)–(3.3). Такой подход к построению нелинейных уравнений, инвариантных относительно заданной группы, значительно проще инфинитезимального метода С. Ли. При этом, конечно, необходимо задавать представление соответствующей группы.

Подробно остановимся лишь на одном типичном примере. В остальных случаях, которые мы приведем без доказательства, все необходимые вычисления аналогичны.

Рассмотрим следующее нелинейное обобщение системы уравнений (2.10):

$$
\begin{aligned}
&\check{S}\varphi_1 = F_1, \qquad \check{S}\varphi_2 = F_2,\\
&im\varphi_2 - \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}\varphi_1 = F_3,
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

где F_1, F_2, F_3 — искомые $(2s+1)$-компонентные функции, зависящие от φ_1, φ_2, $\varphi_1^\dagger$, $\varphi_2^\dagger$.

Теорема 2. *Система уравнений (4.1) инвариантна относительно группы Шредингера $Sch(1,3)$, если*

$$F_1 = \varkappa F\left(\frac{w_1}{w_2}\right) w_2\varphi_1, \qquad F_2 = \varkappa F\left(\frac{w_1}{w_2}\right) w_2\varphi_2, \qquad F_3 = 0, \tag{4.2}$$

где $w_1 = (\varphi_1^\dagger\varphi_2^\dagger\varphi_2^\dagger\varphi_1)^{1/2}$, $w_2 = (\varphi_1^\dagger\varphi_1)^{2/3}$, F — произвольная скалярная функция указанного аргумента, $\varkappa$ — произвольная постоянная.

Доказательство. Согласно (2.8), (2.9), (3.3) конечные проективные преобразования имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}
\varphi_1'(x') = (1-\theta t)^{3/2}\exp\{if\}\varphi_1(x), \qquad f \equiv \frac{m\boldsymbol{x}^2}{2}\frac{\theta}{1-\theta t}, \\
\varphi_2'(x') = (1-\theta t)^{5/2}\exp\{if\}\left[\varphi_2(x) - i\frac{\theta}{1-\theta t}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{x})\varphi_1(x)\right], \\
p_0' = (1-\theta t)^2 p_0 + \theta(1-\theta t)\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}, \qquad p' = (1-\theta t)\boldsymbol{p}.
\end{gathered} \tag{4.3}$$

Под действием этих преобразований система (4.1) принимает вид

$$\begin{gathered}
(1-\theta t)^{7/2}\exp\{if\}\check{S}\varphi_1 = F_1', \\
(1-\theta t)^{9/2}\exp\{if\}\check{S}\varphi_2 - \theta(1-\theta t)^{7/2}\exp\{if\}\frac{1}{m}\times \\
\times\left[im\varphi_2 - (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})\varphi_1 + im(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{x})\check{S}\varphi_1\right] = F_2', \\
(1-\theta t)^{5/2}\exp\{if\}(im\varphi_2 - \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}\varphi_1) = F_3',
\end{gathered} \tag{4.4}$$

откуда в силу (4.1) получаем

$$\begin{gathered}
F_1' = (1-\theta t)^{7/2}\exp\{if\}F_1, \\
F_2' = (1-\theta t)^{9/2}\exp\{if\}\left[F_2 - i\frac{\theta}{1-\theta t}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{x})F_1\right] - \\
-\theta(1-\theta t)^{7/2}\exp\{if\}\frac{1}{m}F_3, \\
F_3' = (1-\theta t)^{5/2}\exp\{if\}F_3.
\end{gathered} \tag{4.5}$$

Используя (4.3) и тот факт, что из ψ и $\psi^\dagger$ можно построить только два галилеевских инварианта $\varphi_1^\dagger\varphi_2^\dagger\varphi_2^\dagger\varphi_1$ и $\varphi_1^\dagger\varphi_1$, приходим к (4.2). При $\varkappa = 0$ (4.1) совпадает с линейной системой (2.10). Теорема доказана.

Перечисленные ниже нелинейные системы уравнений являются обобщением соответствующих линейных систем, рассмотренных в разделе 2. Все они неэквивалентны в том смысле, что на множестве их решений реализуются различные (неэквивалентные) представления группы $Sch(1,3)$:

$$\begin{gathered}
p_0\varphi_1 - i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\varphi_2 = \varkappa F\left(\frac{w_1}{w_2}\right) w_2\varphi_2 + \mu G\left(\frac{w_1}{w_2}\right) w_2^2\varphi_1, \\
2im\varphi_2 - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\varphi_1 = i\varkappa F\left(\frac{w_1}{w_2}\right) w_2\varphi_1,
\end{gathered} \tag{4.6}$$

где $w_1 = (\varphi_1^\dagger\varphi_2^\dagger\varphi_2^\dagger\varphi_1)^{1/2}$, $w_2 = (\varphi_1^\dagger\varphi_1)^{1/3}$. Система (4.6) представляет собой нелинейное обобщение уравнений Леви–Леблонда (2.12). Следующие системы являются аналогичным обобщением уравнений (2.14), (2.18) и (2.19), соответственно:

$$\check{S}\psi = \varkappa(\varphi^\dagger\varphi)^{2/3}\psi, \qquad im\chi - \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{p}\varphi = 0, \tag{4.7}$$

$$\begin{gathered}\check{S}\psi = \varkappa F\left\{\frac{(\varphi_1^\dagger\varphi_2 - \varphi_2^\dagger\varphi_1)^{1/2}}{(\varphi_1^\dagger\varphi_1)^{2/3}}\right\}(\varphi_1^\dagger\varphi_1)^{2/3}\psi,\\ 2ms\varphi_2 + \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}\varphi_1 = 0, \qquad 2ms\chi + \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{p}\varphi_1 = 0,\end{gathered} \tag{4.8}$$

$$\begin{gathered}sp_0\varphi_1 + \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}\varphi_2 + \boldsymbol{K}^\dagger\cdot\boldsymbol{p}\chi = \varkappa F\left\{\frac{(\varphi_1^\dagger\varphi_2 - \varphi_2^\dagger\varphi_1)^{1/2}}{(\varphi_1^\dagger\varphi_1)^{2/3}}\right\}(\varphi_1^\dagger\varphi_1)^{2/3}\varphi_1,\\ 2ms\varphi_2 + \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}\varphi_1 = 0, \qquad 2ms\chi + \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{p}\varphi_1 = 0.\end{gathered} \tag{4.9}$$

Построению точных решений нелинейных систем уравнений аналогичного типа, инвариантных как относительно группы Шредингера, так и относительно группы Пуанкаре, посвящен сборник [8].

Приложение

Здесь мы приводим соотношения между матрицами S_a, Σ_a, K_a, $K_a^\dagger$, которые использовались в разделе 2. Свойства этих матриц детально обсуждались в работах [3, 7]. Определяющие соотношения для K_a имеют вид

$$K_aS_b - \Sigma_bK_a = i\varepsilon_{abc}K_c, \tag{П.1}$$

$$S_aS_b + K_a^\dagger K_b = is\varepsilon_{abc}S_c + s^2\delta_{ab}. \tag{П.2}$$

Напомним, что здесь, как и раньше, S_a и Σ_a — квадратные матрицы, реализующие неприводимое представление $D(s)$ и $D(s-1)$, соответственно, алгебры Ли группы $SU(2)$; K_a — матрицы размерности $(2s{+}1)\times(2s{-}1)$. Соотношения (П.1) следуют из (1.4), а именно из соотношения $[\lambda_a, \hat{S}_b] = i\varepsilon_{abc}\lambda_c$ и определяют K_a с точностью до множителя, который удобно зафиксировать с помощью (П.2) [7]. Использование остальных условий (1.4) приводит к следующим соотношениям [3]:

$$\begin{gathered}K_aS_b - K_bS_a = i(s+1)\varepsilon_{abc}K_c, \qquad \Sigma_aK_b - \Sigma_bK_a = i(1-s)\varepsilon_{abc}K_c,\\ K_aK_b^\dagger - K_bK_a^\dagger = -i(2s+1)\varepsilon_{abc}\Sigma_c, \qquad K_a^\dagger K_b - K_b^\dagger K_a = i(2s-1)\varepsilon_{abc}S_c.\end{gathered}$$

1. Niederer V., *Helv. Phys. Acta*, 1972, **45**, № 5, 802–814.
2. Никитин А.Г., Фущич В.И., *ТМФ*, 1980, **44**, № 1, 34–46.
3. Фущич В.И., Никитин А.Г., *ЭЧАЯ*, 1981, **12**, вып. 5, 1157–1219.
4. Bracken A., *Lett. Nuovo Cim.*, 1972, **2**, № 11, 574–576.
5. Fushchych W.I., Moskaliuk S.S., *Lett. Nuovo Cim.*, 1981, **31**, № 16, 571–576.
6. Levi-Leblond J.-M., *Commun. Math. Phys.*, 1967, **6**, № 4, 286–311.
7. Herley W.J., *Phys. Rev.*, 1971, **3**, № 11, 2339–2347.
8. Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Сб. научн. трудов под ред. В.И. Фущича, Киев, Институт математики АН УССР, 1981.