Об инвариантных решениях нелинейного уравнения Дирака

В.И. ФУЩИЧ, В.М. ШТЕЛЕНЬ

В работе с использованием теоретико-группового подхода получены некоторые классы точных решений нелинейного уравнения Дирака

$$\left[i\gamma^\mu\partial_\mu - \lambda(\bar\psi(x)\psi(x))^k\right]\psi(x) = 0, \tag{1}$$

где $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, γ_μ — матрицы Дирака [1], λ, k — произвольные постоянные; указан способ генерирования новых решений по известным решениям; кратко обсуждаются групповые свойства и решения релятивистского уравнения Гамильтона–Якоби.

1. Хорошо известно, что уравнение (1) при произвольном k инвариантно относительно группы Пуанкаре $P(1,3)$, дополненной масштабными преобразованиями, а при $k = 1/3$ (нелинейность Гюрши [2]) — относительно 15-параметрической группы конформных преобразований $C(1,3)$.

Общий вид генератора этих преобразований следующий:

$$Q = \xi^\mu(x)\partial_\mu + \eta(x), \tag{2}$$

где $\xi^\mu(x)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, — скалярные функции, зависящие от x, $\eta(x)$ — матрица размерности 4×4, зависящая от x.

Решения уравнения (1), следуя [3], ищем в виде

$$\psi(x) = A(x)\varphi(\omega), \tag{3}$$

где $\omega = \omega(x)$ — инварианты дифференциальной части оператора Q (2), т.е. функции, удовлетворяющие уравнению

$$\xi^\mu(x)\partial_\mu\omega(x) = 0; \tag{4}$$

$\varphi(\omega)$ — 4-компонентная спинорная функция, зависящая от новых переменных ω.

Несингулярную матрицу $A(x)$ размерности 4×4 определим из условия

$$QA(x) \equiv (\xi^\mu(x)\partial_\mu + \eta(x))\,A(x) = 0. \tag{5}$$

После того как $A(x)$ и ω найдены из (5) и (4), подстановка выражения (3) в (1) приводит к системе дифференциальных уравнений для $\varphi(\omega)$, которая, как правило, значительно проще исходной. Решив систему для $\varphi(\omega)$, мы найдем некоторый класс точных решений уравнения (1).

2. Реализуем приведенный алгоритм для уравнения (1) с нелинейностью Гюрши ($k = 1/3$), инвариантного относительно конформных преобразований, генератор которых имеет вид

$$Q_{\text{conf}} = 2(cx)x\partial - x^2c\partial + (\gamma c\gamma x + 2cx), \tag{6}$$

Доклады академии наук СССР, 1983, **269**, № 1, С. 88–92.

где c^μ — произвольные постоянные; $cx \equiv c^\nu x_\nu$, $x^2 \equiv x^\nu x_\nu$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что матрица

$$A(x) = \frac{\gamma x}{(x_\nu x^\nu)^2} \tag{7}$$

удовлетворяет условию (5) с оператором (6), т.е.

$$Q_{\text{conf}} \frac{\gamma x}{(x_\nu x^\nu)^2} \equiv 0. \tag{8}$$

Из условия (4), имеющего для оператора (6) вид

$$\left[2(cx)x\partial - x^2 c\partial\right] \omega(x) = 0, \tag{9}$$

находим полный набор инвариантов конформных преобразований:

$$\omega_\mu = \frac{c^2 x_\mu - c_\mu cx}{x_\nu x^\nu}. \tag{10}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\varphi(\omega)$ зависит только от одного инварианта

$$\omega = \frac{\beta x}{x_\nu x^\nu}, \tag{11}$$

где β^ν — произвольные постоянные, $\beta c = 0$, представляющего собой линейную комбинацию инвариантов ω_μ (10).

Подстановка выражения

$$\psi(x) = \frac{\gamma x}{(x_\nu x^\nu)^2} \varphi(\omega), \qquad \omega = \frac{\beta x}{x_\nu x^\nu}, \tag{12}$$

в уравнение (1) с $k = 1/3$ приводит к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для $\varphi(\omega)$

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = i \frac{\lambda}{\beta_\nu \beta^\nu} (\bar{\varphi}\varphi)^{1/3} (\gamma\beta)\varphi, \tag{13}$$

для которой получаем общее решение

$$\varphi(\omega) = \exp[i\lambda\varkappa(\gamma\beta)\omega]\chi \equiv \left(\cos(\lambda\varkappa\beta\omega) + i\frac{\gamma\beta}{\beta} \sin(\lambda\varkappa\beta\omega)\right)\chi, \tag{14}$$

где $\beta = (\beta_\nu \beta^\nu)^{1/2}$, $\beta_\nu \beta^\nu > 0$, χ — постоянный спинор,

$$\bar{\chi}\chi = a = \text{const}, \qquad \varkappa = \frac{a^{1/3}}{\beta^\nu \beta_\nu}.$$

Итак, конформно инвариантное решение уравнения (1) с $k = 1/3$ имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{\gamma x}{(x_\nu x^\nu)^2} \exp\{i\lambda\varkappa(\gamma\beta)\omega\}\chi \equiv \\ &\equiv \frac{\gamma x}{(x_\nu x^\nu)^2} \left(\cos(\lambda\varkappa\beta\omega) + i\frac{\gamma\beta}{\beta} \sin(\lambda\varkappa\beta\omega)\right)\chi. \end{aligned} \tag{15}$$

Решение (15) аналитично по константе связи λ, в то время как недавно полученное с помощью анзатца Гейзенберга [4] решение Мерве [5] не обладает таким свойством. Кроме того, для функций (15)

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) = \frac{a}{(x_\nu x^\nu)^3}, \tag{16}$$

т.е быстро убывает при $x_\nu x^\nu \to \infty$.

Стоит также отметить, что в случае n пространственных переменных конформно инвариантное уравнение имеет вид

$$\left[i\gamma^\alpha\partial_\alpha - \lambda(\bar{\psi}(x)\psi(x))^{1/n}\right]\psi(x) = 0, \qquad \alpha = 0, 1, \ldots, n, \tag{17}$$

а его конформно инвариантное решение следующее:

$$\psi(x) = \frac{\gamma x}{(x_\alpha x^\alpha)^{(n+1)/2}} \exp\{i\lambda\varkappa(\gamma\beta)\omega\}\chi. \tag{18}$$

Здесь γ-матрицы имеют надлежащую структуру (см., например, [6]), $\omega = \frac{\beta^\alpha x_\alpha}{x_\nu x^\nu}$, $\varkappa = \frac{a^{1/n}}{\beta_\alpha\beta^\alpha}$, $\bar{\chi}\chi = a$, χ — постоянный спинор, β^α $(\alpha = 0, 1, \ldots, n)$ — произвольные постоянные, $\beta^\alpha\beta_\alpha > 0$.

Приведем теперь лоренц-инвариантное решение уравнения (1) с массой m, т.е. уравнения

$$\left[i\gamma\partial - m - \lambda(\bar{\psi}(x)\psi(x))^k\right]\psi(x) = 0, \tag{19}$$

полученное таким же способом, как и предыдущее решение, но с помощью оператора лоренцовских поворотов

$$Q_L = \theta_a J_{0a}, \qquad J_{0a} = x_0\partial_a + x_a\partial_0 - \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_a, \qquad a = 1, 2, 3, \tag{20}$$

θ_a — произвольные постоянные.

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\theta_3}{\theta}s_+ & -\frac{\theta_-}{\theta}s_- & -\frac{\theta_3}{\theta}\frac{1}{s_+} & \frac{\theta_-}{\theta}\frac{1}{s_-} \\ \frac{\theta_+}{\theta}s_+ & \frac{\theta_3}{\theta}s_- & -\frac{\theta_+}{\theta}\frac{1}{s_+} & -\frac{\theta_3}{\theta}\frac{1}{s_-} \\ s_+ & 0 & \frac{1}{s_+} & 0 \\ 0 & s_- & 0 & \frac{1}{s_-} \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\omega}}[F_0\cos(\alpha+\alpha_0) + iG_0\sin(\alpha+\alpha_0)] \\ \frac{1}{\sqrt{\omega}}[F_1\cos(\alpha+\alpha_1) + iG_1\sin(\alpha+\alpha_1)] \\ -[G_0\cos(\alpha+\alpha_0) + iF_0\sin(\alpha+\alpha_0)] \\ -[G_1\cos(\alpha+\alpha_1) + iF_1\sin(\alpha+\alpha_1)] \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$, α_0, α_1, F_0, F_1, G_0, G_1, $C = 4(F_0G_0 + F_1G_1)$ — произвольные постоянные;

$$\begin{aligned} &\theta_\pm = \theta_1 \pm i\theta_1, \qquad \theta = \left(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2\right)^{1/2}, \\ &s_\pm = (\theta x_0 \pm \vec{x}\cdot\vec{\theta})^{1/2}, \qquad \omega = (\theta x_0)^2 - (\vec{x}\cdot\vec{\theta})^2, \\ &\alpha = \frac{\lambda c^k}{\theta(k-1)}\omega^{(1-k)/2} - \frac{m}{\theta}\sqrt{\omega}, \qquad k \neq 1, \\ &\alpha = -\frac{\lambda c}{2\theta}\ln\omega - \frac{m}{\theta}\sqrt{\omega}, \qquad k = 1. \end{aligned} \tag{22}$$

Это решение также аналитично по константе связи λ и

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) = c/\sqrt{\omega}.$$

3. Кратко обсудим вопрос о генерировании новых решений уравнения (1) по известным решениям. Общий вид преобразований, порождаемых оператором Q (2), следующий:

$$x \to x' = f(x,\theta), \qquad \psi(x) \to \psi'(x') = R(x,\theta)\psi(x), \tag{23}$$

где $R(x,\theta)$ — матрица размерности 4×4, θ — параметр преобразований. Из того что множество решений уравнения (1) инвариантно относительно преобразований вида (23), следует:

$$\psi_{II}(x) = R^{-1}(x,\theta)\psi_I(x') \tag{24}$$

будет также решением этого уравнения, если $\psi_I(x)$ является решением.

Конформные преобразования, порождаемые оператором (6), имеют вид

$$\begin{aligned} &x'_\mu = \frac{x_\mu - c_\mu x^2}{\sigma(x)}, \qquad \sigma(x) = 1 - 2cx + c^2x^2, \\ &\psi'(x') = R_{\rm conf}\psi(x) = \sigma(x)(1 - \gamma c\gamma x)\psi(x), \\ &R_{\rm conf} = \sigma^{-2}(x)(1 - \gamma x\gamma c). \end{aligned} \tag{25}$$

Решение (21) при $k = 1/3$ и $m = 0$ можно использовать для получения другого решения уравнения (1) с нелинейностью Гюрши согласно формулам (24), (25). Аналогично следует поступать и в других случаях.

4. В заключение приведем пример скалярного нелинейного уравнения, на множестве решений которого реализуется нелинейное представление группы Ли.

Теорема. *Максимальная локальная группа инвариантности релятивистского уравнения Гамильтона–Якоби*

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x^\mu} = 1, \qquad \mu = 0,1,2,3, \tag{26}$$

есть 21-параметрическая группа Ли $C(1,4)$ конформных преобразований в 5-мерном пространстве Пуанкаре–Минковского $M(1,4)$.

Доказательство этой теоремы можно получить с помощью метода Ли [7].

Не выписывая всех преобразований инвариантности уравнения (26), приведем лишь наиболее интересные — чисто конформные:

$$\begin{aligned} x'_\mu &= \frac{x_\mu - c_\mu\left[x^2 - u^2(x)\right]}{1 - 2cx + 2c_4u(x) + (c^2 - c_4^2)\left(x^2 - u^2(x)\right)}, \\ u'(x') &= \frac{u(x) - c_4\left[x^2 - u^2(x)\right]}{1 - 2cx + 2c_4u(x) + (c^2 - c_4^2)\left(x^2 - u^2(x)\right)}, \\ \mu, \nu &= 0,1,2,3, \qquad x^2 \equiv x^\nu x_\nu, \qquad cx \equiv c^\nu x_\nu, \qquad c^2 \equiv c^\nu c_\nu. \end{aligned} \tag{27}$$

Формулы (27) также можно использовать для построения новых решений уравнения (23) по его известным решениям. Это следует из следующего факта: из того что уравнение (26) инвариантно относительно преобразований вида

$$\begin{aligned} & x_\mu \to x'_\mu = f_\mu(x, u(x), \theta), \\ & u(x) \to u'(x') = g(x, u(x), \theta), \end{aligned} \tag{28}$$

θ — параметры, вытекает, что если $u_I(x)$ — решение этого уравнения, то новое его решение $u_{II}(x)$ находится из функционального уравнения

$$g(x, u_{II}(x), \theta) = u_I(x' = f(x, u_{II}(x), \theta).$$

Приведем некоторые точные решения уравнения (26):

$$1)\ u(x) = f(\alpha^\nu x_\nu) + \beta^\nu x_\nu, \qquad \alpha^\nu\alpha_\nu = \alpha^\nu\beta_\nu = 0, \qquad \beta^\nu\beta_\nu = 1,$$

f — произвольная дифференцируемая функция;

$$2)\ u(x) = \pm\left[(\alpha_\nu x^\nu)^2 + x^\nu x_\nu\right]^{1/2}, \qquad \alpha_\nu a^\nu = -1;$$

$$3)\ u(x) = \pm\left[x_0^2 - (\alpha_a x_a)^2\right]^{1/2}, \qquad \alpha_a\alpha_a = 1, \quad a = 1,2,3;$$

$$4)\ u(x) = \pm\sqrt{x_\nu x^\nu},$$

α_ν, β_ν — произвольные постоянные, удовлетворяющие указанным условиям.

1. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., Введение в теорию квантованных полей, М., 1976.
2. Gürsey P., *Nuovo Cim.*, 1956, **3**, 988.
3. Фущич В.И., В кн. Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, 1981, 6–28.
4. Heisenberg W., *Z. Natur-forsch. A*, 1954, **9**, 292.
5. Merwe P.T., *Phys. Lett. B*, 1981, **106**, № 6, 485.
6. Boerner H., Representations of groups, North-Holland, 1970.
7. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., 1978.