О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики

В.И. ФУЩИЧ

Предложен способ построения точных решений многомерных нелинейных волновых уравнений. В явном виде построены семейства точных решений многомерных нелинейных уравнений Лиувилля, Дирака. Проведен теоретико-алгебраический анализ уравнений Навье–Стокса. Показано, что система уравнений Навье–Стокса описывает физическую систему с бесконечным набором спинов. Выведены нелинейные уравнения для описания тепломассопереноса, инвариантные относительно группы Галилея.

The method of construction of some exact solutions of multidimensional nonlinear wave equations is proposed. The families of exact solutions of multidimensional nonlinear Lioville's and Dirac equations are obtained. The algebraic-theoretical analysis of Navier–Stokes equation is performed. It is shown that the system of Navier–Stokes equations describes the physical system with infinite number of spins. The non-linear Galilei-invariant equation is derived for the description of heat and mass transport.

Введение. Принцип симметрии

Настоящая статья представляет собой, в основном, краткий обзор исследований по симметрийным свойствам и точным решениям некоторых многомерных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), которые широко встречается в математической физике. Ряд результатов публикуется впервые.

В современных исследованиях по математической и теоретической физике все возрастающую роль играют принципы симметрии. Это, прежде всего, связано с тем, что основные физические законы, уравнения движения, различные модели обладают явной или скрытой, геометрической или негеометрической, локальной [1, 2] или нелокальной [3–5] симметриями. Построение математического аппарата, способного выявить разнообразные виды симметрии, — одна из важных задач математической физики. Не менее важной является задача в определенном смысле обратная к только что сформулированной: по заданной группе или алгебре и их представлениям построить математические модели, обладающие заданной симметрией.

Для адекватного математического описания физических явлений естественно, как нам представляется, поставить идеи и принципы симметрии в основу науки о построении математических моделей [6]. Симметрийный принцип в такой науке должен играть роль правила отбора, выделяющего из множества допустимых математических моделей (уравнений) только такие, которые обладали бы соответствующими симметрийными свойствами. Этот принцип в явном или неявном виде

Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Институт математики АН УССР, 1983, С. 4–23.

используется при построении современных физических теорий, но, к сожалению, мало используется в классической математической физике.

В некоторых случаях требование инвариантности уравнений движения относительно той или иной группы приводит к тому, что среди множества математически допустимых уравнений заданными свойствами обладают только одно или несколько уравнений. Так, например, среди множества линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка для двух вектор-функций $\vec{E}(t,\vec{x}) = \{E_1, E_2, E_3\}$, $\vec{H}(t,\vec{x}) = \{H_1, H_2, H_3\}$ существует единственная система ДУЧП, инвариантная относительно группы Пуанкаре $P(1,3)$. Этой системой являются уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме (более подробно об этом см. [5]).

Аналогичным свойством обладает и система уравнений Дирака. Единственной (с точностью до преобразований эквивалентности) линейной системой четырех ДУЧП первого порядок, инвариантной относительно группы $P(1,3)$, является система Дирака (см. [5] и цитированную там литературу). Указанными свойствами обладают не только линейные уравнения движения, но и нелинейные ДУЧП. Примером нелинейного уравнения, обладающего широкой группой симметрии, является хорошо известная система уравнений Эйлера–Навье–Стокса (см. § 4). Следует подчеркнуть, что некоторые нелинейные ДУЧП обладают такими широкими группами симметрии, какими не обладают ни одно линейное ДУЧП. Примерами таких скалярных уравнений являются многомерное уравнение Монжа–Ампера [7] и эйкональное уравнение [8].

С чисто математической точки зрения важно знать максимальные (в некотором смысле) группы симметрии ДУЧП. Особенно ценную информацию дает знание нелинейных преобразований независимых и зависимых переменных, относительно которых инвариантно то или иное ДУЧП, поскольку это дает возможность по заданному одному (иногда тривиальному) решению построить (генерировать) целые семейства точных решений нелинейных ДУЧП.

Таким образом, классы нелинейных ДУЧП, обладающие богатыми симметрийными свойствами, представляются нам важными и интересными как в теоретическом, так и прикладом плане. В последующих параграфах эту точку зрения мы постараемся оправдать и реализовать на конкретных нелинейных ДУЧП.

§ 1. О точных решениях многомерного уравнения Лиувилля

Среди множества пуанкаре-инвариантных нелинейных волновых уравнений вида

$$p_\mu p^\mu u + F(u) = 0, \tag{1.1}$$

где

$$p_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad \mu = \overline{0,n},$$

$$u \equiv u(x), \qquad x = (x_0, x_1, \ldots, x_n), \qquad x_0 \equiv t,$$

F — произвольная дифференцируемая функция из пространства C^n, существует только два типа уравнений, инвариантных относительно расширенной группы Пуанкаре $\bar{P}(1,n)$. Группа $\bar{P}(1,n)$ — группа Пуанкаре, дополненная однопараметрической группой масштабных преобразований $D(1)$, т.е. $\bar{P}(1,n) = \{P(1,n), D(1)\}$.

Теорема 1 [8]. *Уравнение (1.1) инвариантно относительно группы $\bar{P}(1,n)$ только в случаях*

$$F = F_1 = \lambda_1 u^k \qquad \text{или} \qquad F = F_2 = \lambda_2 \exp u, \tag{1.2}$$

где λ_1, λ_2, $k \neq 1$ — произвольные вещественные параметры.

В этих случаях на множестве решений (1.1) реализуется следующие неэквивалентные представления алгебры Ли группы $\bar{P}(1,n)$:

$$P_\mu = ig^{\mu\nu} p_\nu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad D = x_\mu p^\mu - \frac{2i}{1-k}\frac{\partial}{\partial u} \quad \text{при } F = F_1, \tag{1.3}$$

$$P_\mu = ig^{\mu\nu} p_\nu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad D = x_\mu p^\mu - 2i\frac{\partial}{\partial u} \quad \text{при } F = F_2. \tag{1.4}$$

Следствие 1. Из теоремы 1 вытекает, что уравнение Лиувилля является единственным (в классе (1.1)) уравнением неполиномиального типа, инвариантным относительно группы $\bar{P}(1,n)$.

Замечание 1. Двумерное уравнение (1.1) при $F = F_1 = 0$ или $F = F_2 = \lambda_2 \exp u$ инвариантно относительно более широкой алгебры, чем алгебра Ли группы $\bar{P}(1,n)$. Можно доказать [9], что в этих и только в этих двух случаях двумерное уравнение (1.1) инвариантно относительно бесконечномерной алгебры $A_\infty \supset \bar{P}(1,n)$.

Замечание 2. Двумерное уравнение Лиувилля с помощью одной из нелокальных подстановок [10]

$$u = \ln\left[w_\xi w_\eta \left(1 - \tanh^2 \frac{c_1 - w}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

или

$$u = \ln\left[2w_\xi w_\eta/(w+c_2)^2\right], \quad w_\xi = \frac{\partial w}{\partial \xi}, \quad w_\eta = \frac{\partial w}{\partial \eta}, \tag{1.5}$$

$$u = \ln\left[w_\xi w_\eta \left(1 + \tanh^2 \frac{w + c_3}{\sqrt{2}}\right)\right], \quad \xi = x_0 + x_1, \quad \eta = x_0 - x_1,$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные, приводится к линейному волновому уравнению

$$\Box w = -p_\mu p^\mu w = 0. \tag{1.6}$$

Зная общее решение уравнения (1.6)

$$w = f_1(x_0 + x_1) + f_2(x_0 - x_1),$$

получаем решение двумерного нелинейного уравнения Лиувилля. Решение это представим в виде ($F = F_2 = \lambda_2 \exp u$)

$$u = \ln\left\{\frac{-8f_1'(\omega_1)f_2'(\omega_2)}{\lambda_2(f_1(\omega_1) + f_2(\omega_2))^2}\right\}, \tag{1.7}$$

где $\omega_1 = \alpha_\mu x^\mu$, $\omega_2 = \beta_\mu x^\mu$, параметры α_μ, β_μ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} &\alpha_\mu \alpha^\mu = \beta_\mu \beta^\mu = 0, \qquad \alpha_\mu \beta^\mu = 2, \\ &f_1' = \frac{\partial f_1}{\partial \omega_1}, \qquad f_2' = \frac{\partial f_2}{\partial \omega_2}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Решение (1.7) совпадает с лиувиллевским решением, если положить $\omega_1 = x_0+x_1$ $(\alpha_0 = \alpha_1 = 1)$, $\omega_2 = x_0-x_1$ $(\beta_0 = \beta_1 = 1)$. Представление решений двумерного уравнения (1.1) в виде (1.7) имеет важное, с точки зрения обобщения, преимущество по сравнению с лиувиллевским решением. Непосредственной проверкой можно убедиться, что множество функций вида (1.7) удовлетворяет n-мерному уравнению Лиувилля, если параметры удовлетворяют условиям типа (1.8).

Приведенное наблюдение подсказывает следующий способ построения частных решений многомерного уравнения по решениям двумерного (или трехмерного) уравнения:

1) представить (построить) решения двумерного (или трехмерного) уравнения в явно инвариантном виде, т.е. решения записать через всевозможные инвариантные переменные ω_1, ω_2 или, например,

$$\omega_3 = \alpha_{\mu\nu}x^\mu x^\nu, \qquad \omega_4 = \beta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu, \tag{1.9}$$

где $\alpha_{\mu\nu}$, $\beta_{\mu\nu}$ — параметры;

2) подставить явно инвариантные решения двумерного уравнения в многомерное нелинейное ДУЧП и найти условия на параметры α_μ, β_μ, $\alpha_{\mu\nu}$, $\beta_{\mu\nu}$, при которых "двумерные" решения типа (1.7) являются решениями многомерного уравнения. Этот способ построения решений многомерных уравнений по решениям двумерного и трехмерного уравнения широко использовался в [8] для уравнения Тейлора–Даламбера.

Очевидно, что многомерное уравнение Лиувилля помимо решений вида (1.7) имеет много других решений. Широкий класс решений многомерного уравнения Лиувилля, неэквивалентных (1.7), построен в [8].

§ 2. Решения нелинейного уравнения Дирака

Рассмотрим нелинейное уравнение Дирака

$$\left\{\gamma_\mu p^\mu - \lambda(\bar\Psi\Psi)^k\right\}\Psi = 0, \qquad \mu = \overline{0,3}, \tag{2.1}$$

γ_μ — матрицы Дирака, λ, k — произвольные постоянные, $\Psi = \Psi(x)$ — четырехкомпонентный спинор, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $\bar\Psi = \bar\Psi(x) = \Psi^\dagger\gamma_0$ — сопряженный по Дираку спинор. Уравнение (2.1) инвариантно относительно конформной группы $C(1,3) \supset P(1,3)$ только в том случае, когда $k = 1/3$ [11].

Решения уравнения ищем в виде [6]

$$\Psi = A(\tilde\omega_1)\varphi(\tilde\omega_2), \tag{2.2}$$

где $A(\tilde\omega_1)$ — функция, зависящая от матрицы $\tilde\omega_1$, матричные элементы которой зависят от x. Матрица $\tilde\omega_1$ выбирается таким образом, чтобы она била инвариантной относительно подгруппы конформной группы, например, относительно группы Лоренца. Требование лоренц-инвариантности может быть записано в виде

$$[\tilde\omega_1, J_{\mu\nu}] = 0, \qquad J_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}, \tag{2.3}$$

$$M_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \qquad S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu), \tag{2.4}$$

$\varphi(\tilde\omega_2)$ — четырехкомпонентный спинор, $\tilde\omega_2$ — скалярная инвариантная переменная типа (1.8), для которой по определению выполняется

$$[\tilde\omega_2, M_{\mu\nu}] = 0. \tag{2.5}$$

Формуле (2.2) можно дать простую физическую интерпретацию: решение уравнения (2.1) представляет собой волну с “амплитудой” $A(\tilde{\omega}_1)$ и “фазой” $\varphi(\tilde{\omega}_2)$. Подставив (2.2) в (2.1) получим уравнение для $A(\tilde{\omega}_1)$ и $\varphi(\tilde{\omega}_2)$. При некотором специальном виде амплитуды $A(\tilde{\omega}_1)$ для $\varphi(\tilde{\omega}_2)$ получим систему обыкновенных ДУ относительно переменной $\tilde{\omega}_2$. Можно, конечно, задать явный вид фазы $\varphi(\tilde{\omega}_2)$, а амплитуду искать в виде

$$A(\tilde{\omega}_1) = \gamma_\mu x^\mu f(\tilde{\omega}_3), \tag{2.6}$$

$f(\tilde{\omega}_3)$ — произвольная функция скалярного инварианта $\tilde{\omega}_3$.

Воспользуемся теперь анзатцем (2.1) для отыскания конформно-инвариантных решений уравнения (2.1). Следуя [12, 13], выбираем амплитуду в виде

$$A(\tilde{\omega}_1) = \frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_1^4}, \qquad \tilde{\omega}_1 = \gamma_\mu x^\mu, \qquad \tilde{\omega}_1^4 = (x_\mu x^\mu)^2. \tag{2.7}$$

В качестве скалярного инварианта $\tilde{\omega}_2$ выберем инвариант конформных преобразований

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{\beta_\mu x^\mu}{x_\nu x^\nu} \equiv \omega, \qquad x_\nu x^\nu \neq 0. \tag{2.8}$$

Формула (2.2) принимает вид

$$\Psi(x) = \frac{\gamma_\mu x^\mu}{(x_\nu x^\nu)^2}\varphi(\omega). \tag{2.9}$$

Подстановка (2.9) в (2.1) приводит к системе обыкновенных ДУ для $\varphi(\omega)$

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = i\frac{\lambda}{\beta_\nu\beta^\nu}(\bar{\varphi}\varphi)^{1/3}(\gamma_\alpha\beta^\alpha)\varphi. \tag{2.10}$$

Общее решение уравнения (2.10) имеет вид [12]

$$\varphi(\omega) = \exp\{i\lambda k(\gamma_\alpha\beta^\alpha)\omega\}\,\chi, \qquad k = 1/3, \tag{2.11}$$

χ — постоянный спинор.

Таким образом, получили четырехпараметрическое семейство точных решений уравнения (2.1) ($k = 1/3$) в форме

$$\Psi(x) = \frac{\gamma_\alpha x^\alpha}{(x_\nu x^\nu)^2}\exp\{i\lambda k(\gamma_\alpha\beta^\alpha)\omega\}\,\chi, \qquad \beta_\nu\beta^\nu > 0. \tag{2.12}$$

§ 3. Какие уравнения описывают нелинейную теплопроводность?

Процессы тепломассопереноса описывают линейным или нелинейным уравнением вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{c(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\} + F(u), \qquad i = 1, 2, 3, \tag{3.1}$$

$u = u(t, x_1, x_2, x_3)$, $c(u) > 0$, $F(u)$ — произвольная дифференцируемая функция.

Групповые свойства одномерного линейного уравнения (3.1) ($c(u) = \lambda_1$, $F(u) = \lambda_2 u$, $\lambda_1, \lambda_2 = \mathrm{const}$) полностью изучил еще С. Ли. Для нас важно подчеркнуть„

что в трехмерном случае линейное уравнение (3.1) инвариантно относительно 10-параметрической группы Галилея $G(1,3)$ более подробно об этом см., например, [5, 14]).

Групповой анализ одномерного нелинейного уравнения (3.1) (в случае $F(u) = 0$) осуществил Л.В. Овсянников [2]. Методом С. Ли [2] можно изучить групповые свойства трехмерного уравнения (3.1). Такие исследования были проведены М.М. Серовой и Р.М. Чернигой. Результат их исследования таков: среди нелинейных уравнений вида (3.1) ($c(u) \neq \mathrm{const}$) не существует уравнений инвариантных относительно всей группы Галилея $G(1,3)$. Это означает, что *для нелинейного уравнения вида (3.1)* ($F = 0$)*, в отличие от линейного, не выполняется принцип относительности Галилея [6]*. Если функции c и F явным образом зависят от t, т.е. $c(u,t)$, $F(u,t)$, то уравнения вида (3.1) не будут инвариантны относительно всей группы $G(1,3)$, но могут быть инвариантны относительно преобразований Галилея. Для таких уравнений будет иметь место принцип Галилея. Поэтому представляется важной задача о построении классов нелинейных ДУЧП второго порядка

$$
\begin{gathered}
u_0 + F(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}) = 0, \\
\underset{1}{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \qquad \underset{2}{u} = (u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{nn}), \qquad u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}, \\
u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}, \qquad \mu, \nu = \overline{0, n}, \qquad u \equiv u(x_0 \equiv t, x_1, \ldots, x_n),
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

инвариантных относительно группы Галилея $G(1,n)$ и группы Шредингера $Sch(1,n) \supset G(1,n)$. Эта задача для случая $n \leq 3$ решена Серовой М.М. и автором. Решения ее приведем в виде следующих теорем.

Теорема 2. *Уравнение (3.2) инвариантно относительно группы $G(1,n)$ только в таких случаях:*

1. При $n = 1$

$$
F = \lambda_i u_i + \Phi_1(v_1), \qquad v_1 = \Delta u = u_{11}. \tag{3.3}
$$

2. При $n = 2$

$$
\begin{gathered}
F = \lambda u_i u_i + \Phi_2(v_1, v_2), \qquad v_1 = \Delta u = u_{11} + u_{22}, \\
v_2 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} = u_{11}u_{22} - u_{12}u_{12}.
\end{gathered}
\tag{3.4}
$$

3. При $n = 3$

$$
\begin{gathered}
F = \lambda u_i u_i + \Phi_3(v_1, v_2, v_3), \qquad v_1 = \Delta u, \\
v_2 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{11} & u_{13} \\ u_{13} & u_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{22} & u_{23} \\ u_{23} & u_{33} \end{vmatrix}, \\
v_3 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{12} & u_{22} & u_{23} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{vmatrix}.
\end{gathered}
\tag{3.5}
$$

Φ_1, Φ_2, Φ_3 — произвольные функции из пространства C^∞.

При доказательстве использована следующая реализация базисных элементов расширенной алгебры Ли группы $\bar{G}(1,n) = \{G(1,n), D(1)\}$:

$$
\begin{gathered}
P_0 = p_0, \qquad P_a = p_a, \qquad J_{ab} = M_{ab}, \qquad G_a = x_0 p_a - \frac{1}{2\lambda} x_a p_u, \\
p_u = i\frac{\partial}{\partial u}, \qquad a, b = \overline{1,n}, \qquad D = 2x_0 p_0 - x_a p_a.
\end{gathered} \tag{3.6}
$$

Если алгебру $\bar{G}(1,n)$ дополнить оператором A (соответствующим проективным преобразованиям), то получим алгебру Шредингера $Sch(1,n)$. В нашем случае

$$
A = x_0(x_0 p_0 - x_a p_a) + \frac{1}{4\lambda} x_i^2 p_u.
$$

Теорема 3. *Уравнение (3.2) инвариантно относительно группы $\bar{G}(1,n)$ $(n \leq 3)$ только в таких случаях:*

$$
\begin{aligned}
&\textit{При}\ \ n = 1, \qquad F = \lambda u_i u_i + \lambda_1 u_{11}. \\
&\textit{При}\ n = 2, \qquad F = \lambda u_i u_i + v_1 \Phi\left(\frac{v_2}{v_1^2}\right), \quad v_1 \neq 0. \\
&\textit{При}\ n = 3, \qquad F = \lambda u_i u_i + v_1 \Phi\left(\frac{v_2}{v_1^2}, \frac{v_3}{v_1^3}\right).
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Теорема 4. *Уравнение (3.2) инвариантно относительно группы Шредингера $Sch(1,n)$ $(n \leq 3)$ только в таких случаях:*

$$
\begin{aligned}
&\textit{При}\ \ n = 1, \qquad F = \lambda u_i u_i. \\
&\textit{При}\ \ n = 2, \qquad F = \lambda u_i u_i + \lambda_1 \left(v_1^2 - 4v_2\right)^{1/2}. \\
&\textit{При}\ \ n = 3, \qquad F = \lambda u_i u_i + \left(v_1^2 - 3v_2\right)^{1/2} \Phi(w), \\
&w = \frac{2v_1^3 - 9v_1 v_2 + 27 v_3}{\left(v_1^2 - 3v_2\right)^{3/2}}, \qquad v_1^2 \neq 3v_2, \quad v_1 \neq 0, \quad v_2 \neq 0.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

Для всех приведенных уравнений вида (3.2), инвариантных относительно групп $G(1,n) \subset \bar{G}(1,n) \subset Sch(1,n)$, выполняется принцип относительности Галилея и справедливы законы сохранения энергии, импульса и момента количества движения. Среди множества уравнений (3.2) с нелинейностями (3.5) имеется, в частности, уравнение (при $\Phi_3 = \sqrt{v_1}$, $v_2 = v_3 = 0$)

$$
u_0 + \lambda u_i u_i + \lambda_1 \sqrt{(\Delta u)^2} = 0. \tag{3.9}
$$

Это уравнение эквивалентно стандартному линейному уравнению теплопроводности $v_0 + \lambda_1 \Delta v = 0$, $v = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \exp \frac{\lambda}{\lambda_1} u$.

Для найденных нелинейных уравнений можно ставить те же задачи, что и для линейного уравнения теплопроводности. Конечно, начальные или граничные условия будут, как и в линейном случае, нарушать галилеевскую симметрию.

§ 4. Какой спин несет поле Навье–Стокса?

1. Для наших целей достаточно рассмотреть простейший вариант системы типа Навье–Стокса

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\lambda_1 u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\lambda_2\Delta u_i=0,\qquad i,k=1,2,3, \tag{4.1}$$

и уравнение непрерывности

$$\operatorname{div}\vec{u}=\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0. \tag{4.2}$$

Тот факт, что система уравнений (4.1), (4.2) инвариантна относительно расширенной группы $\bar{G}(1,3)$, известен давно (см., например, [15]). Сравнительно недавно [16, 17, 2] доказано, что $\bar{G}(1,3)$ является максимальной (в смысле С. Ли) группой инвариантности (МГИ) системы (4.1), (4.2). Базисные элементы 11-мерной алгебры инвариантности (АИ) уравнений (4.1), (4.2) имеют вид (при $\lambda_1=1$)

$$P^{\mathrm{I}}_\mu=\partial_\mu=\frac{\partial}{\partial x_\mu},\qquad \partial_0=\frac{\partial}{\partial t},\qquad \mu=\overline{0,3}, \tag{4.3}$$

$$J^{\mathrm{I}}_{ab}=M^{\mathrm{I}}_{ab}+S^{\mathrm{I}}_{ab},\qquad M^{\mathrm{I}}_{ab}=x_a\partial_b-x_b\partial_a,\quad a,b=\overline{1,3}, \tag{4.4}$$

$$G^{\mathrm{I}}_a=t\partial_a-\frac{\partial}{\partial u_a}, \tag{4.5}$$

$$D^{\mathrm{I}}=2t\partial_0+x_a\partial_a-u_a\frac{\partial}{\partial u_a}, \tag{4.6}$$

где

$$S^{\mathrm{I}}_{ab}=u_a\frac{\partial}{\partial u_b}-u_b\frac{\partial}{\partial u_a}. \tag{4.7}$$

Провести теоретико-алгебраический анализ уравнений означает [4, 18]: 1) найти алгебру инвариантности (АИ); 2) построить по АИ группу инвариантности ДУ; 3) установить, какое именно представление реализуют базисные операторы АИ. В соответствии с работами С. Ли и Л.В. Овсянникова провести групповой анализ ДУ означает решить только задачи 1), 2)*. Как нам кажется, уместно использовать словосочетание “теоретико-алгебраический анализ уравнения” в том случае, когда решаются все три задачи.

Важность решения третьей задачи теоретико-алгебраического анализа ДУ представляется нам очевидней. Действительно, если, например, провести только групповой анализ уравнения Дирака (т.е. решить задачи 1), 2)), то мы не получим существенной информации о спиновой структуре этого уравнения, т.е. не будем знать, что система Дирака описывает частицу и античастицу со спином 1/2. Последняя информация является следствием того, что на множестве решений уравнения Дирака реализуется прямая сумма двух неприводимых представлений алгебры Пуанкаре $P(1,3)$ со спином $s=1/2$ (более подробно об этом см., например, работу [5]). Алгебра $P(1,3)$ является алгеброй инвариантности уравнения Дирака.

*Во времена С. Ли третья задача не могла и ставиться, поскольку только в 30–50-е годы нашего столетия построена теория представлений групп и алгебр Ли.

2. Рассмотрим линейную систему типа (4.1), (4.2) (положив $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \Delta u_i = 0, \tag{4.8}$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0. \tag{4.9}$$

В матричной записи систему (4.8), (4.9) можно представить в виде

$$L_0\Psi = 0, \qquad L_0 = (\partial_t - \Delta)I_3, \tag{4.10}$$

$$L_1\Psi = 0, \qquad L_1 = \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

Ψ — вектор-функция с компонентами (u_1, u_2, u_3), I_3 — единичная матрица 3×3.

Базисные элементы максимальной алгебры инвариантности системы (4.8), (4.9) выглядят как

$$P_\mu^{\mathrm{II}} = \partial_\mu, \qquad D_1^{\mathrm{II}} = 2x_0\partial_0 - x_a\partial_a, \qquad D_2^{\mathrm{II}} = u_a\frac{\partial}{\partial u_a}, \tag{4.12}$$

$$J_{ab}^{\mathrm{II}} = J_{ab}^{\mathrm{I}} = M_{ab}^{\mathrm{I}} + S_{ab}^{\mathrm{I}}. \tag{4.13}$$

На множестве решений уравнений (4.10), (4.11) операторы (4.12), (4.13) можно представить в виде

$$P_\mu^{\mathrm{II}} = \partial_\mu, \qquad D_1^{\mathrm{II}} = 2x_0\partial_0 - x_a\partial_a, \qquad D_2^{\mathrm{II}} = I_3, \tag{4.14}$$

$$J_{ab}^{\mathrm{II}} = M_{ab}^{\mathrm{I}} + S_{ab}^{\mathrm{II}}, \tag{4.15}$$

где 3×3 матрицы $S_{ab}^{\mathrm{II}} = S_{ab}$ реализуют векторное представление алгебры Ли группы вращений $SO(3)$, т.е.

$$\begin{gathered} S_{12} = S_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_{23} = S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ S_{31} = S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{4.16}$$

Легко подсчитать, что квадрат спинового оператора

$$-\left(S_{ab}^{\mathrm{II}}\right)^2\Psi = -\left(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2\right)\Psi = s(s+1)I_3\Psi = 2\Psi. \tag{4.17}$$

Проведенный анализ представлений (4.14), (4.15) показывает, что система ДУ (4.8) (4.9) списывает физическую систему со спином $s = 1$.

Замечание 1. Важно подчеркнуть, что линейная система Навье–Стокса (4.6), (4.9), в отличие от нелинейной, не инвариантна относительно преобразований Галилея, т.е. для нее не выполняется основной принцип механики — принцип относительности Галилея. Это обстоятельство как нам кажется, ставит под сомнение правомерность использования линеаризованной системы Навье–Стокса для описания реальных гидродинамических систем.

Замечание 2. Максимальной АИ системы (4.8), без условия (4.9), является 22-мерная алгебра с базисными операторами

$$P_\mu^{\rm III} = \partial_\mu, \qquad J_{ab}^{\rm III} = x_a\partial_b - x_b p_a, \tag{4.18}$$

$$G_a^{\rm III} = 2x_0\partial_a + x_a u_b\frac{\partial}{\partial u_b}, \tag{4.19}$$

$$D^{\rm III} = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a + u_a\frac{\partial}{\partial u_a}, \qquad A^{\rm III} = x_0\left(x_\mu\partial_\mu - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}x_a x_a u_b\frac{\partial}{\partial u_b}, \tag{4.20}$$

$$S_{ab}^{\rm III} = u_a\frac{\partial}{\partial u_b}. \tag{4.21}$$

Это означает, что группой инвариантности системы (4.8) является группа $Sch(1,3)\otimes GL(3)$.

Замечание 3. Система (4.8), (4.9), помимо локальной группы инвариантности, порождаемой операторами (4.12), (4.13), обладает нелокальной симметрией $SU(2)$. Доказательство этого утверждения проводится с помощью метода [3–5]. По трем базисным операторам алгебры Ли группы $SU(2)$ можно построить новые законы сохранения для системы (4.8), (4.9).

Замечание 4. Нелинейная система ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u^k\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0, \tag{4.22}$$

$$\operatorname{div}\vec{u} = 0 \tag{4.23}$$

инвариантна относительно группы $\bar{G}(1,3)$. Максимальной АИ системы (4.22), (4.23) является алгебра Ли группы $IGL(4,R)\supset P(1,3)$. Базисные элементы этой алгебры имеют вид

$$\begin{gathered} P_\mu = \partial_\mu, \qquad J_{ab} = J_{ab}^{\rm I}, \qquad J_{0a} = x_a\partial_0 - u_a u_b\frac{\partial}{\partial u_b}, \\ G_a = x_0\partial_a - \frac{\partial}{\partial u_a}, \qquad D_0 = x_0\partial_0 - u_b\frac{\partial}{\partial u_b}, \qquad D_a = x_a\partial_a + u_a\frac{\partial}{\partial u_a}. \end{gathered} \tag{4.24}$$

Из явного вида операторов (4.24) следует, что система уравнений Эйлера (4.22), (4.23) инвариантна как относительно преобразований Галилея, так и относительно преобразований Лоренца. Таким образом, система (4.22), (4.23) является примером уравнений, для которых выполняется как принцип относительности Галилея, так и принцип относительности Пуанкаре–Эйнштейна.

Замечание 5. Уравнение неразрывности (4.2) инвариантно относительно бесконечной алгебры.

3. Чтобы ответить на вопрос, вынесенный в заглавие, достаточно провести сравнительный анализ операторов (4.12), (4.13) и (4.3)–(4.7). Совокупность всех операторов (4.3)–(4.7), в отличие от операторов (4.12), (4.13), не может быть определена в пространстве вектор-функций $\{\Psi(t,x) =$ столбец $(u_1(t,\vec{x}), u_2(t,\vec{x}), u_3(t,\vec{x})\}$, поскольку G_a^{I} выражается через оператор сдвига $\frac{\partial}{\partial u_a}$. Оператор $\frac{\partial}{\partial u_a}$ является неограниченным оператором, поэтому его невозможно представить матрицей конечного порядка.

В силу этого действие всех операторов (4.3)–(4.7) можно задать только в пространстве функций $\{\chi = \chi(t, x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3)\}$, зависящих от семи переменных. Это главное отличие операторов (4.3)–(4.7) от операторов (4.12), (4.13). Конечно, операторы (4.12), (4.13) можно задать в пространстве $\{\chi\}$. При этом пространство $\{\chi\}$ будет приводимо относительно операторов (4.12), (4.13).

Из приведенного следует, что квадрат оператора спина

$$\left(S_{ab}^{\mathrm{I}}\right)^2 = \left(S_{12}^{\mathrm{I}}\right)^2 + \left(S_{23}^{\mathrm{I}}\right)^2 + \left(S_{31}^{\mathrm{I}}\right)^2 \tag{4.25}$$

в пространстве $\{\chi(t,\vec{x},\vec{u})\}$ не равен 2, но принимает бесконечно много различных значений.

Подведем итог. Поле Навье–Стокса (уравнения (4.1), (4.2)) и поле Эйлера (уравнения (4.22), (4.23)) несут всевозможные целочисленные спины $s = 0, 1, 2, \ldots$ Этот результат принципиально отличен от того, что мы знаем о нелинейном уравнении Дирака (2.1) или о нелинейном уравнении для векторного поля, или о полях Янга–Милса, где спин принимает либо одно, либо конечное количество различных значений.

В заключение этого параграфа приведем пример релятивистской алгебры (содержащей в качеств подалгебры алгебру $P(1,3)$) операторов, которые приводят также к бесконечному набору целых спинов. Совокупность таких операторов выглядит как

$$\begin{gathered} P_\mu = \partial_\mu, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu + S_{\mu\nu}, \qquad R_\mu = \frac{\partial}{\partial u_\mu}, \\ G_{\mu\nu}^{\pm} = x_\mu \frac{\partial}{\partial u_\nu} \pm u_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \qquad S_{\mu\nu} = u_\mu \frac{\partial}{\partial u_\nu} - u_\nu \frac{\partial}{\partial u_\mu}. \end{gathered} \tag{4.26}$$

Часть операторов (4.26) инвариантна относительно замены зависимых $(u(x))$ и независимых переменных (x): $x_\mu \to u_\mu$, $u_\mu \to x_\mu$.

§ 5. О некоторых нерешенных задачах

В этом параграфе укажем несколько задач, которые представляются автору важными для развития и применения теоретико-алгебраических методов.

1. Описать нелинейные системы ДУЧП второго порядка для вектор-функции $\Psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, инвариантные относительно групп, содержащих в качестве подгрупп группу Галилея $G(1,n)$ и группу Пуанкаре $P(1,n)$.

Нетривиальным примером системы ДУЧП, инвариантной как относительно группы $G(1,3)$, так и относительно $P(1,3)$, является система уравнений Эйлера (4.22), (4.23).

Построить класс систем ДУЧП, инвариантных относительно групп $P(1,n+m)$, $C(1,n+m)$, m — число компонент у вектор-функции $\Psi(t,x) = \{\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m\}$.

Примером таких уравнений являются скалярные уравнения эйконала, Монжа–Ампера, инвариантные относительно группы $C(1,n+1)$.

2. Провести групповую классификацию системы уравнений

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v_i}{\partial t}+\lambda_1 v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\lambda_2 S_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\lambda_3\Delta v_i+F_i\left(v_k,S_k,\frac{\partial v_k}{\partial x_l},\frac{\partial S_n}{\partial x_l}\right)=0,\\&\frac{\partial S_i}{\partial t}+\mu_1 S_k\frac{\partial S_i}{\partial x_k}+\mu_2 v_k\frac{\partial S_i}{\partial x_k}+\mu_3\Delta S_i+\tilde{F}_i\left(v_k,S_k,\frac{\partial v_k}{\partial x_l},\frac{\partial S_n}{\partial x_l}\right)=0,\end{aligned}\tag{5.1}$$

где $i,k,l,n=\overline{1,3}$, v_i — скорость жидкости, S_i — внутренний момент количества движения жидкости, F_i, $\tilde{F}_i$ — произвольные функции, λ_i, μ_i — произвольные постоянные.

Известные в литературе уравнения движения жидкости с внутренним моментом [21, 22], как показано в [23], не инвариантны ни относительно $G(1,3)$, ни относительно $P(1,3)$.

3. Описать уравнения вида

$$\begin{aligned}&a_1\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a}\right)\frac{\partial u}{\partial t}+a_2\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\\&\qquad+a_3\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a}\right)\Delta u+F\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a}\right)=0,\end{aligned}\tag{5.2}$$

инвариантные относительно групп $Sch(1,3)$, $Sch(1,4)$, $G(1,3)$, $G(1,4)$, $P(1,3)$, $P(1,4)$, $C(1,3)$, $C(1,4)$ и их подгрупп.

Уравнения (5.2), инвариантные относительно группы $P(1,3)$ или ее подгруппы $O(1,3)$, могут быть использованы, в частности, для описания процессов теплообмена с конечной скоростью распространения ($a_2\neq 0$, $a_3\neq 0$).

4. Провести групповой анализ и построить семейство частных решений уравнений

$$\sum_{n=0}^{N}\lambda_n S^n u+F\left(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a}\right)=0,\tag{5.3}$$

$$\{\exp\mu S\}u=u+\frac{\mu}{1!}Su+\frac{\mu^2}{2!}S^2u+\cdots=0,\tag{5.4}$$

$$S^n=\underbrace{S\cdot S\cdots S}_{n},\qquad S=\frac{\partial}{\partial t}-\lambda\Delta,\tag{5.5}$$

μ, λ, λ_n, N — постоянные.

Уравнение (5.4) является линейным интегральным уравнением. Уравнение (5.3) (в частности, при $F=0$) и (5.4) инвариантны относительно группы Галилея $G(1,3)$, поэтому можно предполагать, что они могут быть использованы для описания тепловых и диффузионных процессов. Уравнение (5.3) совпадает со стандартным уравнением теплопроводности, если положить в (5.3) $\lambda_0=0$, $\lambda_1=1$, $\lambda_n=0$ для $n>1$ и $F=0$.

5. Провести групповую классификацию уравнений

$$\Delta u=F\left(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a}\right).\tag{5.6}$$

Построить классы точных решений для тех уравнений вида (5.6), которые инвариантны относительно нетривиальной бесконечномерной алгебры.

6. Исследовать групповые свойства и построить семейства частных решений уравнения четвертого порядка

$$\det|u_{ik}| + \lambda_1 \det|u_{ikl}| + \lambda_2 \det|u_{iklm}| = F(u),$$
$$u_{ik} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}, \qquad u_{ikl} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}, \qquad u_{iklm} = \frac{\partial^4 u}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l \partial x_m}, \tag{5.7}$$

$|u_{ik}|$ — плоская матрица, $|u_{ikl}|$ — пространственная матрица, $|u_{iklm}|$ — матрица в четырехмерном пространстве.

Полагая в (5.7) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $F = 0$, получаем многомерное уравнение Монжа–Ампера. В этом случае уравнение (5.7) инвариантно относительно группы $C(n+1)$ [7].

7. Описать уравнения вида

$$\gamma_\mu p^\mu \Psi + F_1(\bar{\Psi}\Psi, \varphi)\Psi + F_2(\overline{\gamma_\mu p^\mu \Psi}, \gamma_\alpha p^\alpha \Psi, \bar{\Psi}\Psi)\Psi = 0,$$
$$p_\mu p^\mu \varphi + F_3\left(\bar{\Psi}\Psi, \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)\varphi = 0, \tag{5.8}$$

инвариантные относительно конформной группы $C(1,3)$. Построить семейства частных решений. Система (5.8) описывает взаимодействие спинорного поля Ψ со скалярным полем φ.

8. Провести теоретико-алгебраический анализ пуанкаре-инвариантной системы

$$\lambda_1 v_{\mu\nu\rho} v^{\mu\nu\rho}\Psi + \lambda_2 (v_{\mu\nu\rho}\Psi)^\dagger (v^{\mu\nu\rho}\Psi) = F(\Psi^\dagger\Psi)\Psi, \tag{5.9}$$

$$v_{\mu\nu\rho} = P_\mu J_{\nu\rho} + P_\nu J_{\rho\mu} + P_\rho J_{\mu\nu}, \qquad P_\mu = p_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \tag{5.10}$$

$$J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \tag{5.11}$$

$S_{\mu\nu}$ — матрицы, реализующие представление $D(m,n) \oplus D(n,m)$ алгебры Ли группы Лоренца $O(1,3)$. Ψ — вектор-столбец, размерность которого зависит от размерностей матриц $S_{\mu\nu}$,

$$\gamma_\mu p^\mu \Psi + \lambda \Psi_\mu \frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu} = 0, \qquad \Psi_\mu = \bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi,$$

Ψ — четырехкомпонентный спинор.

9. Провести теоретико-алгебраический анализ галилеевски-инвариантной системы

$$\lambda_1 W_a W_a \Psi + \lambda_2 (W_a\Psi)^\dagger (W_a\Psi)\Psi = F(\Psi^\dagger\Psi)\Psi, \tag{5.12}$$

$$W_a = mJ_a - \varepsilon_{abc}P_b G_c, \qquad J_a = \varepsilon_{abc}J_{bc},$$
$$J_{bc} = x_b p_c - x_c p_b + S_{ab}, \qquad G_a = tp_a - mx_a + \eta_a, \tag{5.13}$$

S_{ab} — матрицы, реализующие представление алгебры группы $O(3)$, η_a — матрицы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям [14]

$$[\eta_a, \eta_b] = 0, \qquad [\eta_a, S_b] = i\varepsilon_{abc}\eta_c.$$

10. Провести теоретико-алгебраический анализ релятивистских уравнений движений во внешних электромагнитных полях

$$(\pi_\mu \pi^\mu + \lambda F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})\, u(x) = 0, \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned} &(\gamma_\mu \pi^\mu + \lambda_1 S_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \lambda_2 p_\mu p^\mu \gamma_\nu A^\nu)\, \Psi = 0, \\ &\pi_\mu = p_\mu - eA_\mu, \qquad S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu). \end{aligned} \tag{5.15}$$

11. Описать системы обыкновенных ДУ

$$\ddot{x}_i = F_i(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{5.16}$$

инвариантные относительно следующих групп (или их подгрупп) преобразований:

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu + b_\mu, \qquad \mu, \nu = \overline{0, n}, \quad x_0 \equiv t,$$

$$x'_\mu = \frac{x_\mu}{1 + c_\mu x^\mu}, \qquad c_\mu x^\mu \neq -1,$$

$$x'_\mu = \frac{c_{\mu\nu} x^\nu}{d_\alpha x^\alpha}, \qquad d_\alpha x^\alpha \neq 0,$$

$$x'_\mu = \frac{x_\mu + c_\mu x_\nu x^\nu}{1 + 2c_\nu x^\nu + c_\nu c^\nu x_\nu x^\nu}.$$

Используя симметрийные свойства уравнений (5.16), построить первые интегралы системы (5.16).

12. Описать системы обыкновенных ДУ

$$\ddot{x}_i = F_i(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}), \qquad i = \overline{1, 3}, \tag{5.17}$$

обладающие интегралом движения Лапласа–Рунге–Ленца.

1. Lie S., Über die Integration durch bestimente Integrale von einer Klasse lineare partiellen Differentialgleichungen, *Arch. Math.*, 1881, **6**, 328–368.
2. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
3. Фущич В.И., О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения, *Теор. и мат. физика*, 1971, **7**, № 1, 3–12.
4. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики, *ДАН СССР*, 1979, **246**, № 4, 846–850.
5. Фущич В.И.. Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.
6. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в кн. Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
7. Фущич В.И., Серов Н.И., Симметрия и точные решения многомерного уравнения Монжа–Ампера, *ДАН СССР*, 1983, **273**, № 3, 24–64.
8. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solution of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alambert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, № 15, 3645–3656.
9. Шульга М.В., О двумерных нелинейных волновых уравнениях, инвариантных относительно некоторых алгебр Ли, в кн. Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 84–86.
10. Фущич В.И., Тычинин В.А., О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований, Препринт 82.33, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1982, 49 с.

11. Gürsey F., On a conform-invariant spinor wave equation, *Nuovo Cimento*, 1956, **3**, № 10, 988–1006.
12. Fushchych W.I., Shtelen W.M., On some exact solutions of the nonlinear Dirac equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, № 2, 271–277.
13. Фущич В.И., Штелень В.М., Об инвариантных решениях нелинейного уравнения Дирака, *ДАН СССР*, 1983, **269**, № 1, 88–92.
14. Фущич В.И., Никитин А.Г., Нерелятивистские уравнения движения для частиц с произвольных спином, *Физика элементарных частиц и атомного ядра*, 1981, **12**, вып. 3, 1157–1219.
15. Биркгоф Г., Гидродинамика, М., Изд-во иностр. лит., 1954, 183 с.
16. Пухначев Вл.В., Групповые свойства уравнений Навье–Стокса в плоском случае, *Журн. прикл. мех. и техн. физ.*, 1960, № 1, 83–90.
17. Данилов Ю.А., Групповые свойства уравнений Максвелла и Навье–Стокса, Препринт Ин-та атом. энергии им. И.В. Курчатова, 1967, 15 с.
18. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных, в кн. Теоретико-групповые методы в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1978, 5–44.
19. Ибрагимов Н.Х., Группы преобразований в математической физике, М., Наука, 1963, 260 с.
20. Anderson R.L., Ibragimov N.H., Lie-Bäcklund transformations in applications, Philadelphis, 1979, 150 p.
21. Сорокин В.С., О внутреннем трении жидкостей н газов, обладающих скрытым моментом импульса, *Журн. эл. техн. физики*, 1943, **13**, 306–314.
22. Шлиомис М.И., Динамика жидких парамагнетиков, Пермь: Пермский госуниверситет, 1983, 68 с.
23. Славуцкий С.Л., Групповые свойства некоторых уравнений гидро-газодинамики, в кн. Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 71–74.
24. Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р.,* Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях, *Диф. ур-ния*, 1983, **19**, № 7, 1215–1224.

*В только что вышедшей статье, с которой автор познакомился после сдачи работы в печать, проведена подробная классификация уравнения (3.1) в двумерном и трехмерном случаях.