О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований

В.И. ФУЩИЧ, В.А. ТЫЧИНИН

С помощью нелокальных преобразований линеаризованы многие, широко встречающиеся в прикладных вопросах, нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных. В явном виде построены такие преобразования для уравнений Лиувилля, Монжа–Ампера, Плато и других. Это позволило найти точные решения нелинейных уравнений. В основном рассмотрены нелинейные уравнения, зависящие от двух независимых переменных. Исследованы групповые свойства нелинейных дифференциальных уравнений. Большинство из рассмотренных уравнений допускают бесконечную группу.

В данной работе показано, что многочисленные нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных от двух независимых переменных, для которых в известных книгах Форсайта [1] и Эймса [2] получены частные и общие решения, с помощью нелокальных преобразований приводятся к линейным уравнениям. Установлено, что большинство из этих уравнений инвариантны относительно бесконечных групп. Видимо, этот факт является причиной того, что для таких уравнений построены общие решения. Найдена максимальная группа инвариантности уравнения для минимальной поверхности (уравнение Плато), которое при соответствующей замене сводится к уравнению Борна–Инфельда.

Рассмотрены многомерные нелинейные уравнения в частных производных, которые также допускают линеаризацию.

§ 1. Введение

В основе большинства методов построения точных решений линейных и нелинейных уравнений лежит одна из самых плодотворных и эффективных идей в теории дифференциальных уравнений — преобразование независимых и зависимых переменных, т.е. преобразований исходного дифференциального уравнения к простейшему виду. Чаще всего используются локальные преобразования независимых и зависимых переменных. Теория таких преобразований наиболее полно изучена в том случае, когда совокупность преобразований образует группу Ли.

Знание группы Ли, допускаемой тем или иным дифференциальным уравнением, дает способ отыскания эффективных замен. Так, например, если нелинейное волновое уравнение вида

$$\Box u = F\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{1.0.0}$$

инвариантно относительно конформной группы, то существует невырожденная локальная замена $w = \psi(u)$, приводящая (1.0.0) к линейному волновому уравнению [3]

$$\Box w = 0.$$

Препринт № 82.33, Киев, Институт математики АН УССР, 1982, 54 с.

Очевидно, что, зная решения последнего уравнения и явный вид замены, мы находим решения исходного нелинейного уравнения. На этой идее и построено наше дальнейшее исследование. При этом рассматриваем, в основном, нелокальные замены вида

$$w = \psi\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_\mu}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}, \dots\right),$$

т.е. преобразования зависят от производных.

К нелокальным преобразованиям такого типа относятся преобразования Эйлера, Лежандра, Ли–Бэклунда, Коула–Хопфа, годографа, градиентные преобразования второго рода в электродинамике.

Замену независимых и зависимых переменных вида

$$\begin{aligned} x^{i'} &= \varepsilon^i(x, u^\alpha, \underset{1}{u}^\alpha, \dots, \underset{m}{u}^\alpha), \qquad \alpha = \overline{1,p}, \\ u^{\alpha'} &= \zeta^i(x, u^\alpha, \underset{1}{u}^\alpha, \dots, \underset{s}{u}^\alpha), \qquad i = \overline{1,N}, \end{aligned} \tag{1.1.0}$$

будем называть нелокальными преобразованиями порядка n.

Преобразование производных на многообразии в случае неособой замены переменных (1.1.0) осуществляется по формуле

$$\begin{aligned} u^{\alpha'}_{x^{i'}} = \Bigg[&\sum_j (\partial_{x^i}\zeta^\alpha)\cdot x^j_{x^{i'}} + \sum_\beta \sum_i (\partial_{u^\beta}\zeta^\alpha)\cdot u^\beta_{x^j}\cdot x^j_{x^{i'}} + \\ &+ \sum_\beta \sum_k \sum_i (\partial_{u^\beta_{x^k}}\zeta^\alpha)\cdot u^\beta_{x^k x^j}\cdot x^j_{x^{i'}} + \cdots \Bigg]\Bigg|_{\mathfrak{M}}. \end{aligned} \tag{1.2.0}$$

Производная берется на многообразии, по повторяющимся индексам выполняется суммирование. Оператор полного дифференцирования

$$D_j = \partial_{x^i} + \sum_\alpha u^\alpha_i \partial_{u^\alpha} + \sum_\alpha \sum_k u^\alpha_{ki}\partial_{u^\alpha_k} + \cdots$$

позволяет записать (1.2.0) иначе:

$$D_j\zeta^\alpha = u^{\alpha'}_{x^{i'}}\cdot D_j x^{i'}.$$

В случае одной зависимой u и двух независимых x и y переменных замена имеет вид

$$\begin{aligned} \xi &= x' = \varepsilon(x, y, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{m}{u}), \\ \eta &= y' = \varkappa(x, y, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{m}{u}), \\ z &= u' = \zeta(x, y, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{m}{u}). \end{aligned} \tag{1.3.0}$$

При этом следует решать систему двух линейных алгебраических уравнений (1.2.0)

$$D_x\zeta = u'_{x'}\cdot D_x\varepsilon + u'_{y'}\cdot D_x\varkappa, \qquad D_y\zeta = u'_{x'}\cdot D_y\varepsilon + u'_{y'}\cdot D_y\varkappa.$$

Если определитель системы δ не равен нулю, получим

$$\begin{aligned} u'_{x'} &= \frac{D_x\zeta D_y\varkappa - D_y\zeta D_x\varkappa}{D_x\varepsilon D_y\varkappa - D_y\varepsilon D_x\varkappa} \equiv \frac{H}{\delta}, \\ u'_{y'} &= \frac{D_y\zeta D_x\varepsilon - D_x\zeta D_y\varepsilon}{D_x\varepsilon D_y\varkappa - D_y\varepsilon D_x\varkappa} \equiv -\frac{K}{\delta}. \end{aligned} \tag{1.4.0}$$

Для производных второго порядка из (1.2.0) находим

$$D_{jk}\zeta^\alpha = u^{\alpha'}_{i'l'} \cdot D_k\varepsilon^l \cdot D_j\varepsilon^i + u^{\alpha'}_{i'} \cdot D_{jk}\varepsilon^i.$$

Решая систему трех линейных алгебраических уравнений относительно $u^{\alpha'}_{i'j'}$, с учетом (1.4.0) получаем

$$\begin{aligned} &\delta \cdot D_{xx}\zeta - H \cdot D_{xx}\varepsilon + K \cdot D_{xx}\varkappa \equiv P, \\ &\delta \cdot D_{yy}\zeta - H \cdot D_{yy}\varepsilon + K \cdot D_{yy}\varkappa \equiv Q, \\ &\delta \cdot D_{xy}\zeta - H \cdot D_{xy}\varepsilon + K \cdot D_{xy}\varkappa \equiv R, \\ &u'_{x'x'} = \left[P(D_y\varkappa)^2 + Q(D_x\varkappa)^2 - 2RD_x\varkappa D_y\varkappa\right]\delta^{-3}, \\ &u'_{x'y'} = \left[PD_y\varkappa D_y\varepsilon + QD_x\varkappa D_x\varepsilon - R_D[\varepsilon,\varkappa]^+_{x,y}\right]\delta^{-3}, \\ &u'_{y'y'} = \left[P(D_y\varepsilon)^2 + Q(D_x\varepsilon)^2 - 2RD_x\varepsilon D_y\varepsilon\right]\delta^{-3}, \\ &{}_D[\varepsilon,\varkappa]^+_{x,y} \equiv D_x\varepsilon D_y\varkappa + D_y\varepsilon D_x\varkappa. \end{aligned} \tag{1.5.0}$$

Наряду с (1.1.0) будем рассматривать нелокальные преобразования, содержащие функцией (1.3.0) под знаком неопределенного интеграла. Считаем при этом справедливым внесение оператора дифференцирования под знак интеграла.

Уравнение $F(u') = 0$ будем называть приводимым нелокальным преобразованием T к уравнению $L(u) = 0$, если существует нетривиальное решение системы определяющих уравнений, полученных из соотношений

$$T_1 L(u')\Big|_{{}_D\mathfrak{M}^F} \equiv 0, \tag{1.6.0}$$

$$T_2 F(u')\Big|_{{}_D\mathfrak{M}^L} \equiv 0. \tag{1.6$'$.0}$$

Многообразие ${}_D\mathfrak{M}^P$ в пространстве $(x, y, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{l}{u})$ может быть задано уравнением $P(u) = 0$, его дифференциальными следствиями и, возможно, некоторыми дополнительными условиями. Связь уравнений F и L может быть выражена при помощи операторов $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$ соотношениями

$$T_1 L(u') = \hat{P}_1 F(u), \tag{1.7.0}$$

или

$$T_2 F(u') = \hat{P}_2 L(u). \tag{1.7$'$.0}$$

Приведение уравнения F к линейному L назовем нелокальной линеаризацией уравнения F.

§ 2. Линеаризация и точные решения

Рассмотрим серию нелинейных уравнений [1, 2, 4] от двух независимых переменных. Для этих уравнений построим точные решения сведением их к линейным уравнениям наиболее простого вида. Преобразования переменных при этом оказываются либо нелокальными, либо точечными. Номер уравнения в скобках соответствует нумерации, принятой в [3].

1. Уравнение (№ 1) [1]:

$$F_1 \equiv z_{xy} + z z_x = 0. \tag{2.1.0}$$

Будем искать нелокальное преобразование, обеспечивающее приведение к уравнению $\mathfrak{M} : u_{xy} = 0$ по схеме:

$$T_1 F_1 \Big|_{D\mathfrak{M}} \equiv 0, \qquad T_1 :\ z = \zeta(u, u_y, u_{yy}).$$

Вычислим выражения производных на многообразии, подставим их в уравнение (2.1.0) и выполним расщепление по производным третьего порядка. Это даст уравнения:

$$\zeta_{u u_{yy}} = 0,$$

$$u_y \zeta_{uu} + \zeta \zeta_u + u_{yy} \zeta_{u u_y} = 0.$$

В силу первого уравнения ζ ищем в виде

$$\zeta = \varphi(u, u_y) + \psi(u_y, u_{yy}).$$

Второе уравнение теперь оказывается таким:

$$u_y \varphi_{uu} + \varphi \varphi_u + \psi \varphi_u + u_{yy} \varphi_{u u_y} = 0.$$

Здесь от u_{yy} зависят третье и четвертое слагаемые. Поэтому получим следующие два уравнения, определяющие φ и ψ:

$$\varphi_u \psi + u_{yy} \varphi_{u u_y} = -\lambda(u, u_y), \tag{2.1.1}$$

$$\varphi_{uu} u_y + \varphi \varphi_u = \lambda(u, u_y). \tag{2.1.2}$$

Из (2.1.1) следует, что

$$\frac{\lambda}{\varphi_u} = A_1(u_y), \qquad \frac{\varphi_{u u_y}}{\varphi_u} = A_2(u_y), \tag{2.1.3}$$

откуда

$$\begin{aligned} \varphi &= A_3(u_y)\Omega(u) \exp \int A_2(u_y)\, du_y + A_4(u_y), \\ \lambda &= A_1(u_y) A_3(u_y) \Omega'(u) \exp \int A_2(u_y)\, du_y. \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

В силу произвольности функций A_i, $i = \overline{1,4}$, можем выбрать φ и λ в виде

$$\begin{aligned} \varphi &= u_y \left[-2\alpha(u_y)\Omega(u) + \beta(u_y)\right], \\ \lambda &= -2u_y^2 \alpha(u_y) \beta(u_y) \Omega'(u). \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Здесь α и β — произвольные функции u_y. Подставив (2.1.5) в (2.1.2), получим обыкновенное дифференциальное уравнение о тносительно функции $\Omega(u)$:

$$\Omega' = \alpha\left(\Omega^2 + \gamma\right), \tag{2.1.6}$$

где $\gamma(u_y)$ — произвольная функция. Из (2.1.6) следует, что α, β, γ — постоянные. При интегрировании (2.1.6) возможны такие три случая:

1) $\gamma = -\frac{a^2}{\alpha^2} < 0$; при этом

$$\Omega = \frac{a}{\alpha}\,\mathrm{th}\,[-(au + c_1)], \tag{2.1.7}$$

$$\Omega = \frac{a}{\alpha}\,\mathrm{cth}\,[-(au + c_2)]; \tag{2.1.8}$$

2) $\gamma = 0$. В этом случае находим

$$\Omega = -(u + c_3)^{-1}\alpha; \tag{2.1.9}$$

3) $\gamma = \frac{b^2}{\alpha^2} > 0$ дает

$$\Omega = \frac{b}{\alpha}\,\mathrm{tg}\,(bu + c_4), \tag{2.1.10}$$

$$\Omega = -\frac{b}{\alpha}\,\mathrm{ctg}\,(bu + c_4). \tag{2.1.10$'$}$$

В формулах (2.1.7)–(2.1.10) a, b, c_i $(i = \overline{1,4})$ — произвольные постоянные. Тогда

$$\varphi = u_y\left[-2a\,\mathrm{th}\,[-(au + c_1)] + \beta\right], \qquad \lambda = \frac{-2u_y^2 a^2 \beta}{\mathrm{ch}^2[-(au + c_1)]}, \tag{2.1.11}$$

$$\varphi = u_y\left[-2a\,\mathrm{cth}\,[-(au + c_2)] + \beta\right], \qquad \lambda = \frac{2u_y^2 a^2 \beta}{\mathrm{sh}^2[-(au + c_2)]}, \tag{2.1.12}$$

$$\varphi = u_y\left[\frac{2}{u + c_3} + \beta\right], \qquad \lambda = \frac{-4u_y^2\beta}{u + c_3}, \tag{2.1.13}$$

$$\varphi = u_y\left[-2b\,\mathrm{tg}\,(bu + c_4) + \beta\right], \qquad \lambda = \frac{-2u_y^2 b^2 \beta}{\cos^2(bu + c_4)}, \tag{2.1.14}$$

$$\varphi = u_y\left[2b\,\mathrm{ctg}\,(bu + c_4) + \beta\right], \qquad \lambda = \frac{-2u_y^2 b^2 \beta}{\sin^2(bu + c_4)}. \tag{2.1.14$'$}$$

Из (2.1.1), учитывая (2.1.5), получим

$$\psi = -\beta u_y - u_{yy}u_y^{-1}. \tag{2.1.15}$$

Следовательно, существует несколько замен:

$$\zeta_1 = -\frac{1}{u_y}\left\{2au_y^2\,\mathrm{th}\,[-(au + c_1)] + u_{yy}\right\}, \tag{2.1.11$'$}$$

$$\zeta_2 = -\frac{1}{u_y}\left\{2au_y^2 \operatorname{cth}\left[-(au+c_2)\right] + u_{yy}\right\}, \tag{2.1.12$'$}$$

$$\zeta_3 = \frac{2u_y}{u+c_3} - \frac{u_{yy}}{u_y}, \tag{2.1.13$'$}$$

$$\zeta_4 = -\frac{1}{u_y}\left\{2bu_y^2 \operatorname{tg}(bu+c_4) + u_{yy}\right\}, \tag{2.1.14$'$}$$

$$\zeta_5 = -\frac{1}{u_y}\left\{-2bu_y^2 \operatorname{ctg}(bu+c_4) + u_{yy}\right\}, \tag{2.1.14$''$}$$

Замечание. Уравнение (2.1.0) весьма просто может быть проинтегрировано следующим образом: заметим, что уравнение допускает запись

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[2z_y + z^2\right] = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$2z_y + z^2 = F(y). \tag{2.1.16}$$

Если $z_0(y)$ — частное решение уравнения (2.1.16), то

$$z(x,y) = \frac{2\exp\left(-\int z_0(y)\,dy\right)}{f(x) + \int \exp\left(-\int z_0(y)\,dy\right)dy} + z_0(y). \tag{2.1.17}$$

Введем обозначение

$$\int \exp\left(-\int z_0(y)\,dy\right)dy \equiv g(y).$$

Это позволяет придать (2.1.17) вид

$$z(x,y) = \frac{2g'(y)}{f(x)+g(y)} - \frac{g''(y)}{g'(y)}. \tag{2.1.13$''$}$$

Рассмотренное решение допускает формулировку в виде такой простой задачи линеаризации: пусть многообразие $\mathfrak{M}$ задано уравнением (2.1.0), следует найти преобразование T, приводящее уравнение $w_x = 0$ к (2.1.0). Запишем определяющее соотношение в виде

$$Tw_x\Big|_{\mathfrak{M}(2.1.0)} \equiv 0, \qquad w = \zeta(z, z_y),$$

или в развернутом виде

$$z_x\zeta_z + z_{xy}\zeta_{z_y}\Big|_{z_{xy}=-zz_x} \equiv 0.$$

Отсюда сразу же находим

$$\zeta = \mathcal{F}\left(2z_y + z^2\right),$$

где $\mathcal{F}(s)$ — произвольная функция аргумента. Решение уравнений известно: $w = F(y)$. Это позволяет найти из (2.1.16) решение (2.1.13$''$), называемое *общим решением* уравнения (2.1.0) [3].

2. Уравнение (№ 2) Лиувилля [1]:

$$F_2 \equiv z_{xy} + \alpha e^z = 0. \tag{2.2.0}$$

Пусть преобразование зависимой переменной T: $z = \zeta(u, \underset{1}{u})$ обеспечивает приведение (2.2.0) к уравнению u_{xy} по схеме

$$T_2 F_2 \Big|_{D\mathfrak{M}} \equiv 0, \qquad \mathfrak{M}: \ u_{xy} = 0, \quad u = \phi(x) + \psi(y),$$

Расщепляя по производным второго порядка $\underset{2}{u}$ определяющее соотношение, полученное подстановкой производной z_{xy} и z, приходим к системе уравнений

$$\zeta_{uu_x} = 0, \qquad \zeta_{uu_y} = 0, \qquad \zeta_{u_x u_y} = 0, \qquad u_x u_y \zeta_{uu} + \alpha \exp\zeta = 0.$$

Решение будем искать в виде $\zeta = \ln u_x u_y \varphi(u)$. Тогда из предыдущих уравнений находим

$$\varphi_{uu} - \varphi_u^2 \varphi^{-1} + \alpha\varphi^2 = 0.$$

Обозначим $\varphi_u = p$, $\varphi_{uu} = \dot{p}p$, $p = p(\varphi)$. Тогда

$$\dot{p} - p\varphi^{-1} = -\alpha\varphi^2 p^{-1}.$$

Полагая $p = wv$, найдем $w = \varphi$, $v = \sqrt{-2(\alpha\varphi + \tilde{c})}$, откуда

$$p = \varphi_u = \varphi\sqrt{-2(\alpha\varphi + \tilde{c})}, \tag{2.2.1}$$

или

$$\frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{-\alpha\varphi + c}} = \sqrt{2}\, du. \tag{2.2.2}$$

Интегрируем подстановкой

$$-\alpha\varphi + c = t^2, \qquad \varphi = -\frac{1}{\alpha}\left(t^2 - c\right), \qquad d\varphi = -\frac{1}{\alpha} 2t\, dt.$$

Возможны такие случаи:

I. $\alpha = a^2 > 0$.

$$1)\ c = b^2 > 0, \qquad \varphi_{1,2} = \frac{b^2}{a^2}\left\{1 - \begin{matrix}\mathrm{th}^2\\ \mathrm{cth}^2\end{matrix}\left[-\frac{b}{\sqrt{2}}(u - c_1)\right]\right\}, \tag{2.2.3}$$

$$2)\ c = b^2 = 0, \qquad \varphi_3 = \frac{-2}{a^2(u + c_3)^2}, \tag{2.2.4}$$

$$3)\ c = -b^2 < 0, \qquad \varphi_{4,5} = -\frac{b^2}{a^2}\left\{1 + \begin{matrix}\mathrm{tg}^2\\ \mathrm{ctg}^2\end{matrix}\left[\frac{b}{\sqrt{2}}(u - c_4)\right]\right\}. \tag{2.2.5}$$

II. $\alpha = -a^2 < 0$.

$$1)\ c = b^2 > 0, \qquad \varphi_{6,7} = -\frac{b^2}{a^2}\left\{1 - \begin{matrix}\mathrm{th}^2\\ \mathrm{cth}^2\end{matrix}\left[-\frac{b}{\sqrt{2}}(u - c_6)\right]\right\}, \tag{2.2.6}$$

$$2)\ c = b^2 = 0, \qquad \varphi_8 = \frac{2}{a^2(u+c_8)^2}, \tag{2.2.7}$$

$$3)\ c = -b^2 < 0, \qquad \varphi_{9,10} = \frac{b^2}{a^2}\left\{1 + \begin{matrix}\mathrm{tg}^2\\ \mathrm{ctg}^2\end{matrix}\left[\frac{b}{\sqrt{2}}(u-c_9)\right]\right\}. \tag{2.2.8}$$

В соответствии с этим существует несколько замен

$$\zeta_{1,2} = \ln\left[\pm\frac{b^2}{a^2}u_x u_y\left\{1 - \begin{matrix}\mathrm{th}^2\\ \mathrm{cth}^2\end{matrix}\left[-\frac{b}{\sqrt{2}}(u-c_1)\right]\right\}\right], \tag{2.2.6$'$}$$

$$\zeta_3 = \ln\left[\frac{\mp 2u_x u_y}{a^2(u+c_3)^2}\right], \tag{2.2.7$'$}$$

$$\zeta_{4,5} = \ln\left[\mp\frac{b^2}{a^2}u_x u_y\left\{1 + \begin{matrix}\mathrm{tg}^2\\ \mathrm{ctg}^2\end{matrix}\left[\frac{b}{\sqrt{2}}(u-c_4)\right]\right\}\right]. \tag{2.2.8$'$}$$

Верхний знак отвечает значениям $\alpha > 0$, нижний — значениям $\alpha < 0$, c_i, $(i = \overline{1,9})$ — произвольные постоянные.

Замечание. Столь же просто могут быть получены решения уравнения

$$z_{xx} + \alpha e^z = 0. \tag{2.2$^{\text{а}}$.0}$$

Опуская вычисления, перечислим несколько различных форм подстановок, обеспечивающих приведение к уравнению $u_{xx} = 0$, $u = \phi(y)x + \psi(y)$:

$$\begin{aligned}
\zeta_{1,2} &= \ln\left[\pm\frac{b^2}{a^2}u_x^2\left\{1 - \begin{matrix}\mathrm{th}^2\\ \mathrm{cth}^2\end{matrix}\left[-\frac{b}{\sqrt{2}}(u-c_1)\right]\right\}\right],\\
\zeta_3 &= \ln\left[\frac{\mp 2u_x^2}{a^2(u+c_3)^2}\right],\\
\zeta_{4,5} &= \ln\left[\mp\frac{b^2}{a^2}u_x^2\left\{1 + \begin{matrix}\mathrm{tg}^2\\ \mathrm{ctg}^2\end{matrix}\left[\frac{b}{\sqrt{2}}(u-c_4)\right]\right\}\right].
\end{aligned} \tag{2.2$^{\text{а}}$.1}$$

Соответствующие решения имеют вид:

$$\begin{aligned}
z_{1,2} &= \ln\left[\pm\frac{b^2}{a^2}\phi^2(y)\left\{1 - \begin{matrix}\mathrm{th}^2\\ \mathrm{cth}^2\end{matrix}\left[-\frac{b}{\sqrt{2}}(\phi(y)x+\psi(y)-c_1)\right]\right\}\right],\\
z_3 &= \ln\left[\frac{\mp 2\phi^2(y)}{a^2(\phi(y)x+\psi(y)+c_3)^2}\right],\\
z_{4,5} &= \ln\left[\mp\frac{b^2}{a^2}\phi^2(y)\left\{1 + \begin{matrix}\mathrm{tg}^2\\ \mathrm{ctg}^2\end{matrix}\left[\frac{b}{\sqrt{2}}(\phi(y)x+\psi(y)-c_4)\right]\right\}\right].
\end{aligned} \tag{2.2$^{\text{а}}$.2}$$

3. Уравнение (№ 7) [1]:

$$F_3 \equiv z_{xy}^2 - 4\lambda(x,y)z_x z_y = 0. \tag{2.3.0}$$

Будем искать нелокальное преобразование вида

$$\zeta = \int f(x,y,u,\underset{1}{u})\,dx + \int \varphi(x,y,u,\underset{1}{u})\,dy,$$

приводящее уравнения (2.3.0) к линейному

$$\mathfrak{M}^{\Phi}: \quad \Phi \equiv u_{xy} - \frac{\lambda_{\lambda_x}}{2\lambda} u_y - \lambda u = 0, \tag{2.3.1}$$

$$T_3 F_3 \Big|_{D\mathfrak{M}^{\Phi}} \equiv 0. \tag{2.3.2}$$

Вычислим значения производных z_x, z_y, z_{xy} на многообразии $\mathfrak{M}^{\Phi}$ и запишем определяющее соотношение (2.3.2) в виде

$$\begin{gathered}
\left[f_y + u_y f_u + \left(\frac{\lambda_x}{2\lambda} u_y + \lambda u\right) f_{u_x} + u_{yy} f_{u_y}\right]^2 + \\
+ \left[\varphi_x + u_x \varphi_u + \left(\frac{\lambda_x}{2\lambda} u_y + \lambda u\right) \varphi_{u_y} + u_{xx} \varphi_{u_x}\right]^2 + \\
+2 \left[f_y + u_y f_u + \left(\frac{\lambda_x}{2\lambda} u_y + \lambda u\right) f_{u_x} + u_{yy} f_{u_y}\right] \times \\
\times \left[\varphi_x + u_x \varphi_u + \left(\frac{\lambda_x}{2\lambda} u_y + \lambda u\right) \varphi_{u_y} + u_{xx} \varphi_{u_x}\right] - \\
-4\lambda \left[f + \int \left[\varphi_x + u_x \varphi_u + \left(\frac{\lambda_x}{2\lambda} u_y + \lambda u\right) \varphi_{u_y} + u_{xx} \varphi_{u_x}\right] dy\right] \times \\
\times \left[\varphi + \int \left[f_y + u_y f_u + \left(\frac{\lambda_x}{2\lambda} u_y + \lambda u\right) f_{u_x} + u_{yy} f_{u_y}\right] dx\right] \equiv 0.
\end{gathered} \tag{2.3.3}$$

Выполняя расщепление (2.3.3) по $\underset{2}{u}$, получаем $f_{u_y} = 0$, $\varphi_{u_x} = 0$. Учитывая наличие в (2.3.3) интегралов, потребуем выполнения на многообразии условия

$$\varphi_\lambda \lambda_x + u_x \varphi_u + \varphi_{u_y} \frac{\lambda_x}{2\lambda} + \varphi_{u_y} \lambda u = \frac{\partial}{\partial y} \psi(\lambda, u, \underset{1}{u}) =$$

$$= \psi_\lambda \lambda_y + \psi_u u_y + \psi_{u_x} u_{xy} + \psi_{u_y} u_{yy}.$$

Расщепление по $\underset{2}{u}$ сразу же дает $\psi_{u_x} = 0$, $\varphi_{u_y} = 0$, а по u_x и λ_y — $\varphi_u = 0$, $\psi_\lambda = 0$, соответственно. Остается соотношение для φ и ψ

$$\varphi_\lambda \lambda_x + \varphi_{u_y} \frac{\lambda_x}{2\lambda} + \varphi_{u_y} \lambda u = \psi_u u_y. \tag{2.3.4}$$

Пусть $\varphi = \omega(\lambda) u_y^2$, тогда $\lambda_x \varphi_\lambda = \omega_\lambda \lambda_x u_y^2$ и (2.3.4) приобретает вид

$$\omega_\lambda \lambda_x u_y^2 + 2u_y^2 \frac{\lambda_x}{2\lambda} + 2u_y \lambda u = \psi_u u_y.$$

Отсюда следует: $\omega = \lambda^{-1}$, $\psi_u = -2u$, $\psi = -u^2$. Значит, φ можно взять в виде

$$\varphi = \lambda^{-1} u_y^2.$$

С учетом полученных результатов определяющее приводимость соотношение записывается так:

$$\begin{gathered}
\left[f_y + u_y f_u + \left(\frac{\lambda_x}{2\lambda} + \lambda u\right) f_{u_x}\right]^2 + 4 \left[f_y + u_y f_u + \left(\frac{\lambda_x}{2\lambda} u_y + \lambda u\right) f_{u_x}\right] u u_y + \\
+(2uu_y)^2 - 4\lambda \left[f + u^2\right] \int \left[f_y + u_y f_u + \left(\frac{\lambda_x}{2\lambda} u_y + \lambda u\right) f_{u_x}\right] dx \equiv 0.
\end{gathered}$$

Анализ показывает, что в последнем слагаемом интегральный сомножитель обращаться в ноль не должен (это ведет к противоречию). Обращение в ноль последнего слагаемого достигается выполнением равенства $f = u^{-2}$. Проверка показывает, что это значение f удовлетворяет определяющему соотношению. При этом получаем

$$\zeta = -\int u^2\,dx + \int \lambda^{-1} u_y^2\,dy. \tag{2.3.5}$$

Решение уравнения (2.3.0) получится подстановкой решения уравнения (2.3.1) в (2.3.5).

4. Уравнение (№ 4) [1]:

$$F_4 \equiv z_{xy} + \frac{\partial}{\partial x}\left[g(x)e^z\right] = 0. \tag{2.4.0}$$

Решим задачу приведения этого уравнения к линейному

$$\mathfrak{M}^\Phi: \quad \Phi \equiv u_{xy} - \frac{g'}{g}u_y = 0, \quad u = \psi(x) + g(x)\phi(y) \tag{2.4.1}$$

преобразованием

$$T_4F_4\Big|_{D\mathfrak{M}^\Phi} \equiv 0, \qquad T_4: \; z = \zeta(z, y, u, \underset{1}{u}). \tag{2.4.2}$$

Расщепление (2.4.2) по $u_{xx}u_{yy}$, u_{xx}, u_{yy} на многообразии (2.4.1) дает, соответственно, уравнения

$$\begin{aligned}
&\zeta_{u_x u_y} = 0,\\
&\zeta_{y u_x} + u_y\zeta_{u_x u} + \frac{g'}{g}u_y\zeta_{u_x u_x} + ge^\zeta\zeta_{u_x} = 0,\\
&\zeta_{x u_y} + u_x\zeta_{u u_y} + \frac{g'}{g}(u_y\zeta_{u_y u_y} + \zeta_{u_y}) = 0.
\end{aligned}$$

Пусть $\zeta_{u_x} = 0$. Тогда возможно дальнейшее расщепление по u_x:

$$\zeta_{u u_y} = 0, \qquad \zeta_{yu} + u_y\zeta_{uu} + ge^\zeta\zeta_u = 0.$$

Слагаемые, остающиеся после расщепления и не содержащие $\underset{2}{u}$ и u_x, дадут еще одно уравнение

$$\zeta_{xy} + \frac{g'}{g}u_y\zeta_u + u_y\zeta_{xu} + \frac{g'}{g}u_y\zeta_{y u_y} + g'e^\zeta + ge^\zeta\left[\zeta_x + \frac{g'}{g}u_y\zeta_u\right] = 0.$$

Пусть, далее $\zeta_{y u_y} = \zeta_{x u_y} = \zeta_y = 0$. Теперь система определяющих уравнений станет такой:

$$\begin{aligned}
&u_y\zeta_{u_y u_y} + \zeta_{u_y} = 0,\\
&u_y\zeta_{uu} + ge^\zeta\zeta_u = 0,\\
&\frac{g'}{g}u_y\zeta_u + u_y\zeta_{xu} + g'e^\zeta + ge^\zeta\left[\zeta_x + \frac{g'}{g}u_y\zeta_{u_y}\right] = 0.
\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

ζ ищем в виде

$$\zeta = \ln\varphi(u_y) - \ln\psi(u,x).$$

Первое из уравнений (2.4.3) теперь дает:

$$\ddot\varphi - \varphi^{-1}\dot\varphi^2 = -\dot\varphi u_y^{-1}, \tag{2.4.4}$$

второе —

$$u_y\left(\frac{\psi_{uu}}{\psi} - \frac{\psi_u^2}{\psi^2}\right) + g\frac{\psi_u}{\psi}\varphi = 0. \tag{2.4.5}$$

Из последнего сразу же получаем, что $\varphi = c_1 u_y$ ($c_1 = \mathrm{const}$), а уравнение (2.4.5) приобретает вид

$$\psi_{uu} - \frac{\psi_u^2}{\psi} + c_1 g\frac{\psi_u}{\psi} = 0. \tag{2.4.6}$$

Решение этого уравнения нетрудно найти

$$\psi = c_3(x)\left[\exp c_2(x)u - c_1 c_2^{-1}(x)g(x)\right], \tag{2.4.7}$$

c_2, c_3 — произвольные функции от x.

Третье уравнение системы (2.4.3) для ψ дает выражение

$$2c_1 - gc_1\psi_g\psi^{-1} - g^{-1}\psi_u - \psi_{ug} + \psi_u\psi_g\psi^{-1} = 0. \tag{2.4.8}$$

Расщепление (2.4.8) по $\exp 2c_2 u$ дает уравнение

$$g^{-1}c_3^2 c_2 + c_3\left[(\dot c_3)_g c_2 + c_3(\dot c_2)_g + c_3 c_2(\dot c_2)_g\right] - c_3 c_2\left[(\dot c_3)_g + c_3(\dot c_2)_g\right] = 0. \tag{2.4.9}$$

После простых преобразований оно примет вид

$$(\dot c_2)_g = -g^{-1}c_2. \tag{2.4.10}$$

Решение этого уравнения легко найти:

$$c_2(x) = \alpha g^{-1}. \tag{2.4.11}$$

Здесь α — произвольная постоянная.

Оставшиеся два уравнения, получающиеся из (2.4.8) расщеплением по $\exp c_2 u$, выполняются при этом тождественно. Искомая подстановка приобретает вид

$$\zeta_1 = \ln\frac{c_1 u_y}{c_3(x)\exp(\alpha g^{-1}u) - c_1 g^2\alpha^{-1}}. \tag{2.4.12}$$

В случае $c_2 \equiv 0$ находим

$$\psi = c_1 g u + c_4,$$

c_4 — постоянная интегрирования. Нелокальная замена в этой случае оказывается такой:

$$\zeta_2 = \ln\frac{c_1 u_y}{c_1 g u + c_4}. \tag{2.4.13}$$

Соответствующие две формы решения уравнения (2.4.0) запишем в виде

$$z_1 = \ln \frac{c_1\phi'(y)g(x)}{c_3(x)\exp(\alpha g^{-1}[\psi(x)+\phi(y)g(x)]) - \alpha^{-1}c_1 g^2}, \tag{2.4.14}$$

$$z_2 = \ln \frac{c_1\phi'(y)g(x)}{c_1 g(x)[\psi(x)+\phi(y)g(x)] + c_4}. \tag{2.4.15}$$

Замечание. Уравнение (2.4.0) может быть проинтегрировано иначе. Для этого заметим, что его можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\,[z_y + g(x)e^z] = 0,$$

откуда

$$z_y + g(x)e^z = G'(y). \tag{2.4.16}$$

$G'(y)$ — произвольная функция. Выполняя замену $z = u + G(y)$ в (2.4.16), получаем

$$u_y + g(x)\exp G(y)\exp u = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$\exp(-u) = g(x)\int \exp G(y)\,dy + f(x).$$

Введем обозначение: $\int \exp G(y)dy \equiv F(y)$. Тогда: $G(y) = \ln F'(y)$ и

$$u = -\ln[g(x)F(y) + f(x)].$$

Решение уравнения (2.4.0) теперь может быть записано в виде

$$z = \ln F'(y) - \ln[g(x)F(y) + f(x)].$$

Данному решению отвечает следующая задача приведения: для уравнения $w_x = 0$ следует найти преобразование T такое, что

$$Tw_x\Big|_{\mathfrak{M}(2.4.0)} \equiv 0, \qquad T:\ w = \zeta(x, z, z_y).$$

Решая эту задачу, получаем подстановку

$$w = z_y + g(x)e^z.$$

Учитывая, что $w = G'(y)$, можем выразить z как функцию от w, решая уравнение (2.4.16).

Следующие ниже уравнения объединяет то, что все они допускают линеаризацию *точечной заменой всех переменных*.

5. Уравнение (№ 8):

$$F_5 \equiv z_y z_{xx} - z_x z_{xy} = 0. \tag{2.5.0}$$

Первое решение. Ищем преобразование вида T: $z = \zeta(u)$, которое позволило бы привести (2.5.0) к уравнению

$$\mathfrak{M}:\quad u_x - [\psi'(y)]^{-1}u_y = 0.$$

Для последнего, как известно, решение можно записать так:

$$u = \Phi(x + \psi(y)).$$

Соотношение, определяющее приводимость, имеет вид

$$TF_5\Big|_{D\mathfrak{M}} \equiv 0. \tag{2.5.0'}$$

Подстановка в него значений производных, вычисленных на $\mathfrak{M}$, дает

$$u_y(\psi')^{-1}u_{xy}\zeta_u - u_x u_{xy}\zeta_u \equiv 0$$

или

$$u_{xy}\zeta_u\left(u_y\frac{1}{\psi'} - u_x\right) \equiv 0.$$

Полученный результат означает, что $\zeta(u)$ — произвольная функция. Решение уравнения (2.5.0), следовательно, может быть записано в виде

$$z = f(x + \psi(y)).$$

Второе решение. Решим задачу об отыскании уравнения $F(z) = 0$, получающегося в результате преобразования (1.3.0) уравнения $u_{\xi\eta} = 0$.

Воспользуемся формулами (1.5.0) для преобразования переменных

$$T_5: \quad \zeta = x, \quad \varepsilon = z, \quad \varkappa = y.$$

Получим:

$$\begin{aligned}
&D_x\zeta = 1, \qquad D_y\zeta = 0, \qquad D_{ij}\zeta = 0 \quad (i,j = x,y),\\
&D_x\varkappa = 0, \qquad D_y\varkappa = 1, \qquad D_{ij}\varkappa = 0,\\
&D_x\varepsilon = z_x, \qquad D_y\varepsilon = z_y, \qquad D_{ij}\varepsilon = z_{ij},\\
&\delta = z_x, \qquad K = z_y, \qquad H = 1, \qquad u_\xi = z_x^{-1},\\
&P = -z_{xx}, \qquad Q = -z_{yy}, \qquad R = -z_{xy}, \qquad u_\eta = -z_y z_x^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Вычисляя $u_{\xi\eta}$, находим

$$u_{\xi\eta} = [z_x z_{xy} - z_y z_{xx}]z_x^{-3} = 0, \tag{2.5.2}$$

т.е. как раз уравнение (2.5.0). Решение последнего получим, заменяя u, ξ, η их значениями на $\mathfrak{M}^F$:

$$u = \phi(\xi) - \psi(\eta), \quad \Longrightarrow \quad x = \phi(z) - \psi(y),$$

что эквивалентно найденному выше первым методом.

Ближайшее обобщение уравнения (2.5.0) наиболее просто получим, задавая, например, уравнение

$$u_{\xi\eta} = \alpha S(u_\xi) + \beta N(u_\eta) + \gamma T(u). \tag{2.5.3}$$

Если здесь α, β, γ выбрать функциями ξ, получим уравнение

$$z_x z_{xy} - z_y z_{xx} = z_x^3\left\{\alpha(z)S\left(\frac{1}{z_x}\right) + \beta(z)N\left(-\frac{z_y}{z_x}\right) + \gamma(z)T(x)\right\}. \tag{2.5.4}$$

По известному решению уравнения (2.5.3) легко, как было показано, строится решение нелинейного уравнения (2.5.4).

Иной способ построения более общих нелинейных уравнений можно получить изменением преобразования переменных. Так, выбирая преобразование T в виде

$$\zeta = x, \qquad \varepsilon = \sin z, \qquad \varkappa = y,$$

получаем

$$\begin{aligned}
&\delta = z_x \cos z, \qquad u_\eta = -\frac{z_y}{z_x}, \qquad -P = z_{xx}\cos z - z_x \sin z,\\
&K = z_y \cos z, \qquad u_\xi = (z_x \cos z)^{-1}, \qquad -Q = z_{yy}\cos z - z_y \sin z,\\
&H = 1, \qquad -R = z_{xy}\cos z - z_y \sin z,
\end{aligned}$$

а уравнение оказывается таким:

$$z_x z_{xy} - z_y z_{xx} = z_x^3 \cos^2 z \left\{ \alpha S\left(\frac{1}{z_x \cos z}\right) + \beta N\left(-\frac{z_y}{z_x}\right) + \gamma T(x) \right\}.$$

Замечание. Уравнение (2.5.0) можно решить иначе. Рассмотрим уравнение $w_x = 0$, решение которого запишем в виде $w = c_1(y)$. Найдем преобразование T такое, что

$$Tw_x\Big|_{\mathfrak{M}(2.5.0)} \equiv 0, \qquad w = \zeta(z_x, z_y).$$

Получим

$$z_{xy}\zeta_{z_y} + z_{xx}\zeta_{z_x}\Big|_{z_{xy} = z_y z_x^{-1} z_{xx}} \equiv 0$$

или

$$z_y \zeta_{z_y} + z_x \zeta_{z_x} = 0.$$

Отсюда

$$\zeta = f_1\left(\frac{z_x}{z_y}\right).$$

Чтобы выразить z через w, следует решить уравнение

$$z_x - [\psi'(y)]^{-1} z_y = 0.$$

Получим

$$z = f(x + \psi(\psi(y)).$$

6. Уравнение (№ 9):

$$F_6 \equiv z_y z_{xy} - z_x z_{xy} = 0 \tag{2.6.0}$$

аналогично предыдущему. В этом случае также можно указать несколько способов решения. Первый — решение задачи приведения к уравнению

$$u_y - [\psi'(y)]^{-1} u_x = 0.$$

Второй — преобразование уравнения $u_{\xi\eta} = 0$ заменой

$$\begin{aligned}
&T_4: \qquad \zeta = y, \qquad \varepsilon = z, \qquad \varkappa = x,\\
&\delta = -z_y, \qquad K = -z_x, \qquad H = -1, \qquad u_\xi = z_y^{-1},\\
&P = z_{xx}, \qquad Q = z_{yy}, \qquad R = z_{xy}, \qquad u_\eta = -\frac{z_x}{z_y}.
\end{aligned} \tag{2.6.1}$$

Находим

$$u_{\xi\eta} = z_y^{-3}(z_x z_{yy} - z_y z_{xy}) = 0.$$

Преобразование уравнения (2.5.3) при $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$, $\gamma(\xi)$ дает в этом случае уравнение

$$F_6 = z_y^3 \left\{ \alpha(z) S\left(\frac{1}{z_y}\right) + \beta(z) N\left(-\frac{z_x}{z_y}\right) + \gamma(z) T(y) \right\}.$$

Замечание. Это уравнение (2.6.0) может быть приведено к $w_y = 0$

$$T w_y \Big|_{\mathfrak{M}(2.6.0)} \equiv 0, \qquad w = [\psi'(x)]^{-1}.$$

Подстановка будет иметь вид

$$w = f_1\left(\frac{z_x}{z_y}\right).$$

Решая уравнение

$$z_y - [\psi'(x)]^{-1} z_x = 0,$$

получаем $z = f(y + \psi(x))$.

7. Уравнение (№ 11):

$$F_7 \equiv z_y z_{xy} - z_x z_{yy} - z_y^3 = 0 \tag{2.7.0}$$

может быть построено как частный случай предыдущего, в котором следует положить $u_{\xi\eta} = 1$. Выполним преобразование (2.6.1). Получим

$$u_{\xi\eta} = (-z_y)^3 (z_x z_{yy} - z_y z_{xy}) = 1.$$

Уравнение (2.7.0) может быть получено иначе. Полагая исходное уравнение таким: $u_{\xi\eta} = -1$, и выполняя преобразование

$$T: \qquad \zeta = -y, \qquad \varepsilon = x, \qquad \varkappa = z,$$

найдем $\delta = z_y$, $K = 1$, $H = z_x$, $P = z_{xx}$, $Q = z_{yy}$, $R = z_{xy}$,

$$u_{\xi\eta} = z_y^{-3}(z_x z_{yy} - z_y z_{xy}) = -1.$$

Для уравнения (2.7.0) может быть решена также еще одна задача приведения — к уравнению $w_y = 0$, имеющему решение вида $w = f'(x)$:

$$T w_y \Big|_{\mathfrak{M}(2.7.0)} \equiv 0, \qquad w = \zeta(z, z_x, z_y).$$

Расщепление по производным $\underset{2}{z}$ дает

$$z_x \zeta_{z_x} + z_y \zeta_{z_y} = 0,$$

откуда $\zeta = \Phi(\alpha, z)$, $\alpha \equiv \frac{z_x}{z_y}$.

Второе уравнение оказывается таким:

$$\Phi_z + \Phi_\alpha = 0.$$

Таким образом, окончательно получим

$$\zeta = \Phi(z_x z_y^{-1} - z).$$

8. Уравнение (№ 14):

$$F_8 \equiv z_y(1+z_y)z_{xx} - (1+2z_y)(1+z_x)z_{xy} + (1+z_x)^2 z_{yy} = 0. \tag{2.8.0}$$

Выполним преобразование

$$T_8: \qquad \zeta = x, \qquad \varepsilon = x + y + z, \qquad \varkappa = x + y,$$

уравнения $u_{\xi\eta} = 0$ с решением $u = \phi(\xi) + \psi(\eta)$. Получим

$$\delta = -(1+z_x), \qquad K = (1+z_y), \qquad H = z_y, \qquad u_\eta = \frac{1+z_y}{1+z_x},$$

$$u_\xi = -z_y(1+z_x)^{-1}, \qquad P = z_{xx}, \qquad Q = z_{yy}, \qquad R = z_{xy}.$$

Подставляя в выражение $u_{\xi\eta}$ из (1.5.0), находим

$$u_{\xi\eta} = \frac{-1}{(1+z_x)^3}\left[z_y(1+z_y)z_{xx} + (1+z_x)^2 z_{yy} - z_{xy}(1+2z_y)(1+z_x)\right] = 0,$$

что при $z_x z_y \neq 1$, $z_x \neq -1$ дает (2.8.0), решение которого имеет вид

$$x = \phi(x+y+z) + \psi(x+z).$$

Выбирая в качестве исходного уравнение (2.5.3), получим такое обобщение уравнения (2.8.0):

$$F_8 = -(1+z_x)^3\left\{\alpha S\left(\frac{-z_y}{1+z_x}\right) + \beta N\left(\frac{1+z_y}{1+z_x}\right) + \gamma T(x)\right\}.$$

9. Уравнение (№ 15):

$$F_9 \equiv z_y z_{xx} - (1+z_x+z_y)z_{xy} + (1+z_x)z_{yy} = 0 \tag{2.9.0}$$

получается из $u_{\xi\eta} = 0$ $(u = \phi(\xi) + \psi(\eta))$ преобразованием

$$T_9: \qquad \zeta = z, \qquad \varepsilon = x + z, \qquad \varkappa = x + y.$$

При этом

$$\delta = 1 + z_x - z_y, \qquad K = -z_y, \qquad H = z_x - z_y, \qquad u_\eta = z_y(1+z_x-z_y),$$

$$u_\xi = \frac{z_x - z_y}{1+z_x-z_y}, \qquad P = z_{xx}, \qquad Q = z_{yy}, \qquad R = z_{xy}.$$

Вычисляя $u_{\xi\eta}$, получаем (2.9.0)

$$u_{\xi\eta} = (1 + z_x - z_y)^{-3} \left[z_{xx} z_y + z_{yy}(1 + z_x) - z_{xy}(1 + z_x + z_y) \right] = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$z = \phi(x + z) + \psi(x + y).$$

Преобразование уравнения (2.5.3) дает результат

$$F_9 = [1 + z_x - z_y]^3 \left\{ \alpha S \left(\frac{z_x - z_y}{1 + z_x - z_y} \right) + \beta N \left(\frac{z_y}{1 + z_x - z_y} \right) + \gamma T(z) \right\}. \quad (2.9.1)$$

10. Уравнение (№ 17):

$$F_{10} \equiv (e^x - 1)(z_y z_{xx} - z_x z_{xy}) - z_x z_y e^x = 0. \quad (2.10.0)$$

Выполним преобразование

$$T_{10}: \qquad \zeta = x - e^x, \qquad \varepsilon = z, \qquad \varkappa = y,$$

уравнения $u_{\xi\eta} = 0$. В этом случае

$$\delta = z_x, \qquad K = z_y(1 - e^x), \qquad H = (1 - e^x),$$

$$u_\xi = \frac{1 - e^x}{z_x}, \qquad u_\eta = -\frac{(1 - e^x) z_y}{z_x},$$

$$-P = z_{xx}(1 - e^x) + z_x e^x, \qquad -Q = z_{yy}(1 - e^x), \qquad -R = z_{xy}(1 - e^x).$$

Вычисляя теперь $u_{\xi\eta}$, получаем

$$u_{\xi\eta} = (-z_x)^3 \left[z_x z_y e^x + (1 - e^x) z_y z_{xx} - z_x z_{xy}(1 - e^x) \right] = 0,$$

откуда следует (2.10.0). Решение последнего имеет вид

$$x - e^x = \phi(z) - \psi(y).$$

В рассмотренном примере, как и в предыдущем, легко можно построить обобщение уравнения (2.10.0), усложняя, например, исходное уравнение до (2.5.3).

Для уравнения (2.10.0) возможно решение другой задачи приведения. Выберем в качестве исходного такое линейное уравнение:

$$\Phi \equiv w_x + e^x(1 - e^x)^{-1} w = 0. \quad (2.10.1)$$

Найдем преобразование T такое, что

$$T\Phi(w)\Big|_{\mathfrak{M}(2.10.0)} \equiv 0, \qquad w = \zeta(z_x, z_y). \quad (2.10.2)$$

Тогда

$$z_{xy} \zeta_{z_y} + z_{xx} \zeta_{z_x} + e^x(1 - e^x)\zeta\Big|_{\mathfrak{M}} \equiv 0$$

или

$$z_{xy} \zeta_{z_y} - e^x(1 - e^x)^{-1} \zeta_{z_x} + z_{xy} z_x z_y^{-1} \zeta_{z_x} + e^x(1 - e^x)^{-1} \zeta \equiv 0.$$

Расщепление по z_{xy} дает

$$z_y\zeta_{z_y} + z_x\zeta_{z_x} = 0, \tag{2.10.3}$$

откуда следует $\zeta = f\left(\frac{z_x}{z_y}\right)$, что удовлетворяет и второму уравнению, остающемуся от (2.10.3):

$$z_x\zeta_{z_x} - \zeta = 0.$$

Решение (2.10.1) имеет вид $w = F(y)(e^x - 1)$. Поэтому из замены

$$z_x z_y^{-1} = F(y)(e^x - 1)$$

находим $z = \omega(e^x - x + F(y))$.

11. Уравнение (№ 18) [1]:

$$F_{11} \equiv z_y(1+z_y)z_{xx} - (1 + z_x + z_y + 2z_x z_y)z_{xy} + z_x(1+z_x)z_{yy} = 0. \tag{2.11.0}$$

Данное уравнение получим из $u_{\xi\eta} = 0$ подстановкой

$$T_{11}: \qquad \zeta = z, \qquad \varepsilon = x + z, \qquad \varkappa = y + z.$$

При этом

$$\delta = 1 + z_x + z_y, \qquad K = -z_y, \qquad H = z_x, \qquad u_\eta = \frac{z_y}{1 + z_x + z_y},$$
$$u_\xi = \frac{z_x}{1 + z_x + z_y}, \qquad P = z_{xx}, \qquad Q = z_{yy}, \qquad R = z_{xy}.$$

Вычисление $u_{\xi\eta}$ дает уравнение (2.11.0). Решение его таково:

$$z = \phi(x+z) + \psi(y+z).$$

Преобразованием уравнения (2.5.3) получим

$$F_{11} = (1 + z_x + z_y)^3\left[\alpha S\left(\frac{z_x}{1 + z_x + z_y}\right) + \beta N\left(\frac{z_y}{1 + z_x + z_y}\right) + \gamma T(z)\right].$$

12. Уравнение (№ 23):

$$F_{12} \equiv z(z_y z_{xy} - z_x z_{yy}) \pm z_x z_y^2 = 0. \tag{2.12.0}$$

Исходным здесь может быть взято уравнение

$$u_{\xi\eta} = \eta^{-1}u_\xi, \tag{2.12.1}$$

имеющее решением функцию $u = \phi(\eta) + \eta\psi(\xi)$.

Выполним следующее преобразование уравнения (2.12.1):

$$T_{12}: \qquad \zeta = y, \qquad \varepsilon = x, \qquad \varkappa = \pm z.$$

При этом находим

$$\delta = \pm z_y, \qquad K = -1, \qquad H = \mp z_x, \qquad u_\eta = \pm z_y^{-1},$$
$$u_\xi = \mp z_x z_y^{-1}, \qquad P = -z_{xx}, \qquad Q = -z_{yy}, \qquad R = -z_{xy}.$$

Полученные выражения позволяют вычислить производные $u_{\xi\eta}$ и u_ξ на $\mathfrak{M}$ многообразии. Подставим их в (2.12.1), получим

$$u_{\xi\eta} = [\mp z_y z_{xy} \pm z_x z_{yy}]\,(\pm z_y)^{-3} = \mp\frac{z_x}{z_y z} = \eta^{-1} u_\xi.$$

Решение (2.12.0) может быть, следовательно, записано в виде

$$y = \phi(z) \pm z\psi(x).$$

Потребовав, чтобы исходное уравнение имело вид (2.5.3) с α, β, γ, зависящими от η, придем к такому обобщению (2.12.0)

$$z_y z_{xy} - z_x z_{yy} = z_y^3 \left[\alpha(z) S\left(-\frac{z_x}{z_y}\right) + \beta(z) N\left(\frac{1}{z_y}\right) + \gamma(z) T(y)\right].$$

В частности, потребовав, чтобы (2.5.3) имело вид

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{f(\eta)} u_\xi, \qquad (\eta = z),$$

получим

$$f(z)[z_y z_{xy} - z_x z_{yy}] = -z_x z_y^2.$$

Решение этого уравнения выглядит так:

$$y = \int \phi(x) \exp \int f^{-1}(z)\,dz\,dx + \psi(z).$$

13. Уравнение (№ 12):

$$F_{13} \equiv z_y^2 z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + z_x^2 z_{yy} = 0 \tag{2.13.0}$$

может быть получено преобразованием

$$T_{13}: \qquad \zeta = y, \qquad \varepsilon = x, \qquad \varkappa = z$$

уравнения $u_{\xi\xi} = 0$ с решением $u = \xi\phi(\eta) + \psi(\eta)$. В самом деле

$$\delta = z_y, \qquad K = -1, \qquad H = -z_x, \qquad u_\eta = z_y^{-1},$$
$$u_\xi = -z_x z_y^{-1}, \qquad P = -z_{xx}, \qquad Q = -z_{yy}, \qquad R = -z_{xy}.$$

Вычисляя $u_{\xi\xi}$ и приравнивая результат нулю, приходим к (2.13.0). Решение записывается в виде

$$y = \phi(z)x + \psi(z).$$

В случае преобразования T_{13} уравнения

$$u_{\xi\xi} = \alpha(\eta) S(u_\xi) + \beta(\eta) N(u_\eta) + \gamma(\eta) T(u) \tag{2.13.1}$$

получим

$$F_{13} = z_y^3 \left[\alpha(z) S\left(-\frac{z_x}{z_y}\right) + \beta(z) N\left(\frac{1}{z_y}\right) + \gamma(z) T(y)\right].$$

14. Уравнение (№ 13):

$$F_{14} \equiv z_y^2 z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + z_x^2 z_{yy} - z_x z_y^2 = 0 \tag{2.14.0}$$

получается как частный случай предыдущего (2.13.1).

Выполним преобразование

$$T_{14}: \qquad \zeta = y, \qquad \varepsilon = x, \qquad \varkappa = z$$

уравнения $u_{\xi\xi} = u_\xi$, имеющего решение $u = e^\xi \phi(\eta) + \psi(\eta)$. Решение уравнения (2.14.0) запишется в виде

$$y = e^x \phi(z) + \psi(z).$$

15. Уравнение (№ 16) [1]:

$$F_{15} \equiv (b + z_y)^2 z_{xx} - 2(a + z_x)(b + z_y) z_{xy} + (a + z_x)^2 z_{yy} = 0 \tag{2.15.0}$$

получается из $u_{\xi\xi} = 0$ заменой

$$T_{15}: \qquad \zeta = z, \qquad \varepsilon = x, \qquad \varkappa = ax + by + z.$$

При этом находим

$$\delta = b + z_y, \qquad K = -z_y, \qquad H = z_x(b + z_y) - z_y(a + z_x),$$
$$u_\eta = z_y(b + z_y)^{-1}, \qquad u_\xi = z_x - z_y \frac{a + z_x}{b + z_y},$$
$$P = bz_{xx}, \qquad Q = bz_{yy}, \qquad R = bz_{yy}.$$

С помощью полученных выражений вычислим $u_{\xi\xi}$. Приходим к (2.15.0). Решение этого уравнения имеет вид $(u = \xi\phi(\eta) + \psi(\eta))$:

$$z = x\phi(ax + by + z) + \psi(ax + by + z).$$

Преобразованием уравнения (2.13.1) получим

$$F_{15} = b^{-1}(b + z_y)^3 \left\{ \alpha S \left[z_x - z_y \frac{a + z_x}{b + z_y} \right] + \beta N \left(\frac{z_y}{b + z_y} \right) + \gamma T(z) \right\}.$$

Уравнения, которые будут рассмотрены ниже, объединяет то, что все они допускают линеаризацию посредством нелокального преобразования всех переменных.

16. Уравнение (№ 21) [1]:

$$F_{16} \equiv z_{xx} + z_x z_{yy} \mp z_y z_{xy} = 0. \tag{2.16.0}$$

Поставим следующую задачу приведения: найти преобразование

$$T_{16}: \quad \begin{aligned} z &= \zeta(\xi, \eta, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}), \\ x &= \varepsilon(\xi, \eta, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}), \\ y &= \varkappa(\xi, \eta, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}), \end{aligned} \tag{2.16.1}$$

осуществляющее приведение (2.16.0) к уравнению $u_{\xi\eta} = 0$ по схеме

$$T_{16} F_{16} \Big|_{{}_D\mathfrak{M}} \equiv 0.$$

Полученное преобразование может быть полезно для построения решения уравнения (2.16.0) в основном в тех случаях, когда (2.16.1) есть линейные функции (возможно с переменными коэффициентами), т.е.

$$\begin{aligned}
&\zeta = \alpha u_{\xi\xi} + \beta u_\xi + \gamma u_{\eta\eta} + \delta u_\eta + \nu u + c_1,\\
&\varepsilon = h u_{\xi\xi} + l u_\xi + k u_{\eta\eta} + m u_\eta + n u + c_2,\\
&\varkappa = a u_{\xi\xi} + b u_\xi + c u_{\eta\eta} + d u_\eta + e u + c_3,
\end{aligned}\qquad (2.16.2)$$

Здесь все коэффициенты — функции ξ, η. Выписывать значения производных на $\mathfrak{M}$ не будем ввиду их громоздкости. Определяющее соотношение может быть записано так:

$$\begin{aligned}
&P\left[\delta(D_\eta\varkappa)^2 + H(D_\eta\varepsilon)^2 \pm K D_\eta\varkappa D_\eta\varepsilon\right] + Q\left[\delta(D_\xi\varkappa)^2 + H(D_\xi\varepsilon)^2 \pm K D_\xi\varkappa D_\xi\varepsilon\right] -\\
&\quad -R\left[2\delta D_\xi\varkappa D_\eta\varkappa + 2H D_\xi\varepsilon D_\eta\varepsilon \pm K(D_\xi\varepsilon D_\eta\varkappa + D_\eta\varepsilon D_\xi\varkappa)\right]\Big|_{D\mathfrak{M}} \equiv 0.
\end{aligned}$$

Легко увидеть, что $u_{\xi\xi\xi\xi}$ встретится лишь в P, а $u_{\eta\eta\eta\eta}$ — только в Q. Отсюда следует, что $R = 0$. Выполняя дальнейшее расщепление в P и Q по $\underset{4}{u}$ и затем по $\underset{3}{u}$, получаем систему большого числа простых уравнение, позволяющую в завершение процесса решения получить замену

$$\begin{aligned}
&\zeta = \xi^2 u_{\xi\xi} - 2\xi u_\xi + 2u + \eta^2 u_{\eta\eta} - 2\eta u_\eta + c_1,\\
&\varepsilon = -(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) + c_2,\\
&\varkappa = \pm(\xi u_{\xi\xi} - u_\xi + \eta u_{\eta\eta} - u_\eta) + c_3.
\end{aligned}\qquad (2.16.3)$$

Проверим, что преобразование (2.16.3) в самом деле дает решение задачи. Вычисление дает следующие результаты на $\mathfrak{M}$:

$$\begin{aligned}
&D_\xi\zeta = \xi^2 u_{\xi\xi\xi}, \qquad D_\xi\varepsilon = -u_{\xi\xi\xi}, \qquad D_\xi\varkappa = \pm\xi u_{\xi\xi\xi},\\
&D_\eta\zeta = \eta^2 u_{\eta\eta\eta}, \qquad D_\eta\varepsilon = -u_{\eta\eta\eta}, \qquad D_\eta\varkappa = \pm\eta u_{\eta\eta\eta},\\
&D_{\xi\xi}\zeta = 2\xi u_{\xi\xi\xi} + \xi^2 u_{\xi\xi\xi\xi}, \qquad D_{\xi\xi}\varepsilon = -u_{\xi\xi\xi\xi}, \qquad D_{\xi\xi}\varkappa = \pm(u_{\xi\xi\xi} + \xi u_{\xi\xi\xi\xi}),\\
&D_{\eta\eta}\zeta = 2\eta u_{\eta\eta\eta} + \eta^2 u_{\eta\eta\eta\eta}, \qquad D_{\eta\eta}\varepsilon = -u_{\eta\eta\eta\eta}, \qquad D_{\eta\eta}\varkappa = \pm(u_{\eta\eta\eta} + \eta u_{\eta\eta\eta\eta}),\\
&D_{\xi\eta}\zeta = 0, \qquad D_{\xi\eta}\varepsilon = 0, \qquad D_{\xi\eta}\varkappa = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда легко найти значения вспомогательных величин

$$\begin{aligned}
&\delta = \mp u_{\xi\xi\xi} u_{\eta\eta\eta}(\eta - \xi), \qquad K = \mp\delta(\eta + \xi), \qquad H = \delta(\xi\eta),\\
&z_y = \pm(\eta + \xi), \qquad z_x = \xi\eta, \qquad P = \delta(\xi - \eta)u_{\xi\xi\xi}, \qquad Q = \delta(\eta - \xi)u_{\eta\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Производные второго порядка теперь вычисляются весьма просто:

$$\begin{aligned}
&z_{xx} = \mp\delta^{-1}\left[\xi^2 u_{\xi\xi\xi} - \eta^2 u_{\eta\eta\eta}\right],\\
&z_{yy} = \mp\delta^{-1}\left[u_{\xi\xi\xi} - u_{\eta\eta\eta}\right],\\
&z_{xx} = \mp\delta^{-1}\left[\xi u_{\xi\xi\xi} - \eta u_{\eta\eta\eta}\right].
\end{aligned}$$

Подстановка найденных выше выражений производных на многообразии в (2.16.0) обращает последнее в тождество. Следовательно, (2.16.3) есть искомое преобразование. Замечая, что $u = \phi(\xi) + \psi(\eta)$, запишем решение уравнения (2.16.0)

$$\begin{aligned}
&z = \xi^2\phi'' - 2\xi\phi' + 2(\phi + \psi) + \eta^2\psi'' - 2\eta\psi' + c_1,\\
&x = -(\phi'' + \psi'') + c_2,\\
&y = \pm(\xi\phi'' - \phi' + \eta\psi'' - \psi') + c_3.
\end{aligned}$$

Здесь c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные.

17. Уравнение (№ 10):

$$F_{17} \equiv z_{xy} - \left(z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2\right) = 0. \tag{2.17.0}$$

Будем искать линейное преобразование

$$T_{17}: \quad \begin{aligned} \zeta &= \beta u_\xi + \delta u_\eta + \nu u + c_1, \\ \varepsilon &= l u_\xi + m u_\eta + n u + c_2, \\ \varkappa &= b u_\xi + d u_\eta + e u + c_3, \end{aligned} \tag{2.17.1}$$

осуществляющее приведение к уравнению $u_{\xi\eta} = 0$ по схеме

$$T_{17}F_{17}\Big|_{{}_D\mathfrak{M}} \equiv 0. \tag{2.17.2}$$

Определяющее соотношение (2.17.2) запишем так:

$$\begin{gathered}[PD_\eta\varepsilon D_\eta\varkappa + QD_\xi\varkappa D_\xi\varepsilon - R(D_\xi\varepsilon D_\eta\varkappa + D_\eta\varepsilon D_\xi\varkappa)]\,\delta^3 - \\ -\Big\{P^2(D_\eta\varkappa)^2(D_\eta\varepsilon)^2 + PQ(D_\eta\varkappa)^2(D_\xi\varepsilon)^2 - 2RP(D_\eta\varkappa)^2 D_\xi\varepsilon D_\eta\varepsilon + \\ +QP(D_\xi\varkappa)^2(D_\eta\varepsilon)^2 + Q^2(D_\xi\varkappa)^2(D_\xi\varepsilon)^2 - 2RQ(D_\xi\varkappa)^2 D_\xi\varepsilon D_\eta\varepsilon - \\ -2RP(D_\eta\varepsilon)^2 D_\xi\varkappa D_\eta\varkappa - 2RQ(D_\xi\varepsilon)^2 D_\xi\varkappa D_\eta\varkappa + 4R^2 D_\xi\varkappa D_\eta\varkappa D_\xi\varepsilon D_\eta\varepsilon - \\ -P^2(D_\eta\varepsilon)^2(D_\eta\varkappa)^2 - Q^2(D_\xi\varkappa)^2(D_\xi\varepsilon)^2 - R^2(D_\xi\varepsilon D_\eta\varkappa + D_\eta\varepsilon D_\xi\varkappa)^2 + \\ +2RPD_\eta\varkappa D_\eta\varepsilon(D_\xi\varepsilon D_\eta\varkappa + D_\eta\varepsilon D_\xi\varkappa) - 2PQD_\xi\varkappa D_\eta\varkappa D_\xi\varepsilon D_\eta\varepsilon + \\ +2RQD_\xi\varkappa D_\xi\varepsilon(D_\xi\varepsilon D_\eta\varkappa + D_\eta\varepsilon D_\xi\varkappa)\Big\}\Big|_{{}_D\mathfrak{M}} \equiv 0. \end{gathered} \tag{2.17.3}$$

Здесь слагаемые с P^2 и Q^2 взаимно уничтожаются. Следует учесть, что $u_{\xi\xi\xi}$ содержится только в P, а $u_{\eta\eta\eta}$ — в Q; R не зависит от $\underset{3}{u}$. Выполняя расщепление в оставшихся слагаемых (2.17.3) по произведению $u_{\xi\xi\xi}u_{\eta\eta\eta}$, по $u_{\xi\xi\xi}$ и $u_{\eta\eta\eta}$, получим систему определяющих уравнений. Решение последней имеет вид

$$\begin{aligned} \zeta &= \xi\eta + \xi u_\xi + \eta u_\eta - u + c_1, \\ \varepsilon &= u_\xi + \eta + c_2, \\ \varkappa &= u_\eta + \xi + c_3. \end{aligned} \tag{2.17.4}$$

Здесь c_1, c_2, c_3 — постоянные интегрирования.

Убедимся в том, что найденная подстановка в самом деле осуществляет приведение уравнений. Простые вычислений дают

$$\begin{gathered} D_\xi\zeta = \eta + \xi u_{\xi\xi}, \qquad D_{\xi\xi}\zeta = u_{\xi\xi} + \xi u_{\xi\xi\xi}, \qquad D_{\xi\eta}\zeta = 1, \qquad D_\eta\zeta = \xi + \eta u_{\eta\eta}, \\ D_{\eta\eta}\zeta = u_{\eta\eta} + \eta u_{\eta\eta\eta}, \qquad D_\xi\varepsilon = u_{\xi\xi}, \qquad D_\eta\varepsilon = 1, \qquad D_{\xi\xi}\varepsilon = u_{\xi\xi\xi}, \\ D_{\xi\eta}\varepsilon = D_{\eta\eta}\varepsilon = 0, \qquad D_\xi\varkappa = 1, \qquad D_\eta\varkappa = u_{\eta\eta}, \qquad D_{\eta\eta}\varkappa = u_{\eta\eta\eta}, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} D_{\xi\eta}\varkappa = D_{\xi\xi}\varkappa = 0, \qquad \delta = u_{\xi\xi}u_{\eta\eta} - 1, \qquad K = -\eta\delta, \\ H = \xi\delta, \qquad P = u_{\xi\xi}\delta, \qquad Q = u_{\eta\eta}\delta, \qquad R = \delta. \end{gathered}$$

Теперь легко вычисляются значения $\underset{2}{z}$

$$z_{xx} = u_{\eta\eta}\delta^{-1}, \qquad z_{yy} = u_{\xi\xi}\delta^{-1}, \qquad z_{xy} = \delta^{-1}.$$

Подставляя их в (2.17.0) на многообразии, убеждаемся в том, что результат верен:

$$\left(u_{\eta\eta}u_{\xi\xi}\delta^{-2}-\delta^{-2}\right)-\delta^{-1}\equiv 0.$$

Решение получим, подставив в (2.17.4)

$$\begin{aligned} z&=\xi\eta+\xi\phi'+\eta\psi'-\phi-\psi+c_1,\\ x&=\phi'+\eta+c_2,\\ y&=\psi'+\xi+c_3. \end{aligned}\tag{2.17.5}$$

18. Уравнение (№ 20) (уравнение Plateou) [1, 2]:

$$F_{18}\equiv\left(1+z_y^2\right)z_{xx}-2z_xz_yz_{xy}+\left(1+z_x^2\right)z_{yy}=0.\tag{2.18.0}$$

Покажем, что преобразование (подстановка Монжа (Monge))

$$T_{18}:\quad \begin{aligned} &\zeta=i\int\left(1+u_\xi^2\right)^{1/2}d\xi+i\int\left(1+u_\eta^2\right)^{1/2}d\eta+c_1,\\ &\varepsilon=\xi+\eta+c_2,\\ &\varkappa=u+c_3,\qquad c_i\ (i=\overline{1,3})-\mathrm{const} \end{aligned}\tag{2.18.1}$$

является преобразованием, осуществляющим приведение (2.18.0) к уравнению $u_{\xi\eta}=0$ по схеме

$$T_{18}F_{18}\Big|_{D\mathfrak{M}}\equiv 0,\qquad u=\phi(\xi)+\psi(\eta).\tag{2.18.2}$$

Вычислим значения на многообразии вспомогательных величин

$$\begin{aligned} &D_\xi\varepsilon=1,\qquad D_\eta\varepsilon=1,\qquad D_{ij}\varepsilon=0,\qquad D_\xi\varkappa=u_\xi,\qquad D_\eta\varkappa=u_\eta,\\ &D_{ij}\varkappa=0,\qquad D_\xi\zeta=i\left(1+u_\xi^2\right)^{1/2},\qquad D_{\xi\xi}\zeta=iu_\xi u_{\xi\xi}\left(1+u_\xi^2\right)^{-1/2},\\ &D_\eta\zeta=i\left(1+u_\eta^2\right)^{1/2},\qquad D_{\eta\eta}\zeta=iu_\eta u_{\eta\eta}\left(1+u_\eta^2\right)^{-1/2},\\ &\delta=u_\eta-u_\xi,\qquad K=i\left(1+u_\xi^2\right)^{1/2}-i\left(1+u_\eta^2\right)^{1/2},\qquad R=0,\\ &H=i\left(1+u_\xi^2\right)^{1/2}u_\eta-i\left(1+u_\eta^2\right)^{1/2}u_\xi,\\ &P=i\delta u_\xi u_{\xi\xi}\left(1+u_\xi^2\right)^{-1/2}+iu_{\xi\xi}\left[\left(1+u_\xi^2\right)^{1/2}-\left(1+u_\eta^2\right)^{1/2}\right],\\ &Q=i\delta u_\eta u_{\eta\eta}\left(1+u_\xi^2\right)^{-1/2}+iu_{\eta\eta}\left[\left(1+u_\xi^2\right)^{1/2}-\left(1+u_\eta^2\right)^{1/2}\right]. \end{aligned}\tag{2.18.3}$$

Определяющее соотношение на многообразии имеет вид

$$\begin{aligned} &\left[1+K^2\delta^{-2}\right]\left[Pu_\eta^2+Qu_\xi^2\right]+2KH\delta^{-2}[Pu_\eta+Qu_\xi]+\\ &\qquad+\left[1+H^2\delta^{-2}\right][P+Q]\Big|_{D\mathfrak{M}}\equiv 0. \end{aligned}\tag{2.18.4}$$

Выполняя здесь все действия, убеждаемся в справедливости тождества (2.18.2). Решение уравнения (2.18.0) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} z&=i\int\left(1+\phi'^2\right)^{1/2}d\xi+i\int\left(1+\psi'^2\right)^{1/2}d\eta+c_1,\\ x&=\xi+\eta+c_2,\\ y&=u+c_3. \end{aligned}$$

19. Уравнение (№ 22) [1]:

$$\begin{aligned} F_{19} &\equiv (z_y + yz_{yy})(z_{xx}+1) - (yz_{xy} - z_x - x)z_{xy} = 0, \\ &\equiv \left(z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2\right) + \frac{z_y}{y} z_{xx} + z_{yy} + \frac{z_x + x}{y} z_{xy} + \frac{z_y}{y} = 0. \end{aligned} \tag{2.19.0}$$

Покажем, что уравнение (2.19.0) может быть приведено к линейному

$$\mathfrak{M}^w: \qquad w_{yy} + \xi y^{-1} w_{\xi y} + y^{-1} w_y = 0. \tag{2.19.1}$$

Решение последнего легко находится из задачи приведения к уравнению $u_{\xi\eta} = 0$. Подстановка оказывается такой:

$$\eta = \varkappa(\xi, y, w) = \frac{\xi}{y}, \qquad \xi = \varepsilon(\xi, \eta, w) = \xi, \qquad u = \zeta(\xi, y, w) = w,$$

$$\delta = -\frac{\xi}{y^2}, \qquad K = -w_y, \qquad H = -\frac{1}{y}\left(\frac{\xi}{y} w_\xi + w_y\right),$$

$$P = -\frac{\xi}{y^2} w_{\xi\xi}, \qquad Q = \delta\left(w_{yy} + \frac{2}{y} w_y\right), \qquad R = \delta\left(w_{\xi y} - \frac{1}{\xi} w_y\right).$$

При этом решение (2.19.1) записывается в следующем виде ($u = \phi(\xi) + \psi(\eta)$):

$$w = \phi(\xi) - \psi\left(\frac{\xi}{y}\right). \tag{2.19.2}$$

Преобразование, осуществляющее приведение (2.19.0) к (2.19.1)

$$T_{19}: \quad \begin{aligned} &\zeta = -\xi w_\xi - \frac{1}{2} w_\xi^2 + w + c_1, \\ &\varepsilon = -w_\xi, \\ &\varkappa = y \end{aligned}$$

дает следующие значения вспомогательных величин на многообразии:

$$\delta = -w_{\xi\xi}, \qquad H = \delta(\xi + w_\xi), \qquad K = -\delta\left(\frac{1}{2} w_{\xi\eta} w_\xi + w_y\right), \qquad P = -\delta w_{\xi\xi}^2,$$

$$R = \delta^2 w_{\xi y}, \qquad Q = \delta\left\{-\frac{1}{2} w_{\xi\eta}^2 + \frac{1}{2} w_\xi \left(\frac{2}{y} w_{\xi\eta} + \frac{\xi}{y} w_{\xi\xi y}\right) - \frac{\xi}{y} w_{\xi y} - \frac{1}{y} w_y\right\}.$$

Подстановка последних в (2.19.0) обращает его в тождество. Решение уравнения (2.19.0) имеет вид

$$z = -\xi x - \frac{1}{2} x^2 + \phi(\xi) - \psi\left(\frac{\xi}{y}\right) + c_1,$$

$$x = -\left(\phi' - \frac{1}{y}\psi'\right), \qquad y = y,$$

иди в другой форме

$$z = -\xi x - \frac{1}{2} x^2 + \phi(\xi) - \psi\left(\frac{\xi}{y}\right) + c_1,$$

$$x = -\phi' + \frac{1}{y}\psi', \qquad y = y.$$

20. Уравнение (№ 19) [1]:

$$F_{20} \equiv [z_{xx} - z_x z_{yy}]^2 - z_y^2 z_{xx} z_{yy} = 0. \tag{2.20.0}$$

В отличие от рассмотренных ранее уравнений подстановка, осуществляющая приведение этого уравнения, зависит сразу от двух различных решений последнего. Это соответствует заданию многообразия системой двух линейных уравнений

$$\mathfrak{M}^S: \qquad u_\xi = 0, \qquad v_\eta = 0. \tag{2.20.1}$$

Решая систему определяющих уравнений, найдем

$$T_{20}: \quad \begin{aligned} &\zeta = \frac{1}{3}\left(2\eta - \xi^3\right)u' - \frac{2}{3}u + \int \xi^4 v'\,d\xi + c_1, \\ &\varepsilon = \frac{1}{\xi}u' + v + c_2, \\ &\varkappa = \xi u' - \int \xi^2 v'\,d\xi + c_3, \qquad c_i = \text{const}. \end{aligned} \tag{2.20.2}$$

Покажем, что данное преобразование обеспечивает приведение уравнения (2.20.0) к системе (2.20.1). Вычислял вспомогательные величины на многообразии, получаем

$$\begin{aligned} &\delta = 2\xi^{-1}u''\left(\xi^2 v' - u'\right), \qquad K = \delta(3\xi)^{-1}\left(2\xi^3 - \eta\right), \qquad H = \frac{1}{3}\delta\xi\left(\xi^3 + \eta\right), \\ &P = \frac{2}{3}\delta(\xi v' - u')\left(4\xi^2 + \eta\right), \qquad Q = \frac{2}{3}\delta u'', \qquad R \equiv 0, \\ &z_{xx} = \frac{2}{3}\delta^{-2}\left(\xi^2 v' - u'\right)u''\left[\xi^2\left(4\xi^2 + \eta\right)u'' + \xi^2 v' - u'\right] \equiv A \neq 0, \\ &z_{yy} = \xi^{-4}A, \qquad z_x = \frac{1}{3}\xi\left(\xi^3 + \eta\right), \qquad z_y = -\frac{1}{3\xi}\left(2\xi^2 - \eta\right). \end{aligned}$$

Определяющее соотношение

$$T_{20}F_{20}\Big|_{D\mathfrak{M}^S} \equiv 0$$

с учетом полученных результатов принимает вид

$$A^2\left\{1 + 9^{-1}\xi^{-6}\left(\xi^3 + \eta\right)^2 - \xi^{-4}\left[2\cdot 3^{-1}\xi\left(\xi^3 + \eta\right) + 9^{-1}\xi^{-2}\left(2\xi^3 - \eta\right)^2\right]\right\} \equiv 0,$$

откуда видно, что тождество выполняется за счет обращения в ноль сомножителя. Заменяя в (2.20.2) u и v произвольными функциями $\phi(\eta)$ и $\psi(\xi)$ получаем решение уравнения (2.20.0).

21. Уравнение (№ 3) Лиувилля [1]:

$$F_{21} \equiv z_{xx} + z_{yy} + \lambda_1^2 h e^{2hz} = 0. \tag{2.21.0}$$

Здесь, как и в предыдущем случае, многообразие зададим системой уравнений, дополненной условиями Коши–Римана:

$$\mathfrak{M}^S: \quad \begin{aligned} &\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, \qquad \phi_x = -\psi_y, \\ &\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0, \qquad \phi_y = \psi_x. \end{aligned} \tag{2.21.1}$$

При $u = \phi \pm i\psi$ это отвечает уравнению $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Линеаризующее преобразование ищем в виде

$$T_{21}: \quad z = \alpha \ln \zeta(\phi, \psi, \phi_x, \phi_y), \qquad (\alpha = \text{const}). \tag{2.21.2}$$

Определяющее соотношение будет таким:

$$T_{21} F_{21}\Big|_{{}_D\mathfrak{M}^S} \equiv 0. \tag{2.21.3}$$

Подставляя значения $\underset{2}{z}$, вычисленные на ${}_D\mathfrak{M}^S$, в (2.21.3) и выполняя расщепление по ϕ_{xx}^2 и ϕ_{xy}^2, находим

$$\zeta_{\phi_x\phi_x} - \zeta^{-1}\zeta_{\phi_x}^2 + \zeta_{\phi_y\phi_y} - \zeta^{-1}\zeta_{\phi_y}^2 = 0. \tag{2.21.4}$$

Расщепление по ϕ_{xx} и ϕ_{xy} даст совпадающие уравнения вида

$$\begin{aligned} &\phi_y[\zeta_\psi\zeta_{\phi_x} - \zeta_\phi\zeta_{\phi_y} - \zeta(\zeta_{\phi_x\psi} - \zeta_{\phi_y\psi})] + \\ &\qquad + \phi_x[\zeta_\phi\zeta_{\phi_x} + \zeta_\psi\zeta_{\phi_y} - \zeta(\zeta_{\psi\phi_x} + \zeta_{\psi_y\psi})] \equiv 0. \end{aligned} \tag{2.21.5}$$

Легко убедиться, что данное уравнение обладает решением

$$\zeta = w^{-1}(\phi, \psi)\left[\phi_x^2 + \phi_y^2 + c\right], \tag{2.21.6}$$

где $w(\phi, \psi)$ — произвольная функция. Последнее уравнение, остающееся после расщепления, но содержащее ϕ_{ij}, таково:

$$\begin{aligned} &\phi_x^2\left[\zeta_\phi^2 + \zeta_\psi^2 - \zeta(\zeta_{\phi\phi} + \zeta_{\psi\psi})\right] - 4\alpha^{-1}\lambda^2 h\zeta^{2\alpha h+2} + \\ &\qquad + \phi_y^2\left[\zeta_\phi^2 + \zeta_\psi^2 - \zeta(\zeta_{\phi\phi} + \zeta_{\psi\psi})\right] = 0, \qquad (4\lambda^2 = \lambda_1^2). \end{aligned} \tag{2.21.7}$$

Если в него подставить ζ из (2.21.6), получим $\alpha = (2h)^{-1}$, $c = 0$, и уравнение

$$w_{\phi\phi} + w_{\psi\psi} - w^{-1}\left(w_\phi^2 + w_\psi^2\right) = 8\lambda^2 h^2 \equiv k. \tag{2.21.8}$$

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + u_{yy} - u^{-1}\left[u_x^2 + u_y^2\right] = k. \tag{2.21.8$'$}$$

Будем искать решения вида $u = u(x + y)$. Тогда

$$u'' - u^{-1}(u')^2 = \frac{1}{2}k.$$

Решая последнее, находим

$$\frac{d(u-a)}{\sqrt{(u-a)^2 - a^2}} = \sqrt{c}dx, \tag{2.21.9}$$

где $a = k(2c)^{-1}$, c — произвольная постоянная. Интегрирование (2.21.9) дает несколько форм решений уравнения (2.21.8′):

$$\begin{aligned} &1) \quad a^2 > 0, \quad c \neq 0, \\ &\quad\; u_{1,2} = \frac{k}{2c}\left\{\begin{matrix} \text{ch} \\ \mp i\,\text{sh} \end{matrix}\left[\sqrt{c}(x+y) + A_1\right] + 1\right\}; \end{aligned} \tag{2.21.10}$$

$$
\begin{aligned}
&2) \quad a^2 > 0, \quad c = 0, \\
&\qquad u_3 = -\frac{k}{4}[x + y + A_3]^2;
\end{aligned}
\tag{2.21.11}
$$

$$
\begin{aligned}
&3) \quad a^2 = -b^2 < 0, \quad c \neq 0, \quad \sqrt{c} = (i \pm 1)\sqrt{\tfrac{\sigma}{2}}, \quad \sigma \in R, \\
&\qquad u_{4,5} = -\frac{k}{2\sigma}\left\{ \begin{matrix} \mathrm{sh} \\ \pm i\,\mathrm{ch} \end{matrix} \left[\sqrt{c}(x + y) + A_4\right] + 1 \right\}.
\end{aligned}
\tag{2.21.12}
$$

Кроме того, можно указать еще одно решение уравнения (2.21.8′)

$$
u_6 = \left[x^2 + y^2 + 1\right]^2 \frac{k}{8}, \tag{2.21.13}
$$

которое получится, если рассмотреть случай ($i = x, y$)

$$
u_{ii} = N_i = \text{const}, \qquad u_i^2 u^{-1} = M_i = \text{const}, \qquad \sum_i N_i - \sum_i M_i = k.
$$

Найденные выше решения уравнения (2.21.8′) можно использовать для построения решений уравнения (2.21.0). Получим соответственно:

$$
z_{1,2} = \frac{1}{2h} \ln \frac{2c\left(\phi_x^2 + \phi_y^2\right)}{8h^2\lambda^2 \left\{ \begin{matrix} \mathrm{ch} \\ \pm i\,\mathrm{sh} \end{matrix} [\sqrt{c}(\phi + \psi) + A_1] + 1 \right\}}; \tag{2.21.10′}
$$

$$
z_3 = \frac{1}{2h} \ln \frac{-4\left(\phi_x^2 + \phi_y^2\right)}{8h^2\lambda^2(\phi + \psi + A_3)^2}; \tag{2.21.11′}
$$

$$
\begin{aligned}
&z_{4,5} = \frac{1}{2h} \ln \frac{-2\sigma\left(\phi_x^2 + \phi_y^2\right)}{8h^2\lambda^2 \left\{ \begin{matrix} \mathrm{sh} \\ \pm i\,\mathrm{ch} \end{matrix} [\sqrt{c}(\phi + \psi) + A_4] + i \right\}}, \\
&\sqrt{c} = (i \pm 1)\sqrt{\frac{\sigma}{2}}, \qquad \sigma \in R;
\end{aligned}
\tag{2.21.12′}
$$

$$
z_6 = \frac{1}{2h} \ln \frac{\phi_x^2 + \phi_y^2}{h^2\lambda^2\left(\phi^2 + \psi^2 + 1\right)^2}. \tag{2.21.13′}
$$

§ 3. Линеаризация некоторых многомерных уравнений

Наличием произвольных функций и постоянных интегрирования в построенных решениях двумерных нелинейных уравнений можно воспользоваться при отыскании решений некоторых их многомерных обобщений.

1. Один из возможных методов трехмерного обобщения рассмотрим на примере уравнения (2.1.0). Заметим, что два уравнения

$$
z_{xy} + zz_x = 0, \qquad \tilde{z}_{x\tilde{y}} + \tilde{z}\tilde{z}_x = 0
$$

могут быть независимо приведены к линейным $u_{xy} = 0$ и $u_{x\tilde{y}} = 0$, соответственно, подстановками (2.1.11′)–(2.1.14′). Это обстоятельство наводит на мысль о существовании подстановок, линеаризующих уравнение

$$
z_{xy} + z_{xt} + zz_x = 0. \tag{3.1.1}
$$

Решением задачи приведения могут быть получены подстановки

$$z_{1,2} = -2b(u_y + u_t) \begin{matrix}\mathrm{th}\\ \mathrm{cth}\end{matrix}[-(bu + c_1)] - \frac{u_{yy}}{u_y} - \frac{u_{tt}}{u_t},$$

$$z_3 = \frac{2(u_y + u_t)}{u + c_3} - \frac{u_{yy}}{u_y} - \frac{u_{tt}}{u_t},$$

$$z_{4,5} = -2b(u_y + u_t) \begin{matrix}\mathrm{tg}\\ (-1)\mathrm{ctg}\end{matrix}[bu + c_4] - \frac{u_{yy}}{u_y} - \frac{u_{tt}}{u_t},$$

и некоторые дополнительные условия на многообразие, вытекающие из системы определяющих уравнений. Получим эти условия здесь более простым путем, при этом убедимся в справедливости указанных подстановок. Многообразие зададим системой соотношений

$$\mathfrak{M}^S: \quad u_{xy} = u_{xt} = u_{yt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = \phi(y) + \psi(t) + \omega(x).$$

Вычислим производные на многообразии для каждой из подстановок и подставим найденные значения в уравнение (3.1.1). Потребуем обращения его в тождество на многообразии. Это возможно при условии

$$u_{tt}u_t^{-2} + u_{yy}u_y^{-2} = 0. \tag{3.1.2}$$

С учетом того, что $u = \phi(y) + \psi(t) + \omega(x)$, получим два уравнения

$$\ddot{\phi} = \lambda\dot{\phi}^2, \qquad \ddot{\psi} = -\lambda\dot{\psi}^2, \qquad \lambda = \mathrm{const}.$$

Решение их дает следующие выражения:

$$\phi = -\frac{1}{\lambda}\left\{\ln[-(\lambda y + A_2)] + A_1\right\},$$

$$\psi = -\frac{1}{\lambda}\left\{\ln[\lambda t - A_4] + A_3\right\},$$

где A_i, $i = \overline{1,4}$ — произвольные постоянные. Теперь соответствующие решения имеют вид

$$z_{1,2} = \lambda\left[\frac{1}{\lambda y + A_2} + \frac{1}{A_4 - \lambda t}\right]\left\{\frac{2b}{\lambda}\ \begin{matrix}\mathrm{th}\\ \mathrm{cth}\end{matrix}\left[\ln\left[\frac{\lambda t - A_4}{-\lambda y - A_2}\right]^{-b/\lambda} + \omega_1(x) + c_1\right] + 1\right\},$$

$$z_3 = \lambda\left[\frac{1}{\lambda y + A_2} + \frac{1}{A_4 - \lambda t}\right]\left\{-\frac{2}{\lambda}\left[\ln\left[\frac{\lambda t - A_4}{-\lambda y - A_2}\right]^{1/\lambda} + \omega_2(x) + c_2\right] + 1\right\}, \tag{3.1.3}$$

$$z_{4,5} = \lambda\left[\frac{1}{\lambda y + A_2} + \frac{1}{A_4 - \lambda t}\right]\left\{\frac{2b}{\lambda}\ \begin{matrix}\mathrm{tg}\\ (-1)\,\mathrm{ctg}\end{matrix}\left[\ln\left[\frac{\lambda t - A_4}{-\lambda y - A_2}\right]^{b/\lambda} + \omega_4(x) + c_4\right] + 1\right\}.$$

При $u_{tt} = u_{yy} = 0$ получим $u = \omega(x) + \alpha y + \beta t + \gamma$, α, β, γ — const. Решение оказываются такими:

$$z'_{1,2} = -2b(\alpha + \beta) \begin{matrix}\mathrm{th}\\ \mathrm{cth}\end{matrix}[-b(\omega(x) + \alpha y + \beta t + \gamma) + c_1],$$

$$z'_3 = \frac{2(\alpha + \beta)}{\omega_3(x) + \alpha y + \beta t + c_3}, \tag{3.1.4}$$

$$z'_{4,5} = -2b(\alpha + \beta) \begin{matrix}\mathrm{tg}\\ (-1)\,\mathrm{ctg}\end{matrix}[b(\omega_4(x) + \alpha y + \beta t + \gamma) + c_4].$$

2. Рассмотрим уравнение

$$z_{xy} + z_{xt} + z_{yt} + e^z = 0. \tag{3.2.0}$$

Рассуждая как и в предыдущем случае, находим, что подстановки могут быть выбраны в виде

$$z_{1,2} = \ln\left[\pm\frac{b^2}{a^2}(u_xu_y + u_tu_x + u_yu_t)\left\{1 - \begin{matrix}\mathrm{th}^2\\ \mathrm{cth}^2\end{matrix}\left[-\frac{b}{\sqrt{2}}(u - c_1)\right]\right\}\right], \tag{3.2.1}$$

$$z_3 = \ln\left[\frac{\mp 2(u_xu_y + u_tu_x + u_yu_t)}{a^2(u + c_3)^2}\right], \tag{3.2.2}$$

$$z_{4,5} = \ln\left[\mp\frac{b^2}{a^2}(u_xu_y + u_tu_x + u_yu_t)\left\{1 + \begin{matrix}\mathrm{tg}^2\\ \mathrm{ctg}^2\end{matrix}\left[\frac{b}{\sqrt{2}}(u - c_4)\right]\right\}\right]. \tag{3.2.3}$$

Записанные подстановки могут быть получены вместе с дополнительными условиями решением задачи приведения на многообразие

$$\mathfrak{M}^S: \quad u_{xy} = u_{xt} = u_{yt} = 0, \qquad u = \phi(x) + \psi(y) + \omega(t). \tag{3.2.4}$$

Вычислив значения производных па многообразии для каждого из выражений (3.2.1)–(3.2.3), подставим их в левую часть уравнения (3.2.0). Обращение его в тождество возможно при выполнении соотношений

$$\frac{\phi''}{(\phi')^2} = \lambda, \qquad \frac{\psi''}{(\psi')^2} = \mu, \qquad \frac{\omega''}{(\omega')^2} = \nu, \tag{3.2.5}$$

где

$$\mu^{-1} + \nu^{-1} = \lambda^{-1}, \qquad \mu, \nu, \lambda \quad \text{— постоянные.} \tag{3.2.6}$$

Нетрудно получить отсюда выражения для ϕ, ψ, ω:

$$\phi = -\lambda^{-1}\left\{\ln[-(\lambda x + A_2)] + A_1\right\}, \tag{3.2.7}$$

$$\psi = -\mu^{-1}\left\{\ln[-(\mu y + A_4)] + A_3\right\}, \tag{3.2.8}$$

$$\omega = -\nu^{-1}\left\{\ln[-(\nu t + A_6)] + A_5\right\}. \tag{3.2.9}$$

A_i, $i = \overline{1,6}$ — произвольные постоянные. Заметим, что

$$\phi' = -(\lambda x + A_2)^{-1}, \qquad \psi' = -(\mu y + A_4)^{-1}, \qquad \omega' = -(\nu t + A_6)^{-1}.$$

Это позволяет записать несколько форм решения уравнения (3.2.0):

$$z_{1,2} = \ln\left[\pm\frac{b^2}{a^2}\left\{\frac{1}{(\lambda x + A_2)(\mu y + A_4)} + \frac{1}{(\nu t + A_6)(\lambda x + A_2)} + \frac{1}{(\mu y + A_4)(\nu t + A_6)}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\left\{1 - \begin{matrix}\mathrm{th}^2\\ \mathrm{cth}^2\end{matrix}\left[\ln(-\lambda x - A_2)^{\frac{b}{\sqrt{2}\lambda}} + \ln(-\mu y - A_4)^{\frac{b}{\sqrt{2}\mu}} + \ln(-\nu t - A_6)^{\frac{b}{\sqrt{2}\nu}} + c_1\right]\right\}\right],$$

$$z_3 = \ln\left[\mp\frac{2}{a^2}\left\{\frac{1}{(\lambda x + A_2)(\mu y + A_4)} + \frac{1}{(\nu t + A_6)(\lambda x + A_2)} + \frac{1}{(\mu y + A_4)(\nu t + A_6)}\right\}\times\right.$$

$$\times\left\{\ln(-\lambda x - A_2)^{-\frac{1}{\lambda}} + \ln(-\mu y - A_4)^{-\frac{1}{\mu}} + \ln(-\nu t - A_6)^{-\frac{1}{\nu}} + c_3\right\}^{-2}\Bigg], \tag{3.2.10}$$

$$z_{4,5} = \ln\left[\mp\frac{b^2}{a^2}\left\{\frac{1}{(\lambda x + A_2)(\mu y + A_4)} + \frac{1}{(\nu t + A_6)(\lambda x + A_2)} + \frac{1}{(\mu y + A_4)(\nu t + A_6)}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\left\{1 + \begin{matrix}\mathrm{tg}^2\\ \mathrm{ctg}^2\end{matrix}\left[\ln(-\lambda x - A_2)^{-\frac{b}{\sqrt{2}\lambda}} + \ln(-\mu y - A_4)^{-\frac{b}{\sqrt{2}\mu}} + \ln(-\nu t - A_6)^{-\frac{b}{\sqrt{2}\nu}} + c_4\right]\right\}\right],$$

Условия (3.2.5). (3.2.6) будут выполнены и при $\phi'' = \psi'' = \omega'' = \lambda = \mu = \nu = 0$, когда $u = \alpha x + \beta y + \gamma t + \delta$. Решения в этом случае оказываются такими:

$$z_{1,2} = \ln\left[\pm\frac{b^2}{a^2}(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)\left\{1 - \begin{matrix}\mathrm{th}^2\\ \mathrm{cth}^2\end{matrix}\left[-\frac{b}{\sqrt{2}}(\alpha x + \beta y + \gamma t + \delta - c_1)\right]\right\}\right],$$

$$z_3 = \ln\left[\frac{\mp 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)}{a^2(\alpha x + \beta y + \gamma t + \delta + c_3)^2}\right], \tag{3.2.11}$$

$$z_{4,5} = \ln\left[\mp\frac{b^2}{a^2}(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)\left\{1 + \begin{matrix}\mathrm{tg}^2\\ \mathrm{ctg}^2\end{matrix}\left[\frac{b}{\sqrt{2}}(\alpha x + \beta y + \gamma t + \delta - c_4)\right]\right\}\right],$$

Замечание. В замечании к п.2 раздела II были построены решения уравнения ($2.2^{\text{а}}.0$). Это позволяет так же, как это было сделано выше, найти решения уравнения

$$z_{xx} + z_{yy} + z_{tt} + \alpha e^z = 0, \qquad (\alpha = \pm a^2) \tag{3.2$^{\text{а}}$.0}$$

сведением к уравнению

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{tt} = 0.$$

Линеаризующие подстановки выберем в виде

$$z_{1,2} = \ln\left[\pm\frac{b^2}{a^2}\left(u_x^2 + u_y^2 + u_t^2\right)\left\{1 - \begin{matrix}\mathrm{th}^2\\ \mathrm{cth}^2\end{matrix}\left[-\frac{b}{\sqrt{2}}(u - c_1)\right]\right\}\right],$$

$$z_3 = \ln\left[\frac{\mp 2\left(u_x^2 + u_y^2 + u_t^2\right)}{a^2(u + c_3)^2}\right], \tag{3.2$^{\text{а}}$.1}$$

$$z_{4,5} = \ln\left[\mp\frac{b^2}{a^2}\left(u_x^2 + u_y^2 + u_t^2\right)\left\{1 + \begin{matrix}\mathrm{tg}^2\\ \mathrm{ctg}^2\end{matrix}\left[\frac{b}{\sqrt{2}}(u - c_4)\right]\right\}\right],$$

Если дополнительно потребовать, чтобы было $u_{ij} = 0$, т.е.

$$u = \alpha x + \beta y + \gamma t + \delta,$$

получим несколько соответствующих форм решения ($3.2^{\text{а}}.0$)

$$z_{1,2} = \ln\left[\pm\frac{b^2}{a^2}\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)\left\{1 - \begin{matrix}\mathrm{th}^2\\ \mathrm{cth}^2\end{matrix}\left[-\frac{b}{\sqrt{2}}(\alpha x + \beta y + \gamma t + \delta - c_1)\right]\right\}\right],$$

$$z_3 = \ln\left[\frac{\mp 2\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)}{a^2(\alpha x + \beta y + \gamma t + \delta + c_3)^2}\right], \tag{3.2$^{\text{а}}$.2}$$

$$z_{4,5} = \ln\left[\mp\frac{b^2}{a^2}\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)\left\{1 + \begin{matrix}\mathrm{tg}^2\\ \mathrm{ctg}^2\end{matrix}\left[\frac{b}{\sqrt{2}}(\alpha x + \beta y + \gamma t + \delta - c_4)\right]\right\}\right].$$

Еще одна возможность построения решений уравнения (3.2ª.0) связана со следующим замечанием. Введение новой переменной

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(y+t)$$

для

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{tt} = 0$$

дает

$$\mathfrak{M}: \quad u_{xx} + u_{\eta\eta} = 0$$

и позволяет записать (3.2ª.0) в виде

$$z_{xx} + z_{\eta\eta} + \lambda_1^2 h e^{2hz} = 0.$$

Решения последнего были построены ранее, что позволяет записать такие решения уравнения (3.2ª.0): $\left(\phi = \phi\left(\frac{y+t}{\sqrt{2}}; x\right),\ \psi = \psi\left(\frac{y+t}{\sqrt{2}}; x\right)\right)$,

$$\begin{aligned}
z'_{1,2} &= \frac{1}{2h}\ln\left[2\sqrt{2}c\left(\phi_x^2+\phi_\eta^2\right)\left(8h^2\lambda^2\right)^{-1}\left\{\begin{matrix}\mathrm{ch}\\ \pm i\,\mathrm{sh}\end{matrix}\left[\sqrt{c}(\phi+\psi)+A_1\right]+1\right\}^{-1}\right];\\
z'_3 &= \frac{1}{2h}\ln\left[-4\sqrt{2}\left(\phi_x^2+\phi_\eta^2\right)\left(8h^2\lambda^2\right)^{-1}\left\{\phi+\psi+A_3\right\}^{-2}\right];\\
z'_{4,5} &= \frac{1}{2h}\ln\left[-2\sqrt{2}\sigma\left(\phi_x^2+\phi_\eta^2\right)\left(8h^2\lambda^2\right)^{-1}\left\{\begin{matrix}\mathrm{sh}\\ \pm\,\mathrm{ch}\end{matrix}\left[\sqrt{c}(\phi+\psi)+A_4\right]+i\right\}^{-1}\right];\\
z'_6 &= \frac{1}{2h}\ln\left[\sqrt{2}\left(\phi_x^2+\phi_\eta^2\right)\left(h^2\lambda^2\right)^{-1}\left\{\phi^2+\psi^2+1\right\}^{-2}\right].
\end{aligned} \tag{3.2ª.3}$$

3. Обратимся теперь к уравнению (2.3.0). Для него характерно то, что на многообразии, заданном уравнением

$$\mathfrak{M}^1: \quad u_{x_0x_1} - \frac{\lambda_{x_0}}{2\lambda}u_{x_1} - \lambda u = 0, \tag{3.3.1}$$

преобразование

$$z = -\int u^2\,dx_0 + \int \lambda^{-1}u_{x_1}^2 dx_1 \tag{3.3.2}$$

обращает z_{x_0} тождественно в ноль:

$$z_{x_0}\Big|_{\mathfrak{M}^1} = -u^2 + \int\left[-\frac{\lambda_{x_0}}{\lambda^2}u_{x_1}^2 + \frac{1}{\lambda}2u_{x_1}\left(\frac{\lambda_{x_0}}{2\lambda}u_{x_1}+\lambda u\right)\right]dx_1 = -u^2+u^2 \equiv 0.$$

Отсюда следует, что на $\mathfrak{M}^1$ всегда будет иметь место тождество $z_{x_0x_1} \equiv 0$. Таким образом, всякое решение, полученное из решения уравнения (3.3.1) подстановкой (3.3.2), окажется решением широкого класса уравнений, например, такого:

$$\Phi(z_{x_0x_1}, z_{x_0}) = z_{x_0} f(x_0, x_1, z, \underset{1}{z}, \ldots, \underset{n}{z}). \tag{3.3.3}$$

Здесь $\Phi(z_{x_0x_1}, z_{x_0})$ может быть, например, однородной функцией своих аргументов, $f(\cdot)$ — произвольная функция.

Зададим теперь многообразие $\mathfrak{M}^N$ уравнением

$$\mathfrak{M}^N: \quad \sum_{i=1}^{N} u_{x_0x_i}u_{x_i} - \frac{\lambda_{x_0}}{2\lambda}\sum_{i=1}^{N} u_{x_i}^2 - \lambda u\sum_{i=1}^{N} u_{x_i} = 0. \tag{3.3.4}$$

Легко проверить, что по-прежнему условие $z_{x_0}\Big|_{\mathfrak{M}^N} \equiv 0$ будет выполнено, если подстановку взять в виде

$$z = -N\int u^2\,dx_0 + \sum_{i=1}^{N}\int \lambda^{-1}u_{x_i}^2\,d_{x_i}. \tag{3.3.5}$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} z_{x_0}\Big|_{\mathfrak{M}^N} &= -Nu^2 + \sum_{i=1}^{N}\left[-\frac{\lambda_{x_0}}{\lambda^2}u_{x_i}^2 + 2\lambda^{-1}u_{x_i}u_{x_0x_i}\right]dx_i\Big|_{\mathfrak{M}^N} = \\ &= -Nu^2 + \int\left[-\frac{\lambda_{x_0}}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{N}u_{x_i}^2 + 2\lambda^{-1}\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_{x_0}}{2\lambda}u_{x_i}^2 + \lambda u u_{x_i}\right]dx_i = \\ &= -Nu^2 + \int\sum_{i=1}^{N}2uu_{x_i}\,dx_i = -Nu^2 + Nu^2 \equiv 0. \end{aligned}$$

Теперь при соблюдении всех перечисленных выше условий многомерным аналогом уравнения (3.3.3) оказывается такое:

$$\Phi(z_{x_0}, z_{x_0x_i}) = z_{x_0}f(\cdot).$$

4. Получим теперь решение такого многомерного расширения уравнения (2.4.0)

$$z_{xy} + z_{xt} + g'e^z + gz_xe^z = 0. \tag{3.4.0}$$

Зададим многообразие $\mathfrak{M}$ уравнением

$$\mathfrak{M}: \quad u_{xt} + u_{xy} = g'g^{-1}(u_y + u_t),$$

решением которого является функция

$$u = \phi(x) + g(x)[\psi(y) + \omega(t)].$$

Двум найденным в п. 4 раздела II решениям уравнения (2.4.0) поставим в соответствие такие подстановки:

$$z_1 = \ln\frac{c_1(u_y + u_t)}{c_3(x)\exp(\alpha g^{-1}u) - c_1\alpha^{-1}g^2}; \tag{3.4.1}$$

$$z_2 = \ln\frac{u_y + u_t}{gu}. \tag{3.4.2}$$

Отметим, что в этом примере не появляется никаких дополнительных ограничений на многообразие. Соответствующие решения будут вида:

$$z_1 = \ln \frac{c_1(\phi'(y) + \omega'(t))g(x)}{c_3(x)\exp \alpha g^{-1}[\psi(x) + g(x)(\phi(y) + \omega(t))] - c_1\alpha^{-1}g^2}; \tag{3.4.1'}$$

$$z_2 = \ln \left[(\phi'(y) + \omega'(t))[\psi(x) + g(x)(\phi(y) + \omega(t))]^{-1}\right]. \tag{3.4.2'}$$

Возможность распространения на большее число независимых переменных очевидна.

5. Многомерное расширение уравнения (2.21.0) запишем в форме

$$\Delta_4 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + u_{tt} = -\lambda_1^2 h e^{2hu}. \tag{3.5.0}$$

Многообразие зададим системой соотношений

$$\mathfrak{M}^S: \begin{array}{llll} \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, & \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0, & \phi_x = \psi_y, & \phi_y = -\psi_x, \\ \phi_{zz} + \phi_{tt} = 0, & \psi_{zz} + \psi_{tt} = 0, & -\phi_z = \psi_t, & \phi_t = \psi_z. \end{array} \tag{3.5.1}$$

Рассмотрим нелокальные замены функции u:

$$u_{1,2} = \frac{1}{2h} \ln \frac{2c\left(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2 + \phi_t^2\right)}{8h^2\lambda^2 \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{ch} \\ \pm i\,\mathrm{sh} \end{array} [\sqrt{c}(\phi + \psi) + A_1] + 1 \right\}}, \tag{3.5.2}$$

$$u_3 = \frac{1}{2h} \ln \frac{-4\left(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2 + \phi_t^2\right)}{8h^2\lambda^2(\phi + \psi + A_3)^2}, \tag{3.5.3}$$

$$u_{4,5} = \frac{1}{2h} \ln \frac{-2\sigma\left(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2 + \phi_t^2\right)}{8h^2\lambda^2 \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{sh} \\ \pm i\,\mathrm{ch} \end{array} [\sqrt{c}(\phi + \psi) + A_4] + i \right\}},$$

$$\sqrt{c} = (i \pm 1)\sqrt{\frac{\sigma}{2}}, \qquad \sigma \in R, \tag{3.5.4}$$

$$u_6 = \frac{1}{2h} \ln \frac{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2 + \phi_t^2}{h^2\lambda^2\left(\phi^2 + \psi^2 + 1\right)^2}. \tag{3.5.5}$$

Подстановка каждой из них в уравнение (3.5.0) на $\mathfrak{M}^S$ дает дополнительные условия, связывающие ϕ_{ij} и ϕ_i. Ввиду громоздкости его здесь выписывать не будем. Для всех замен эти условия могут быть удовлетворены, например, функциями, связанными соотношениями (3.5.1) и имеющими вид

$$\phi = \phi[(x + t), (y + z)], \qquad \psi = \psi[(x + t), (y + z)].$$

Другое решение получим, полагая $\phi_{ij} = \psi_{ij} = 0$, $(i, j = x, y, z, t)$, когда

$$\phi = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t + \mu,$$
$$\psi = -\beta x + \alpha y + \delta z - \gamma t + \nu,$$

α, β, γ, δ, μ, ν — произвольные постоянные.

Соотношения (3.5.2)–(3.5.5) в этом случае также являются решениями уравнения (3.5.0).

6. Воспользуемся известным решением уравнения (2.5.0) для исследования уравнения

$$F(x, y, z, \dots, \underset{n}{z}) z_{tt} + z_y z_{xx} - z_x z_{xy} = 0. \tag{3.6.0}$$

Потребуем выполнения условий

$$z_{tt} = 0, \qquad z_y z_{xx} - z_x z_{xy} = 0. \tag{3.6.1}$$

Решение второго записывается в виде $z = \phi(x + \psi(y, t))$. Первое уравнение тогда дает соотношение

$$\phi'' \psi_t^2 + \phi' \psi_{tt} = 0.$$

Отсюда сразу же следует

$$\frac{\phi''}{\phi'} = -\frac{\psi_{tt}}{\psi_t^2} = k = \mathrm{const}.$$

Интегрируя эти два уравнения, находим

$$\begin{aligned} &\phi = J_1 k^{-1} \exp[k(x + \psi)], \\ &\psi = k^{-1} \ln(kt + J_2) + J_3(y), \qquad J_1 = \mathrm{const}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$z = J_1 k^{-1} (kt + J_2(y)) \exp[k(x + J_3(y))]. \tag{3.6.2}$$

Другая возможность увеличения размерности уравнения (2.5.0) связана с переходом к преобразованиям в пространстве большего числа переменных x, y, z:

$$T: \quad \begin{aligned} &u' = u' = \zeta(x, y, z, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{n}{u}), \\ &x' = \xi = \varepsilon^x(x, y, z, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{m}{u}), \\ &y' = \eta = \varepsilon^y(x, y, z, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{k}{u}), \\ &z' = \tau = \varepsilon^z(x, y, z, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{s}{u}). \end{aligned}$$

При таких преобразованиях производные вычисляются по формулам

$$u_i = \frac{d^i}{d}, \qquad u_{ij} = \frac{D_{ij}}{D}, \tag{3.6.3}$$

где

$$\begin{aligned} &d = D_y \varepsilon_D^y [\varepsilon^x, \varepsilon^z]_{x,z} + D_x \varepsilon_D^y [\varepsilon^z, \varepsilon^x]_{y,z} + D_z \varepsilon_D^y [\varepsilon^z, \varepsilon^x]_{x,y}, \\ &d^x = D_y \varepsilon_D^y [\zeta, \varepsilon^z]_{x,z} + D_x \varepsilon_D^y [\zeta, \varepsilon^z]_{z,y} + D_z \varepsilon_D^y [\zeta, \varepsilon^z]_{y,x}, \\ &d^y = D_z \varepsilon_D^z [\zeta, \varepsilon^x]_{y,x} + D_y \varepsilon_D^z [\zeta, \varepsilon^x]_{x,z} + D_x \varepsilon_D^z [\zeta, \varepsilon^x]_{z,y}, \\ &d^z = D_x \varepsilon_D^x [\zeta, \varepsilon^y]_{z,y} + D_y \varepsilon_D^x [\zeta, \varepsilon^y]_{x,z} + D_z \varepsilon_D^x [\zeta, \varepsilon^y]_{y,x}. \end{aligned}$$

Определитель D имеет вид:

$$D = \begin{vmatrix} (D_x\varepsilon^x)^2 & (D_x\varepsilon^y)^2 & 2D_x\varepsilon^x D_x\varepsilon^y & (D_x\varepsilon^z)^2 & 2D_x\varepsilon^x D_x\varepsilon^z & 2D_x\varepsilon^y D_x\varepsilon^z \\ (D_y\varepsilon^x)^2 & (D_y\varepsilon^y)^2 & 2D_y\varepsilon^x D_y\varepsilon^y & (D_y\varepsilon^z)^2 & 2D_y\varepsilon^x D_y\varepsilon^z & 2D_y\varepsilon^y D_y\varepsilon^z \\ D_x\varepsilon^x D_y\varepsilon^x & D_x\varepsilon^y D_y\varepsilon^y & \begin{matrix} D_x\varepsilon^x D_y\varepsilon^y \\ +D_y\varepsilon^x D_x\varepsilon^y \end{matrix} & D_x\varepsilon^z D_y\varepsilon^z & \begin{matrix} D_x\varepsilon^x D_y\varepsilon^z \\ +D_y\varepsilon^x D_x\varepsilon^z \end{matrix} & \begin{matrix} D_x\varepsilon^y D_y\varepsilon^z \\ +D_y\varepsilon^y D_x\varepsilon^z \end{matrix} \\ (D_z\varepsilon^x)^2 & (D_z\varepsilon^y)^2 & 2D_z\varepsilon^x D_z\varepsilon^y & (D_z\varepsilon^z)^2 & 2D_z\varepsilon^x D_z\varepsilon^z & 2D_z\varepsilon^y D_z\varepsilon^z \\ D_x\varepsilon^x D_z\varepsilon^x & D_x\varepsilon^y D_z\varepsilon^y & \begin{matrix} D_x\varepsilon^x D_z\varepsilon^y \\ +D_z\varepsilon^x D_x\varepsilon^y \end{matrix} & D_x\varepsilon^z D_z\varepsilon^z & \begin{matrix} D_x\varepsilon^x D_z\varepsilon^z \\ +D_z\varepsilon^x D_x\varepsilon^z \end{matrix} & \begin{matrix} D_x\varepsilon^y D_z\varepsilon^z \\ +D_z\varepsilon^y D_x\varepsilon^z \end{matrix} \\ D_y\varepsilon^x D_z\varepsilon^x & D_y\varepsilon^y D_z\varepsilon^y & \begin{matrix} D_y\varepsilon^x D_z\varepsilon^y \\ +D_z\varepsilon^x D_y\varepsilon^y \end{matrix} & D_y\varepsilon^z D_z\varepsilon^z & \begin{matrix} D_y\varepsilon^x D_z\varepsilon^z \\ +D_z\varepsilon^x D_y\varepsilon^z \end{matrix} & \begin{matrix} D_y\varepsilon^y D_z\varepsilon^z \\ +D_z\varepsilon^y D_y\varepsilon^z \end{matrix} \end{vmatrix}. \quad (3.6.4)$$

Определители D_{ij} получаются заменой элементов столбцов в D с индексами ij на элементы b^{ij} $(i,j = x,y,z)$

$$b^{ij} = [dD_{ij}\zeta - d^x D_{ij}\varepsilon^x - d^y D_{ij}\varepsilon^y - d^z D_{ij}\varepsilon^z]\, d^{-1}. \quad (3.6.5)$$

Легко убедиться, что преобразование

$$T: \qquad \zeta = x, \qquad \varepsilon^x = u, \qquad \varepsilon^y = y, \qquad \varepsilon^z = z \quad (3.6.6)$$

уравнения $u'_{\xi\eta} = 0$, $(u = \phi(\xi,\tau) + \psi(\eta,\tau) + \omega(\tau))$ дает уравнение

$$u_y u_{xx} - u_x u_{xy} = 0.$$

Изменим преобразование (3.6.6), полагая его таким:

$$T_1: \qquad \zeta = x, \qquad \varepsilon^x = u + \int u_z\, dx, \qquad \varepsilon^y = y, \qquad \varepsilon^z = z.$$

Из $u'_{\xi\eta} = 0$ сразу же получим уравнение

$$(u_x + u_z)(u_{xy} + u_{yz}) = (u_{xx} + u_{xz}) \int u_{zy}\, dx, \quad (3.6.7)$$

решение которого имеет вид

$$x = \phi\left(u + \int u_z\, dx, z\right) + \psi(y,z) + \omega(z).$$

Второй пример получаем для преобразования переменных

$$T_2: \qquad \zeta = x + \int u_z\, dx, \qquad \varepsilon^x = u, \qquad \varepsilon^y = y, \qquad \varepsilon^z = z.$$

В этом случае получается

$$d = u_x, \qquad d^x = 1 + u_z, \qquad b^{xx} = u_x^{-1}(u_x u_{xx} - (1+u_z)u_{xx}),$$
$$D_{xx}\zeta = u_{xz}, \qquad D_{xy}\zeta = u_{yz}, \qquad b^{yx} = u_x^{-1}(u_x u_{yz} - (1+u_z)u_{xy}).$$

Простой подсчет дает уравнение

$$(1+u_z)(u_x u_{xx} - u_y u_{xy}) = u_x(u_x u_{xz} - u_y u_{yz}). \quad (3.6.8)$$

Решение уравнения (3.6.8) выглядит так:

$$x + \int u_z\, dx = \phi(u,z) + \psi(y,z) + \omega(z).$$

§ 4. Групповые свойства уравнений, допускающих линеаризацию

В этом параграфе приведем кратко результаты исследований групповых свойств уравнений, рассмотренных в предыдущих параграфах.

Теорема 1. *Уравнения (2.1.0), (2.2.0), (2.2a.0), (2.4.0)–(2.15.0), (2.21.0), (2.21.8) инвариантны относительно бесконечной группы Ли.*

Утверждение доказывается прямым вычислением по стандартной методике С. Ли [5].

Замечание. Перечисленные в теореме 1 уравнения, линеаризуются либо точечной заменой переменных, либо нелокальным преобразованием функции. Уравнение (2.3.0), линеаризуемое с помощью интегральной подстановки (2.3.5) для зависимой переменной, и уравнения (2.16.0) ,(2.17.0) (2.19.0), (2.20.0), линеаризация которых достигается нелокальной заменой по всем переменным, указанным свойством не обладают.

Теорема 2. *1) Базисные элементы алгебры инвариантности уравнения минимальной поверхности (2.18.0) (уравнения Плато) имеют вид:*

$$\begin{aligned} &X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = \frac{\partial}{\partial u}, \qquad X_4 = u\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial u}, \\ &X_5 = u\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial u}, \qquad X_6 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_7 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + u\frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \tag{4.1.0}$$

2) Замена независимой переменной

$$y = iv \tag{4.1.1}$$

приводит уравнение (2.18.0) к уравнению Борна–Индельфа

$$\left(1 - u_v^2\right) u_{xx} + 2u_x u_v u_{xv} - \left(1 + u_x^2\right) u_{vv} = 0. \tag{4.1.2}$$

Доказательство осуществляется прямым вычислением.

Сформулированные в теореме 2 результаты позволяют строить точные решения уравнения (4.3.0) [3, 6].

По найденным решениям уравнения (2.18.0) строятся решения уравнения (4.3.0) по формулам

$$\begin{aligned} &u = i\int \left[1 + \phi'(\xi)^2\right]^{1/2} d\xi + i\int \left[1 + \psi'(\eta)^2\right]^{1/2} d\eta + c_1, \\ &x = \xi + \eta + c_2, \\ &v = -i[\phi + \psi + c_3], \end{aligned}$$

где $\phi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ — произвольные функции.

Приложение 1

Таблица 1

№ п/п	Исходное уравнение	Подста-новка	Полученое уравнение	Решение
1.	$u_{\xi\xi} \pm u_{\eta\eta} = 0$	$\zeta = x$ $\varepsilon = z$ $\varkappa = y$	$z_{xx}\left(1 \pm z_y^2\right) \pm \left(z_{yy} z_x^2 + 2 z_x z_y z_{xy}\right) = 0$	“+” $x = \phi(z, y) \pm i\psi(z, y)$ $\phi_z = -\psi_y,\ \phi_y = \psi_z$ “−” $x = \phi(z + y) + \psi(z - y)$
2.	$u_{\xi\xi} \pm u_{\eta\eta} = 0$	$\zeta = -y$ $\varepsilon = x$ $\varkappa = z$	$z_{yy}\left(z_x^2 \pm 1\right) \pm \left(z_{xx} z_y^2 - 2 z_x z_y z_{xy}\right) = 0$	“+” $-y = \phi(x, z) \pm i\psi(x, z)$ $\phi_x = -\psi_z,\ \phi_z = \psi_x$ “−” $-y = \phi(x + z) + \psi(x - z)$
3.	$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$	$\zeta = x$ $\varkappa = z + x$ $\varepsilon = x + y + z$	$z_{xx}\left(1 + 2z_y + 2z_y^2\right) + 2z_{yy}(1 + z_x)^2 -$ $-4z_y(1 + z_x) z_{xy} = 0$	$x = \phi(z + x, x + y + z) \pm i\psi(z + x, x + y + z)$ $\phi_{z+x} = -\psi_{x+y+z},\ \phi_{x+y+z} = \psi_{x+z}$
4.	$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = 0$	— ” —	$(1 - z_x z_y)(1 + 2z_y) z_{xx} (1 + z_x)^{-3} = 0$	$x = \phi(2x + 2z + y) + \psi(y)$
5.	$u_{\xi\xi} \pm u_{\eta\eta} = 0$	$\zeta = z$ $\varkappa = x + y$ $\varepsilon = x + z$	$z_{xx}\left(1 \pm z_y^2\right) + z_{yy}\left[1 \pm (1 + z_x)^2\right] -$ $-2z_{xy}[1 \pm z_y(1 + z_x)] = 0$	“+” $z = \phi(x + y, x + z) \pm i\psi(x + y, x + z)$ $\phi_{x+y} = -\psi_{x+z},\ \phi_{x+z} = \psi_{x+y}$ “−” $z = \phi(2x + y + z) + \psi(z - y)$
6.	$u_{\xi\xi} \pm u_{\eta\eta} = 0$	$\zeta = x - e^x$ $\varepsilon = x$ $\varkappa = y$	$(1 - e^x)\left[(1 \pm z_y^2) z_{xx} \pm z_x^2 z_{yy} \mp 2 z_x z_y z_{xy}\right] +$ $+ z_x e^x (1 \pm z_y^2) = 0$	“+” $x - e^x = \phi(y, z) \pm i\psi(y, z)$ $\phi_y = -\psi_z,\ \phi_z = \psi_y$ “−” $x - e^x = \phi(z + y) + \psi(z - y)$
7.	$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$	$\zeta = z$ $\varepsilon = x + z$ $\varkappa = y + z$	$z_{xx}\left(1 + 2z_y + 2z_y^2\right) + z_{yy}\left(1 + 2z_x + 2z_x^2\right) -$ $-2z_{xy}[z_x + z_y + 2z_x z_y] = 0$	$z = \phi(x + z, y + z) \pm i\psi(x + z, y + z)$ $\phi_{x+z} = -\psi_{y+z},\ \phi_{y+z} = \psi_{x+z}$
8.	$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = 0$	— ” —	$z_{xx}(1 + 2z_y) - z_{yy}(1 + 2z_x) -$ $-2z_{xy}(z_x - z_y) = 0$	$z = \phi(2z + x + y) + \psi(x - y)$

Приложение 2

Таблица 2

№ п/п	Исходное уравнение	№ в тексте	Подстановка	Полученое уравнение
1.	$z_{xy} + zz_x = 0$	(2.1.0)	$x = x,\ y = iv,\ z = i\tilde{z}$	$\tilde{z}_{xv} - \tilde{z}\tilde{z}_x = 0$
2.	— " —		$x = \frac{\xi+\eta}{2},\ y = \frac{\xi-\eta}{2}$	$z_{\xi\xi} - z_{\eta\eta} + z(z_\xi + z_\eta) = 0$
3.	$z_{xx} + \alpha e^z = 0$	(2.2ª.0)	$x = \frac{\xi+\eta}{2},\ y = \frac{\xi-\eta}{2}$	$z_{\xi\xi} + 2z_{\xi\eta} + z_{\eta\eta} + \alpha e^z = 0$
4.	$z_{xy}^2 - 4\lambda(x,y)z_x z_y = 0$	(2.3.0)	$x = x,\ y = iv$	$z_{xv} - 4\lambda(x, iv)z_x z_v = 0$
5.	— " —		$x = \frac{\xi+\eta}{2},\ y = \frac{\xi-\eta}{2}$	$(z_{\xi\xi} - z_{\eta\eta})^2 - 4\lambda(\xi+\eta, \xi-\eta)\left(z_\xi^2 - z_\eta^2\right) = 0$
6.	— " —		$x = \frac{\xi+iv}{2},\ y = \frac{\xi-iv}{2}$	$(z_{\xi\xi} + z_{vv})^2 - 4\lambda(\xi+iv, \xi-iv)\left(z_\xi^2 + z_v^2\right) = 0$
7.	$z_y z_{xx} - z_x z_{xy} = 0$	(2.5.0)	$x = \frac{\xi+\eta}{2},\ y = \frac{\xi-\eta}{2}$	$z_\xi z_{\eta\eta} - z_{\xi\eta}(z_\xi - z_\eta) - z_\eta z_{\xi\xi} = 0$
8.	— " —		$x = \frac{\xi+iv}{2},\ y = \frac{\xi-iv}{2}$	$z_{\xi v} z_v + z_\xi z_{vv} = 0,\ z_{\xi v} z_\xi + z_v z_{\xi\xi} = 0$
9.	— " —		$x = x,\ y = iv$	инвариантно
10.	$z_y z_{xy} - z_x z_{yy} = z_y^3$	(2.7.0)	$x = \frac{\xi+\eta}{2},\ y = \frac{\xi-\eta}{2}$	$z_{\xi\eta}(z_\xi + z_\eta) - z_\xi z_{\eta\eta} - z_\eta z_{\xi\xi} - \frac{1}{2}(z_\xi - z_\eta)^3 = 0$
11.	$z_y z_{xx} - (1 + z_x + z_y)z_{xy} + (1 + z_x)z_{yy} = 0$	(2.9.0)	$x = \frac{\xi+\eta}{2},\ y = \frac{\xi-\eta}{2}$	$z_{\eta\eta}(1 + 2z_\xi) - z_{\xi\eta} = 0$
12.	$(e^x - 1)(z_y z_{xx} - z_x z_{xy}) - z_x z_y e^x = 0$	(2.10.0)	$x = x,\ y = iv$	инвариантно
13.	— " —		$x = \frac{\xi+\eta}{2},\ y = \frac{\xi-\eta}{2}$	$z_\xi z_{\eta\eta} + z_{\xi\eta}(z_\xi - z_\eta) - z_\eta z_{\xi\xi} -$ $-\frac{1}{2}\left(z_\xi^2 - z_\eta^2\right)\frac{e^{\frac{\xi+\eta}{2}}}{e^{\frac{\xi+\eta}{2}} - 1} = 0$
14.	$z(z_y z_{xy} - z_x z_{yy}) \pm z_x z_y^2 = 0$	(2.12.0)	$x = \frac{\xi+\eta}{2},\ y = \frac{\xi-\eta}{2}$	$z[z_{\xi\eta}(z_\xi + z_\eta) - z_\xi z_{\eta\eta} - z_\eta z_{\xi\xi}] \pm$ $\pm\frac{1}{2}\left(z_\xi^2 - z_\eta^2\right)(z_\xi - z_\eta) = 0$
15.	— " —		$x = x,\ y = iv$	инвариантно
16.	$z_y^2 z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + z_x^2 z_{yy} = 0$	(2.13.0)	$x = \frac{\xi+\eta}{2},\ y = \frac{\xi-\eta}{2}$	инвариантно
17.	— " —		$x = x,\ y = iv$	инвариантно

Продолжение таблицы 2

№ п/п	Исходное уравнение	№ в тексте	Подстановка	Полученое уравнение
18.	$z_y^2 z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + z_x^2 z_{yy} - z_x^2 z_y^2 = 0$	(2.14.0)	$x = \frac{\xi+\eta}{2},\ y = \frac{\xi-\eta}{2}$	$z_\eta^2 z_{\xi\xi} - 2z_\xi z_\eta z_{\xi\eta} + z_\xi^2 z_{\eta\eta} = \frac{1}{4}\left(z_\xi^2 - z_\eta^2\right)(z_\xi - z_\eta)$
19.	— ” —		$x = x,\ y = iv$	инвариантно
20.	$z_{xx} + z_x z_{yy} \mp z_y z_{xy} = 0$	(2.16.0)	$x = x,\ y = iv$	$z_{xx} - z_x z_{vv} \pm z_v z_{xv} = 0$
21.	— ” —		$x = \frac{\xi+\eta}{2},\ y = \frac{\xi-\eta}{2}$	$z_{\xi\xi}(1 + 2z_\eta) + z_{\eta\eta}(1 + 2z_\xi) = 2z_{\xi\eta}(1 - z_\xi - z_\eta)$
22.	$z_{xy} - \left(z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2\right) = 0$	(2.17.0)	$x = x,\ y = iv$	$z_{xv} + \left(z_{xx} z_{vv} - z_{xv}^2\right) = 0$
23.	— ” —		$x = \frac{\xi+\eta}{2},\ y = \frac{\xi-\eta}{2}$	$(z_{\xi\xi} - z_{\eta\eta}) - 4\left(z_{\xi\xi} z_{\eta\eta} - z_{\xi\eta}^2\right) = 0$
24.	— ” —		$x = \frac{\xi+iv}{2},\ y = \frac{\xi-iv}{2}$	$(z_{\xi\xi} + z_{vv}) + 4\left(z_{\xi\xi} z_{vv} - z_{\xi v}^2\right) = 0$
25.	$1 - \left(z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2\right) = 0$	б/н	$x = x,\ y = iv$	$1 + \left(z_{xx} z_{vv} - z_{xv}^2\right) = 0$
26.	— ” —		$x = \frac{\xi+\eta}{2},\ y = \frac{\xi-\eta}{2}$	$1 - 4\left(z_{\xi\xi} z_{\eta\eta} - z_{\xi\eta}^2\right) = 0$
27.	— ” —		$x = \frac{\xi+iv}{2},\ y = \frac{\xi-iv}{2}$	$1 + 4\left(z_{\xi\xi} z_{vv} - z_{\xi v}^2\right) = 0$
28.	$\left(1 + z_y^2\right) z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + \left(1 + z_x^2\right) z_{yy} = 0$	(2.18.0)	$x = x,\ y = iv$	$\left(1 - z_v^2\right) z_{xx} + 2z_x z_v z_{xv} - \left(1 + z_x^2\right) z_{vv} = 0$

1. Forsyth A.R., Theory of differential equations, Vol. V, VI, N.Y., Dover Publication, 1959, 478 p., 596 p.
2. Ames W.F., Nonlinear partial differential equations in engineering, Vol. I, N.Y., Academic press, 1965, 301 p.
3. Фущич В.И., Серов Н.И., О точных решениях уравнения Борна–Инфельда, *ДАН СССР*, 1982, **263**, № 3, 582–586.
4. Погорелов А.В., Об уравнениях Монжа–Ампера эллиптического типа, Харьков, госуниверситет, 1960, 110 с.
5. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 399 с.
6. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в кн. Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1982, 6–27.