О точных решениях уравнения Борна–Инфельда

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ

Некоторый класс точных решений нелинейного уравнения Борна–Инфельда

$$u_{00} - u_{11} + u_0^2 u_{11} + u_1^2 u_{00} - 2u_0 u_1 u_{01} = 0, \tag{1}$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1)$, $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu x_\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1$, найден в [1]. Решения Барбашова и Черникова [1], как показано в [2], можно получить с помощью преобразования годографа.

I. В этой статье с использованием групповых свойств уравнения (1) найдены новые классы точных решений уравнения (1).

Теорема 1. *Уравнение (1) инвариантно относительно 5-мерной алгебры Ли с базисными операторами*

$$\begin{aligned} &P_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad P_1 = -i\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad J_{01} = x_0 P_1 - x_1 P_0, \\ &D = x_\nu P^\nu - i, \qquad Q = \frac{\partial}{\partial u}, \qquad x_\nu P^\nu = x_0 P_0 - x_1 P_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Доказательство теоремы проводится с помощью метода Ли–Овсянникова [3].

Алгебра (2) порождает следующие инфинитезимальные преобразования:

$$\begin{aligned} &x'_\mu = x_\mu + a\xi^\mu(x, u) + O\left(a^2\right), \qquad \mu = 0, 1, \\ &u' = u + a\eta(x, u) + O\left(a^2\right), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\xi^\mu = c_{\mu\nu} x^\nu + d_\mu, \qquad \eta = c_{00} u + d_2, \qquad \mu = 0, 1, \tag{4}$$

где $c_{00} = -c_{11}$, $c_{01} = -c_{10}$, d_μ, d_2 — некоторые параметры.

Решения уравнения (1) ищем в виде

$$u = f(x)\varphi(\omega) + g(x), \tag{5}$$

где $\omega = \omega(x) = \{\omega_1(x), \ldots, \omega_{n-1}(x)\}$ — инварианты группы преобразований (3), т.е. первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_0}{\xi^0(x, u)} = \cdots = \frac{dx_{n-1}}{\xi^{n-1}(x, u)} = \frac{du}{\eta(x, u)}. \tag{6}$$

Функции $f(x)$ и $g(x)$ находятся из (6), $\varphi(\omega)$ — неизвестная пока функция. В случае уравнения (1) φ зависит только от одной переменной $\omega = \omega_1$. Структура решения в виде (5) определяется из (6). О решении нелинейных многомерных волновых уравнений указанным способом см. [4].

Доклады Академии наук СССР, 1982, **263**, № 3, С. 582–586.

II. Не вдаваясь в подробности интегрирования системы (6), выпишем явный вид функций $f(x)$, $g(x)$ и инварианта $\omega = \omega_1(x)$. В зависимости от соотношений между $c_{\mu\nu}$, d_μ и d_2 рассмотрим несколько случаев.

1) $\omega = a_\nu x^\nu, \qquad f(x) = 1, \qquad g(x) = \beta_\nu x^\nu, \qquad a_\nu, \beta_\nu$ — const.

Для функции $\varphi(\omega)$ получаем уравнение

$$\left[a_\nu a^\nu + (\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0)^2\right]\varphi'' = 0. \tag{7}$$

В том случае, когда $a_\nu a^\nu + (\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0)^2 \neq 0$, решением (1) является линейная функция $u = \gamma_\nu x^\nu + C$, где γ_ν, C — произвольные постоянные величины. В случае, когда $a_\nu a^\nu + (\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0)^2 = 0$, решением уравнения (1) будет

$$u = \varphi(\alpha_\nu x^\nu) + \beta_\nu x^\nu, \tag{8}$$

где φ — произвольная дважды дифференцируемая функция. Это решение совпадает с решением [1], когда $\alpha_1 = \pm\alpha_0$, $\beta_1 = \beta_0 = 0$.

2) $\omega = y_\nu y^\nu, \qquad f(x) = 1, \qquad g(x) = a\ln(y_0 + y_1),$
$y_\nu = x_\nu + a_\nu, \qquad a_\nu, a$ — const.

В этом случае для функции $\varphi'(\omega)$ получаем уравнение Абеля

$$\left(\omega + a^2\right)\varphi'' - 2\omega\varphi'^3 - 3a\varphi'^2 + \varphi' = 0. \tag{9}$$

Общее решение уравнения (9) имеет вид

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln\left[c\left(\dfrac{b\sqrt{\omega+a^2} - a\sqrt{\omega+b^2}}{b\omega\sqrt{\omega+a^2} + a\omega\sqrt{\omega+b^2}}\right)^a \left(\dfrac{\sqrt{\omega+a^2}+\sqrt{\omega+b^2}}{\sqrt{\omega+a^2}-\sqrt{\omega+b^2}}\right)^b\right], \\ \dfrac{1}{2}\ln\left[c\left(\dfrac{b\sqrt{a^2+\omega} - a\sqrt{b^2-\omega}}{b\omega\sqrt{a^2+\omega} + a\omega\sqrt{b^2-\omega}}\right)^a\right] + b\,\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{a^2+\omega}{b^2-\omega}}, \\ \ln\left[c\left(\sqrt{\omega+a^2}+a\right)^{-a}\right] + \sqrt{\omega+a^2}. \end{cases} \tag{10}$$

Решения уравнения (1) можно записать в виде

$$u = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln\left\{c\left(\dfrac{y_0+y_1}{y_0-y_1}\right)^a \mathrm{th}^a\left[\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{a^2}{b^2}\dfrac{y_\nu y^\nu + b^2}{y_\nu y^\nu + a^2}\right)\right]\mathrm{cth}^b\left[\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{y_\nu y^\nu + b^2}{y_\nu y^\nu + a^2}\right)\right]\right\}, \\ \dfrac{1}{2}\ln\left\{c\left(\dfrac{y_0+y_1}{y_0-y_1}\right)^a \mathrm{th}^a\left[\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{a^2}{b^2}\dfrac{b^2 - y_\nu y^\nu}{a^2 + y_\nu y^\nu}\right)\right]\right\} + b\,\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{a^2 + y_\nu y^\nu}{b^2 - y_\nu y^\nu}}, \\ a\ln\left[c(y_0+y_1)\left(\sqrt{y_\nu y^\nu + a^2} + a\right)^{-1}\right] + \sqrt{y_\nu y^\nu + a^2}. \end{cases} \tag{11}$$

3) $\omega = y_1/y_0, \qquad f(x) = y_0, \qquad g(x) = \mathrm{const}.$

Функция $\varphi(\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\varphi^2 + \omega^2 - 1\right)\varphi'' = 0. \tag{12}$$

Помимо линейной функции от ω, решением уравнения (1) будет функция

$$u = \pm\sqrt{y_\nu y^\nu} + C. \tag{13}$$

$$4)\quad \omega = y_0 + y_1, \qquad f(x) = (y_0 - y_1)^{1/2}, \qquad g(x) = \text{const}.$$

Функция $\varphi(\omega)$ находится из уравнения

$$\varphi^2\varphi'' - 3\varphi\varphi'^2 + 2\varphi' = 0. \tag{14}$$

С помощью нелинейной замены

$$\varphi' = z(x), \qquad x = \varphi, \tag{15}$$

нелинейное уравнение (14) сводится к линейному

$$x^2 z' - 3xz + 2 = 0, \tag{16}$$

общее решение которого задается формулой

$$z = \frac{c_1 x^4 + 1}{2x}.$$

Решениями уравнения (1) будут функции

$$u = \begin{cases} \pm\left\{\dfrac{y_0 - y_1}{c_1}\,\mathrm{th}\,[c_1(y_0 + y_1) + c_2]\right\}^{1/2} + c_3, \\ \pm\left\{\dfrac{y_0 - y_1}{c_1}\,\mathrm{cth}\,[c_1(y_0 + y_1) + c_2]\right\}^{1/2} + c_3, \\ \pm\left\{\dfrac{y_0 - y_1}{c_1}\,\mathrm{tg}\,[c_1(y_0 + y_1) + c_2]\right\}^{1/2} + c_3, \\ \pm[y_\nu y^\nu + c_2(y_0 - y_1)]^{1/2} + c_3. \end{cases} \tag{17}$$

$$5)\quad \omega = y_0 - y_1 + a\ln(y_0 + y_1), \qquad f(x) = (y_0 + y_1)^{1/2}, \qquad g(x) = \text{const}.$$

Функция $\varphi(\omega)$ находится из уравнения

$$\left(\varphi^2 + 4a\right)\varphi'' - 4a\varphi'^3 - 3\varphi\varphi'^2 + 2\varphi' = 0, \tag{18}$$

которое с помощью замены (15) приводится к уравнению Риккати

$$\left(x^2 + 4a\right) z' = 4az^2 + 3xz - 2. \tag{19}$$

Общее решение уравнения (19) имеет вид

$$z = \frac{2a - x\left(c_1\sqrt{x^2 + 4a} - x\right)}{2a\left(c_1\sqrt{x^2 + 4a} - x\right)}. \tag{20}$$

Подставляя (20) в (15), получаем уравнение для φ

$$\varphi' = \frac{2a - \varphi\left(c_1\sqrt{\varphi^2 + 4a} - \varphi\right)}{2a\left(c_1\sqrt{\varphi^2 + 4a} - \varphi\right)}. \tag{21}$$

В зависимости от постоянной величины c_1 получим следующие решения для уравнения (1):

$$u = \pm \left\{ c_2 \exp[c_3(y_0 - y_1)] + \frac{2}{c_3}(y_0 + y_1) \right\}^{1/2} + c_4, \qquad c_1 = 0. \tag{22}$$

Для всех других значений c_1 решения (1) получаем в неявном виде

$$\Psi \exp\left(u\Psi + \frac{y_0 - y_1}{2a} \right) = c_2, \qquad \Psi = \left(u - \sqrt{u^2 + 4a(y_0 + y_1)} \right)^{-1} \tag{23}$$

для $c_1 = 1$.

В том случае, когда $c_1^2 - 1 > 0$, решение уравнения (1) имеет вид

$$\frac{(V+1)^A (V-1)^{1/A} (V - K_+)^{B_-} (V - K_-)^{B_+}}{(y_0 + y_1) \exp\left[a^{-1}(y_0 - y_1)\right]} = c_2, \tag{24}$$

где

$$V = u\left[u^2 + 4a(y_0 + y_1)\right]^{-1/2}, \qquad A = \frac{1 - c_1}{1 + c_1},$$

$$B_\pm = \frac{\left(c_1^2 + 1\right)\left(c_1^2 - 1\right) \pm \left(c_1^3 - 1\right)}{\left(c_1^2 - 1\right)^{3/2}}, \qquad K_\pm = c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 1}.$$

Если $c_1^2 - 1 < 0$, то решение уравнения (1) задается следующей неявной функцией:

$$\frac{(V-1)^A (V+1)^{1/A} \left(V^2 - 2c_1 V + 1\right)^{A/2 + 1/2A}}{\left\{ (y_0 + y_1) \exp\left[\frac{2c_1}{\sqrt{1 - c_1^2}} \operatorname{arctg} \frac{V - c_1}{\sqrt{1 - c_1^2}} + \frac{y_0 - y_1}{a} \right] \right\}^{-1}} = c_2. \tag{25}$$

III. В заключение сформулируем теорему о приводимости квазилинейного волнового уравнения вида

$$\Box u + F(u, u_0, \ldots, u_{n-1}) = 0, \tag{26}$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, \ldots, x_{n-1})$, $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $\mu = 0, 1, \ldots, n-1$, $\Box = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, F — произвольная дифференцируемая функция, к каноническому виду.

Теорема 2. *Если уравнение (26) инвариантно относительно конформной группы, то с помощью локальной невырожденной замены $W = \Psi(u)$ оно приводится к нелинейному волновому уравнению*

$$\Box W + \lambda W^{(n+2)/(n-2)} = 0, \qquad \lambda = \text{const}. \tag{27}$$

Замечание. Если F не зависит от u, то конформно инвариантное уравнение (26) с помощью той же замены приводится к линейному волновому уравнению $\Box W = 0$.

1. Барбашова Б.М., Черников Н.А., *ЖЭТФ*, 1966, **50**, 1296.
2. Уизем Дж., Линейные и нелинейные волны, М., Мир, 1977.
3. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., 1978.
4. Фущич В.И., Серов Н.И., *Укр. мат. жур.*, 1982, **34**, № 2.
5. Fushchych W.I., Moskaljuk S.S., *Lett. Nuovo Cimento*, 1981, **31**, № 6, 571.