W.I. Fushchych, Scientific Works 2000, Vol. 2, 160–164.

О дополнительной инвариантности уравнений для векторных полей

В.И. ФУЩИЧ, В.А. ВЛАДИМИРОВ

В работах [1, 2] предложен метод исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений, отличный от классического метода Ли–Овсянникова. С помощью этого метода, называемого в дальнейшем нелиевским, установлена дополнительная инвариантность уравнений Дирака, Максвелла [2], а также ряда других пуанкаре-инвариантных уравнений.

В настоящей работе показано, что система уравнений Прока

$$\left(\hat{p}^{\mu}\hat{p}_{\mu} - m^2\right)\psi^{\nu}(x) = 0, \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3, \tag{1.1}$$

$$\hat{p}_{\mu}\psi^{\mu}(x) = 0, \tag{1.2}$$

где $\hat{p}_{\mu} = i\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$, $\mu = 0,1,2,3$, и некоторые другие уравнения второго порядка обладают дополнительной симметрией, которая не может быть найдена с помощью метода Ли–Овсянникова [3].

1. Определение. *Пусть $L(x,\hat{p})$ — линейный дифференциальный оператор. Будем говорить, что уравнение*

$$L(x,\hat{p})\psi(x) = 0, \tag{2}$$

инвариантно относительно некоторого множества операторов $Q = \{Q_A\}$, если для всякого A

$$L(x,\hat{p})Q_A\psi = 0. \tag{3}$$

Максимальной в смысле С. Ли алгеброй инвариантности уравнения Прока является алгебра Пуанкаре P [1, 3], базисные элементы которой задаются операторами

$$\begin{gathered}\hat{P}_{\mu} = i\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \qquad \mu = 0,1,2,3,\\ \hat{J}_{\mu\nu} = x_{\mu}\hat{p}_{\nu} - x_{\nu}\hat{p}_{\mu} + S_{\mu\nu}, \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3,\end{gathered} \tag{4}$$

где $S_{\mu\nu}$ — матрицы, реализующие конечномерное представление $D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ алгебры Ли группы $O(1,3)$[1]. Если в (1.1) положить $m = 0$, перейдя таким образом к уравнениям, описывающим 4-потенциал свободного электромагнитного поля, то алгебра инвариантности системы (1) помимо множества (5) будет включать оператор дилатации

$$D = x^{\mu}\hat{p}_{\mu} + R, \tag{5}$$

Доклады Академии наук СССР, 1981, **257**, № 5, С. 1105–1108.

[1]Матричные элементы $S_{\mu\nu}$ имеют следующий вид:

$$(S_{\mu\nu})^{\alpha}_{\beta} = i\left(g^{\alpha}_{\mu}g_{\beta\nu} - g^{\alpha}_{\nu}g^{\beta}_{\mu}\right), \qquad \alpha,\beta,\mu,\nu = 0,1,2,3, \qquad q_{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1).$$

где R — произвольная постоянная. Напомним, что в подходе С. Ли алгебра симметрии ищется в классе дифференциальных операторов первого порядка. Ниже с помощью нелиевского метода будет показано, что система (1) при $m = 0$ инвариантна относительно 15-мерной конформной алгебры, базисные элементы которой являются интегродифференциальными операторами.

Теорема 1. *Уравнение Прока (дополнительно) инвариантно относительно 9-мерной алгебры Ли, базисные элементы которой задаются операторами следующего вида*[2]*:*

$$\begin{aligned}\hat{D}_{ab} = 2^{-1}\left(p_0^2+\boldsymbol{p}^2\right)^{-1}\big\{&2^{-1}p_a p_b(2\boldsymbol{S}^2+[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{S})][\boldsymbol{p}(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{N})])+\\ &+p_0\left[p_b(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{N})_a+p_a(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{S})_b-\left(p_0^2+\boldsymbol{p}^2\right)\boldsymbol{S}^2\delta_{ab}\right]-\\ &-(p_b[\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{N})\times\boldsymbol{p}]_a+[(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{S})\times\boldsymbol{p}]_b p_a)-2p_0[(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{p})_b S_a+\\ &+\boldsymbol{S}_b(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{p})_a]+2(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{p})_b(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{p})_a\big\},\quad a,b=1,2,3,\end{aligned}\tag{6}$$

где $S_a = -\frac{i}{2}\varepsilon_{abc}S_{bc}$, $N_a = -iS_{0a}$, $a,b,c = 1,2,3$.

Доказательство. Запишем систему (1)в следующих обозначениях:

$$L_0(p)\psi(x) = 0, \qquad L_0(p) = \left(p^\mu p_\mu - m^2\right) I, \tag{7.1}$$

$$L_1(p)\psi(x) = 0, \qquad L_1(p) = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.2}$$

где $\psi(x)$ — вектор- функция с компонентами $\{\psi^0(x), \psi^1(x), \psi^2(x), \psi^3(x)\}$.

Следуя нелиевскому алгоритму [2], найдем множество операторов $\{Q_A\} = \{D_{ab}\}$, удовлетворяющих условию инвариантности (3). Для этой цели расщепим систему (7) на незацепляющиеся подсистемы. Это достигается с помощью обратимого оператора $U(p)$, матричные элементы которого имеют вид

$$(U(p))^\mu_\nu = \left(p_0^2+\boldsymbol{p}^2\right)^{-1/2}\left[p_0 g^\mu_\nu - g^\mu_0 p_\nu + p^\mu g_{\nu 0} + 2g^\mu_0 g_{\nu 0} p_0 - \varepsilon_{krj} p_k g^\mu_r g_{\nu j}\right], \tag{8}$$

$$\left(U^{-1}(p)\right)^\mu_\nu = \left(p_0^2+\boldsymbol{p}^2\right)^{-1/2}\left[p_0 g^\mu_\nu + g^\mu_0 p_\nu + p^\mu g_{\nu 0} - 2g^\mu_0 g_{\nu 0} p_0 + \varepsilon_{krj} p_k g^\mu_r g_{\nu j}\right]. \tag{9}$$

В силу коммутативности $L_0(p)$ и $U^{-1}(p)$ система (7) эквивалентна следующей системе интегродифференциальных уравнений:

$$L_0\tilde{\psi} = 0, \qquad \tilde{L}_1\tilde{\psi} = 0, \tag{10}$$

где

$$\tilde{\psi} = \tilde{U}^{-1}(p)\psi, \qquad \tilde{L}_1 = L_1 U(p) = \left(p_0^2+\boldsymbol{p}^2\right)^{1/2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Теперь нетрудно найти оператор, удовлетворяющий условию инвариантности

$$L_0\tilde{Q}_A\tilde{\psi} = 0, \qquad \tilde{L}_1\tilde{Q}_A\tilde{\psi} = 0. \tag{12}$$

[2] В формуле (6) и далее мы опускаем “шляпку” над символом p.

Очевидно, что каждый оператор вида

$$Q(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{11}(p) & q_{12}(p) & q_{13}(p) \\ 0 & q_{21}(p) & q_{22}(p) & q_{23}(p) \\ 0 & q_{31}(p) & q_{32}(p) & q_{33}(p) \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где $q_{ij}(p)$ — произвольные функции от p^μ, удовлетворяет условию (12).

Зададим базис в множестве (13) с помощью матриц

$$\tilde{D}_{ab} = S_b S_a = \frac{1}{2}(N_a N_b + S_b S_a), \qquad a, b = 1, 2, 3, \tag{14}$$

реализующих трехмерное представление алгебры Ли группы $GL(3)$. Операторы (6) получаются из матриц $\tilde{D}_{ab}$ согласно формулам

$$\hat{D}_{ab} = U(p)\tilde{D}_{ab}U^{-1}(p). \tag{15}$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Матричные элементы операторов (6) имеют вид

$$\begin{aligned} \left(\hat{D}^{ab}\right)^\mu_\nu = -2^{-1}\left(p_0^2 + \boldsymbol{p}^2\right)^{-1}\left(p_0 g^\mu_a - g^\mu_0 p_a + \varepsilon_{akr} g^\mu_r p_k\right) \times \\ \times \left(p_0 g_{\nu b} + p_b g_{\nu 0} - \varepsilon_{jsb} g_{\nu j} p_s\right), \end{aligned} \tag{16}$$

$\hat{D}_{ab}$ — ограниченные интегродифференциальные операторы. Вся интегральность содержится в члене $\left(p_0^2 + \boldsymbol{p}^2\right)^{-1}$.

Замечание 2. Преобразование $U(p)$, расщепляющее уравнения (7), очевидно, не единственно. Так, например, оператор

$$\begin{aligned} &(V(p))^\mu_\nu = \left(p_0^2 - \boldsymbol{p}^2\right)^{-1/2}\left(p_0 g^\mu_\nu - g^\mu_0 p_\nu + p^\mu g_{\nu 0} - i\varepsilon_{krl} g^\mu_r g_{\nu l} p_k\right), \\ &\left(V^{-1}(p)\right)^\mu_\nu = \left(p_0^2 - \boldsymbol{p}^2\right)^{-1/2}\left(p_0 g^\mu_\nu + g^\mu_0 p_\nu - p^\mu g_{\nu 0} + i\varepsilon_{krl} g^\mu_r g_{\nu l} p_k\right) \end{aligned} \tag{17}$$

также диагонализирует $L_1(p)$. Если использовать преобразование $V(p)$ вместо $U(p)$ и вычислить по формуле (15) явный вид операторов $\hat{D}_{ab}$, то получатся не интегродифференциальные операторы, а дифференциальные операторы второго порядка

$$\left(\hat{D}_{ab}\psi\right)^\mu = m^{-2}\left(p_0 g^\mu_a - g^\mu_0 p_a + i\varepsilon_{kaj} g^\mu_k p_j\right)\left(p_b g_{\nu 0} - p_0 g_{\nu b} + i\varepsilon_{bsn} g_{\nu s} p_n\right)\psi^\nu. \tag{18}$$

2. Рассмотрим систему (1) для случая $m = 0$

$$L_0\psi = 0, \qquad L_0 = p^\mu p_\mu I, \tag{19.1}$$

$$L_1\psi = 0. \tag{19.2}$$

Условие (19.2) называется *калибровочным условием Лоренца*, нередко также используют *калибровку Кулона*

$$L_2\psi = 0, \qquad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Теорема 2. *Калибровка Кулона эквивалентна калибровке Лоренца. Эквивалентность устанавливается с помощью интегродифференциального оператора*

$$
\begin{aligned}
W(p) &= 2^{-1/2} p_0 \boldsymbol{p}^{-2} \left(p_0 I - \boldsymbol{S}\boldsymbol{p} - \frac{1}{2}[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{N}) - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{S})] \right), \\
W^{-1}(p) &= 2^{-1/2} p_0 \boldsymbol{p}^{-2} \left(p_0 I + \boldsymbol{S}\boldsymbol{p} + \frac{1}{2}[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{N}) - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{S})] \right),
\end{aligned} \tag{21}
$$

$$
L_2(p) W(p) \tilde{\psi} = 2^{-1/2} L_1(p) \tilde{\psi}, \tag{22}
$$

где $\tilde{\psi} = W^{-1}(p)\psi$.

Теорема 3. *Система уравнений (19) инвариантна относительно 9-мерной алгебр Ли группы* $GL(3)$*, базисные элементы которой имеют вид*

$$
\hat{D}_{ab} = 2^{-1} p_0 \boldsymbol{p}^{-2} \left\{ p_0 \left(2S_b S_a - \boldsymbol{S}^2 \delta_{ab} \right) + p_a (\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{S})_b \right\}. \tag{23}
$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы не отличается от доказательства теоремы 1. Для получения формулы (23) нужно использовать вместо $U(p)$ оператор

$$
\begin{aligned}
W_1(p) = \exp \Bigg\{ (\ln\sqrt{2}) \left[1 + \left(\frac{\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|} \right)^2 \right] - \\
- \frac{\pi}{4} \cdot 2^{-1} p_0 \boldsymbol{p}^{-2} [\boldsymbol{p}(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{N}) - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{S})] \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{24}
$$

Теорема 4. *Система (7) инвариантна относительно конформной алгебры, базисные элементы которой задаются интегродифференциальными операторами*

$$
\begin{aligned}
& p_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad D = x^\mu p_\mu + i, \\
& J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + 2^{-1} i p_0 \boldsymbol{p}^{-2} [(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{S})_a p_b - (\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{S})_b p_a], \\
& J_{0k} = x_0 p_k - x_k p_0 + i p_0 (2p)^{-2} \{ 2p_0 (\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{S})_k - [\boldsymbol{p}(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{S})][\boldsymbol{p}(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{N}) p_k \}, \\
& K_\alpha = 2x_\alpha D - x^\sigma x_\sigma p_\alpha + 2^{-1} i p_0 \boldsymbol{p}^{-2} \{ [\boldsymbol{p}(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{S})][\boldsymbol{p}(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{N})](x_0 p_\alpha - D g_\alpha^0) - \\
& \qquad - 2(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{S})_k (g_\alpha^k D - x^k p_\alpha) \}, \qquad a,b,k = 1,2,3, \quad \alpha,\sigma = 0,1,2,3.
\end{aligned} \tag{25}
$$

Доказательство. Воспользовавшись оператором (24), получим каноническую систему незацепляющихся интегродифференциальных уравнений для вектор-функции $(\tilde{\psi})^\mu = \left(W_1^{-1}(p)\psi \right)^\mu$, причем компоненты $(\tilde{\psi})^j$, $j = 1,2,3$, удовлетворяют уравнению Даламбера без дополнительных условий. Представление конформной алгебры в канонической форме можно реализовать с помощью операторов

$$
\begin{aligned}
& \tilde{p}_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Pi_3, \qquad \tilde{J}_{\mu\nu} = (x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu)\Pi_3, \\
& \tilde{D} = (x^\mu p_\mu + i)\Pi_3, \qquad \tilde{K}_\alpha = (2x_\alpha \tilde{D} - x^\sigma x_\sigma p_\alpha)\Pi_3,
\end{aligned} \tag{26}
$$

где Π_3 — матрица вида

$$
\Pi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Совершив обратное преобразование, получаем формулу (25).

Замечание 3. Операторы $\hat{J}_{ab}$, $\hat{J}_{0k}$ и K_α задаются на множестве решений системы (19), поэтому слагаемые вида $R_0(p)L_0(p)+R_1(p)L_1(p)$ в форму ле (25) опускаются.

1. Fushchych W.I., On additional invariance of relativistic equations of motion, Preprint 70-32E, Inst. for Theor. Phys., Kiev, 1970; *Теор. и матем. физ.*, 1971, **7**, № 1,3; *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **11**, № 10, 508.

2. Фущич В.И., В кн.: Теоретико-групповые методы в математической физике, Киев, 1978.

3. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., 1978.