Нерелятивистские уравнения движения для частиц с произвольным спином

В.И. ФУЩИЧ, А.Г. НИКИТИН

The Galilei-invariant systems of partial differential equations, which describe the nonrelativistic motion of arbitrary spin particle, have been deduced. The found equations admit Lagrangian formulation and describe dipole, quadrupole and spin-orbit couplings of a particle with an external field, which traditionally are considered as a relativistic effects. Using the found equations, the problem of an arbitrary spin particle motion in homogeneous magnetic field have been solved exactly. The generators of all classes of irreducible representations of Galilei group have been found.

Выведены галилеевски-инвариантные системы дифференциальных уравнений первого и второго порядка, описывающие движение нерелятивистской частицы произвольного спина. Найденные уравнения допускают лагранжеву формулировку и описывают дипольное, квадрупольное и спин-орбитальное взаимодействия частицы с внешним электромагнитным полем, которые традиционно считались чисто релятивистскими эффектами. На основе полученных уравнений точно решена задача о движении нерелятивистской частицы произвольного спина в однородном магнитном поле. Найдены генераторы всех классов неприводимых представлений группы Галилея.

Введение

Более 300 лет известны принцип относительности и преобразования Галилея. Однако структура группы Галилея G и ее представления начали изучаться сравнительно недавно. В 1952 г. Иноню и Вигнер [1] описали точные представления этой группы. Баргман [2] впервые указал на фундаментальную роль проективных представлений группы G в нерелятивистской квантовой механике. Любопытно отметить, что проективные представления группы Галилея могли быть открыты значительно раньше, поскольку еще Ли [3] установил алгебру и группу инвариантности уравнения диффузии, которое с точностью до постоянных коэффициентов совпадает с одномерным уравнением Шредингера для невзаимодействующей частицы. Исходя из алгебры инвариантности уравнения диффузии (или уравнения Шредингера) и используя приемы, известные еще с начала века (формулу Кэмпбелла, уравнения Ли), мы, как будет показано ниже, с необходимостью приходим к проективным представлениям группы G.

Леви-Леблонд [4, 5] начал систематическое исследование представлений группы Галилея и уравнений, инвариантных относительно этой группы. Хаген и Герлей [6, 7] получили галилеевски-инвариантные дифференциальные уравнения первого порядка, описывающие движение нерелятивистской частицы с произвольным спином. Особенностью этих уравнений является то, что они не дают полного описания движения частицы со спином во внешнем электромагнитном поле, так как не учитывают такие хорошо известные физические эффекты, как спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействия. Во многих книгах и статьях

Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1981, **12**, вып. 5, С. 1157–1219.

утверждается даже, что такие взаимодействия являются чисто релятивистскими эффектами и могут быть адекватно описаны только с помощью уравнений, инвариантных относительно группы Пуанкаре (например, уравнений Дирака).

Настоящий обзор, в основу которого положены работы авторов [8–14], посвящен выводу и подробному исследованию нового класса галилеевски-инвариантных уравнений движения для частиц произвольного спина. С помощью полученных уравнений, подобно тому как и в релятивистской теории Дирака для электрона, можно последовательно описать спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействия. Найденные уравнения — частный случай уравнения Леви-Леблонда и Хагена–Герлея (уравнения ЛХГ) — представляют собой системы дифференциальных уравнений в частных производных первого и второго порядка параболического типа.

Для получения и анализа галилеевски-инвариантных уравнений используется алгебраический подход, развитый в работах [15–17]. Суть этого подхода состоит в том, что, исходя из некоторой общей формы генераторов группы G и используя коммутационные соотношения алгебры Ли группы Галилея, находят явный вид генератора временного сдвига (гамильтониана) H, с помощью которого определяется инвариантное уравнение типа Шредингера.

Следует отметить, что в принципе можно построить очень много различных галилеевски-инвариантных уравнений для частиц произвольного спина (то же самое можно сказать и о релятивистских уравнениях), которые в отсутствие взаимодействия могут быть эквивалентными. Поэтому важно иметь критерии, выделяющие из них те, которые позволяют наиболее полно описать физическую реальность — например в случае взаимодействия частицы с внешним электромагнитным полем. В работе найдено необходимое условие, которому должны удовлетворять уравнения первого порядка, описывающие спин-орбитальное взаимодействие частицы с полем. Это условие можно сформулировать в виде требования (которому не удовлетворяют уравнения ЛХГ), чтобы генераторы представления однородной группы Галилея, реализующегося на множестве решений инвариантного уравнения, были нильпотентными матрицами с индексом нильпотентности $N > 2$.

Структура уравнений, полученных в настоящей работе, позволяет во многих случаях находить их решения сразу для произвольного значения спина. Ниже с использованием найденных уравнений точно решена задача о спектре энергии заряженной нерелятивистской частицы произвольного спина в однородном магнитном поле.

В работе получены генераторы всех классов неприводимых представлений расширенной группы Галилея. Найденная реализация отличается относительно простой (симметричной) формой генераторов, которая является универсальной для всех унитарных представлений этой группы. Исследованы также представления полной группы Галилея, включающей дискретные преобразования P, T и C.

За пределами настоящей статьи остались задачи о разложении тензорного произведения двух и трех неприводимых представлений группы Галилея. Эти вопросы (и многие другие, касающиеся теории представлений группы хорошо изложены в [4, 18–20].

1. Галилеевская инвариантность

В этом разделе обсуждается алгебра инвариантности уравнения Шредингера для невзаимодействующей частицы и дискретные P-, T-, C-преобразования в нерелятивистской квантовой механике. Исходя из алгебры инвариантности, с помощью формулы Кэмпбелла–Хаусдорфа строится представление расширенной группы Галилея и вычисляется мультипликатор, характеризующий проективные представления этой группы.

Алгебра инвариантности уравнения Шредингера. Исследуем свойства симметрии основного уравнения нерелятивистской квантовой механики

$$L\Psi = 0, \qquad L = i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{p^2}{2m}, \tag{1}$$

где

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, \qquad p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad \Psi = \Psi(t, \boldsymbol{x}) \subset L_2.$$

Обозначим $\{Q_A\}$, $A = 1, 2, \ldots, N$; $N < \infty$ некоторое множество операторов, определенных на множестве, всюду плотном в пространстве L_2 и образующих алгебру Ли. Уравнение (1) по определению инвариантно относительно алгебры $\{Q_A\}$, если выполняются соотношения

$$[Q_A, L] \equiv Q_A L - L Q_A = f_A L, \tag{2}$$

где $\{f_A\}$ — некоторое множество операторов, определенных в L_2. Действительно, если выполняется (2), то преобразование $\Psi \to Q_A\Psi$ переводит решение уравнения (1) в другое решение этого уравнения.

Рассмотрим задачу о нахождении алгебры инвариантности (АИ) уравнения (1) в классе дифференциальных операторов первого порядка. Эта задача сводится к определению всех возможных операторов вида

$$Q_A = B_A(t, \boldsymbol{x}) + C_A^i(t, \boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_i} + D_A(t, \boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial t}, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{3}$$

(где $B_A(t, \boldsymbol{x})$, $C_a^i(t, \boldsymbol{x})$, $D_A(t, \boldsymbol{x})$ — функции от t и $\boldsymbol{x}$), удовлетворяющих условиям (2) и образующих конечномерную алгебру Ли. Как отмечалось выше, эта задача для одномерного уравнения Шредингера впервые была решена Ли [3]. Решение ее приведено в книге [21], а недавно для трехмерного случая получено в работах [22, 23]. Результат [22, 23] можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема 1. *Максимальной АИ уравнения (1) в классе дифференциальных операторов первого порядка является тринадцатимерная алгебра Ли, базисные элементы которой задаются формулами*

$$\begin{aligned} &P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad P_a = p_a, \qquad M = m, \\ &J_a = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p})_a, \qquad G_a = tp_a - mx_a, \end{aligned} \tag{4}$$

$$D = 2tP_0 - x_a p_a + \frac{3}{2}i, \qquad A = t^2 P_0 - tD - \frac{1}{2}m\boldsymbol{x}^2. \tag{5}$$

Доказательство теоремы здесь не приведено (см. [22, 23]). Отметим только, что инвариантность уравнения (1) относительно алгебры (4), (5) легко проверить непосредственно. Операторы (4) удовлетворяют условию (2) при $f_A \equiv 0$, а для операторов (5) выполняется

$$[D, L] = -2iL, \qquad [A, L] = 2itL.$$

Операторы (4), (5) удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[P_a, P_b] = 0, \qquad [P_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}P_c, \tag{6}$$

$$[G_a, G_b] = 0, \qquad [G_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}G_c, \tag{7}$$

$$[P_a, G_b] = i\delta_{ab}M, \qquad [P_\mu, M] = [G_a, M] = [J_a, M] = 0, \tag{8}$$

$$[P_0, P_a] = [P_0, J_a] = 0, \tag{9}$$

$$[P_0, G_a] = iP_a, \qquad a, b, c = 1, 2, 3, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{10}$$

$$\begin{gathered}
[D, P_a] = -iP_a, \qquad [D, G_a] = iG_a, \qquad [D, P_0] = -2iP_0, \\
[D, J_a] = [D, M] = [A, G_a] = [A, M] = [A, J_a] = 0, \\
[A, P_a] = iG_a, \qquad [A, P_0] = iD, \qquad [A, D] = 2iA,
\end{gathered} \tag{11}$$

т. е. образуют алгебру Ли, называемую алгеброй Ли группы Шредингера.

Заметим, что операторы (5) на множестве решений уравнения (1) могут быть выражены через генераторы (4):

$$D = (2M)^{-1}(P_aG_a + G_aP_a), \qquad A = (2M)^{-1}G_aG_a \tag{12}$$

и, следовательно, симметрия относительно, преобразований, генерируемых операторами D и A, не приводит к новым законам сохранения. Таким образом, основной интерес представляет симметрия уравнения (1) относительно АИ (4) (алгебры Ли расширенной группы Галилея).

Алгебра (4) имеет три основных инвариантных оператора (оператора Казимира)

$$\begin{gathered}
C_1 = 2MP_0 - P_aP_a, \qquad C_2 = M, \\
C_3 = W_aW_a = [MJ_a - \varepsilon_{abc}P_bG_c][MJ_a - \varepsilon_{abc}P_bG_c],
\end{gathered} \tag{13}$$

собственные значения которых ассоциируются с внутренней энергией, массой и спином нерелятивистской частицы. Подставив (4) в (13), убеждаемся, что уравнение Шредингера (1) описывает частицу со спином $s = 0$, внутренней энергией $\varepsilon_0 = 0$ и массой m.

Таким образом, мы рассмотрели симметричные свойства уравнения Шредингера относительно АИ, базисные элементы которых принадлежат классу дифференциальных операторов первого-порядка. Отметим, что если рассмотреть АИ в классе интегродифференциальных операторов, то можно показать, что уравнение (1) инвариантно относительно алгебр $O(1,3)$ [24] и $O(2,4)$ [25].

Возникает естественный вопрос — существуют ли другие [кроме (1)] дифференциальные уравнения, имеющие такую же симметрию [обладающие такой же АИ (4), (5)], как уравнение Шредингера? Положительный ответ на этот вопрос дан в разделах 2 и 3.

В заключение этого пункта сформулируем следующее утверждение, в справедливости которого можно убедиться непосредственной проверкой.

Лемма 1. *Пусть* $\{P_0, P_a, J_a, G_a, M\}$ — *произвольная совокупность операторов, удовлетворяющих алгебре (6)–(10) и дополнительному требованию, чтобы существовал оператор, обратный оператору* M. *Тогда операторы (12) совместно с* P_a, G_a, J_a, M *и* $\hat{P}_0 = P_0 - (2M)^{-1}C_1$ *удовлетворяют алгебре Ли (6)–(11).*

Сформулированный в лемме результат означает, что произвольное представление алгебры Галилея (6)–(10) (соответствующее $c_2 \neq 0$) может быть пополнено до представления алгебры Ли группы Шредингера (6)–(12) (подобно тому, как произвольное представление группы $P(1,3)$, соответствующее нулевой массе и дискретному спину, может быть пополнено до представления конформной группы [26].

Конечные преобразования. Зная АИ некоторого дифференциального уравнения, обычно бывает нетрудно найти его группу симметрии. Так, исходя из (4), можно получить в явном виде преобразования Галилея для координат x_a, времени t и волновой фунции $\Psi(t, \boldsymbol{x})$:

$$\begin{aligned} &x_a \to x'_a = U(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, a_0, b) x_a U^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, a_0, b) = R_{ab}x_b + v_a t + a_0, \\ &t \to t' = U(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, a_0, b) t U^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, a_0, b) = t + a_0, \end{aligned} \tag{14а}$$

$$\begin{aligned} &x_a \to x''_a = U^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, a_0, b) x_a U(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, a_0, b) = R^{-1}_{ab}(x_b - v_b t - a_b), \\ &t \to t'' = U^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, a_0, b) t U(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, a_0, b) = t - a_0, \end{aligned} \tag{14б}$$

$$\begin{aligned} \Psi(t, \boldsymbol{x}) \to \Psi'(t, \boldsymbol{x}) &= U^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, a_0, b)\Psi(t, \boldsymbol{x}) = \\ &= \exp[if(t', \boldsymbol{x}') - imb]\Psi(t', \boldsymbol{x}'), \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$U(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, a_0, b) = \exp(iJ_c\theta_c)\exp(iG_c v_c)\exp[iP_\mu a^\mu + imb], \tag{16}$$

θ_c, v_c, a_c, a_0, b — произвольные действительные параметры; R_{ab} — оператор трехмерного поворота:

$$R_{ab} = \delta_{ab}\cos\theta + \frac{\varepsilon_{abc}\theta_c}{\theta}\sin\theta + \frac{\theta_a\theta_b}{\theta^2}(1 - \cos\theta), \qquad \theta = \left(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_2^2\right)^{1/2}, \tag{17}$$

$f(t', \boldsymbol{x}')$ — фазовый множитель [2]:

$$f(t', \boldsymbol{x}') = m\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x} + \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 t. \tag{18}$$

Для доказательства соотношений (14)–(18) достаточно воспользоваться формулой Кэмпбелла–Хаусдорфа

$$\exp(A)\exp(B) = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \cdots\right). \tag{19}$$

Согласно (4), (19)

$$\exp(-iG_a v_a) = \exp(-itp_a v_a)\exp[if(t, \boldsymbol{x})]$$

и

$$U^{-1}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v},\boldsymbol{a},a_0,b)= \\ =\exp[if(t',\boldsymbol{x}')-imb]\exp(-iJ_c\theta_c)\exp[ip_a(a_a-v_at)-iP_0a_0], \tag{20}$$

откуда непосредственно следует выполнение (14)–(18).

Таким образом, представление расширенной группы Галилея на множестве решений уравнения (1) задается операторами (20), действие которых на волновую функцию и независимые переменные x_a и t определено формулами (14)–(18).

Нетрудно убедиться непосредственным вычислением, что операторы (20) удовлетворяют групповому закону

$$U\left(\boldsymbol{\theta}^{(2)},\boldsymbol{v}^{(2)},\boldsymbol{a}^{(2)},a_0^{(2)},b^{(2)}\right)U\left(\boldsymbol{\theta}^{(1)},\boldsymbol{v}^{(1)},\boldsymbol{a}^{(1)},a_0^{(1)},b^{(1)}\right)= \\ =U\Bigg(\boldsymbol{\theta}^{(1)}+\boldsymbol{\theta}^{(2)},\boldsymbol{v}^{(1)}+R^{(1)}\boldsymbol{v}^{(2)},\boldsymbol{a}^{(1)}+R^{(1)}\boldsymbol{a}^{(2)}+\boldsymbol{v}^{(1)}a_0^{(2)}, \\ a_0^{(1)}+a_0^{(2)},b^{(1)}+b^{(2)}+v_a^{(1)}R_{ab}^{(1)}a_b^{(2)}+\frac{1}{2}a_0^{(2)}\left(v_a^{(1)}\right)^2\Bigg), \tag{21}$$

$$U^{-1}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v},\boldsymbol{a},a_0,b)= \\ =U\left(-\boldsymbol{\theta},-R^{-1}\boldsymbol{v},-R^{-1}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{v}a_0),-a_0,-b_0+a_cv_c-\frac{1}{2}a_0v_av_a\right),$$

где $R\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'$, $R\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'$, $a'_a=R_{ab}a_b$, $v'_a=R_{ab}v_b$, который можно принять за абстрактное определение расширенной группы Галилея.

Положив в (15) $b\equiv 0$, приходим к подгруппе расширенной группы Галилея, которую называют группой Галилея. При этом формулы (15) определяют не точное, а только проективное представление этой группы. Действительно, групповой закон для преобразований Галилея (14а) имеет вид:

$$g\left(\boldsymbol{\theta}^{(1)},\boldsymbol{v}^{(1)},\boldsymbol{a}^{(1)},a_0^{(1)}\right)g\left(\boldsymbol{\theta}^{(2)},\boldsymbol{v}^{(2)},\boldsymbol{a}^{(2)},a_0^{(2)}\right)= \\ =g\left(\boldsymbol{\theta}^{(1)}+\boldsymbol{\theta}^{(2)},\boldsymbol{v}^{(1)}+R^{(1)}\boldsymbol{v}^{(2)},\boldsymbol{a}^{(1)}+R^{(1)}\boldsymbol{a}^{(2)}+\boldsymbol{v}^{(1)}a_0^{(2)},a_0^{(1)}+a_0^{(2)}\right). \tag{22}$$

Но из (21) следует, что

$$U\left(\boldsymbol{\theta}^{(2)},\boldsymbol{v}^{(2)},\boldsymbol{a}^{(2)},a_0^{(2)},0\right)U\left(\boldsymbol{\theta}^{(1)},\boldsymbol{v}^{(1)},\boldsymbol{a}^{(1)},a_0^{(1)},0\right)=\exp(i\omega_{12})\times \\ \times U\left(\boldsymbol{\theta}^{(1)}+\boldsymbol{\theta}^{(2)},\boldsymbol{v}^{(1)}+R^{(1)}\boldsymbol{v}^{(2)},\boldsymbol{a}^{(1)}+R^{(1)}\boldsymbol{a}^{(2)}+\boldsymbol{v}^{(1)}a_0^{(2)},a_0^{(1)}+a_0^{(2)},0\right), \tag{23}$$

где фазовый множитель:

$$\omega_{12}=v_a^{(1)}R_{ab}^{(1)}a_b^{(2)}+\frac{1}{2}a_0^{(2)}v_a^{(1)}v_a^{(1)}. \tag{24}$$

Иными словами, операторы (20) при $b\equiv 0$ удовлетворяют закону групповой композиции (22) только с точностью до умножения на множитель $\exp(i\omega_{12})$, который не изменяет нормы волновой функции.

Мы убедились, что АИ уравнения (1), задаваемая операторами (4), содержит полную информацию о свойствах симметрии этого уравнения относительно непрерывных преобразований. Можно рассмотреть также дискретные преобразования вида

$$\begin{aligned} &x_a \to -x_a, \qquad t \to t, \\ &x_a \to x_a, \qquad t \to -t, \end{aligned} \tag{25}$$

$$\Psi(t,\boldsymbol{x}) \to P\Psi(t,\boldsymbol{x}) = \eta_1\Psi(t,-\boldsymbol{x}), \tag{26}$$

$$\Psi(t,\boldsymbol{x}) \to T\Psi(t,\boldsymbol{x}) = \eta_2\Psi(-t,\boldsymbol{x}), \tag{27}$$

$$\Psi(t,\boldsymbol{x}) \to C\Psi(t,\boldsymbol{x}) = \eta_3\Psi^*(t,-\boldsymbol{x}), \tag{28}$$

где $\eta_a = \pm 1$. Операторы (25)–(28) по определению удовлетворяют условиям $P^2 = T^2 = C^2 = I$, где I — единичный оператор.

Нетрудно убедиться, что уравнение Шредингера (1) инвариантно относительно преобразований P и CT, но C и T — неинвариантно. Это не означает, конечно, что не существует галилеевски-инвариантных уравнений с другими свойствами симметрии относительно преобразований (25)–(28). Поэтому рассмотрим полную группу Галилея, определяемую как совокупность преобразований (14)–(18) и (25)–(28). Произвольный оператор, задающий такие преобразования в пространстве квадратично-интегрируемых функций, можно представить в виде

$$U(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v},\boldsymbol{a},a_0,b,\varepsilon_P,\varepsilon_T,\varepsilon_C) = U(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v},\boldsymbol{a},a_0,b)P^{\frac{1-\varepsilon_P}{2}}T^{\frac{1-\varepsilon_T}{2}}C^{\frac{1-\varepsilon_C}{2}}, \tag{29}$$

где $U(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v},\boldsymbol{a},a_0,b)$ задан в (16), (20), а ε_P, ε_T, ε_C — параметры, независимо принимающие значения $+1$ или -1.

Операторы (29) удовлетворяют групповому закону

$$\begin{aligned} &U\left(\boldsymbol{\theta}^{(2)},\boldsymbol{v}^{(2)},\boldsymbol{a}^{(2)},a_0^{(2)},b^{(2)},\varepsilon_P^{(2)},\varepsilon_T^{(2)},\varepsilon_C^{(2)}\right)\times \\ &\times U\left(\boldsymbol{\theta}^{(1)},\boldsymbol{v}^{(1)},\boldsymbol{a}^{(1)},a_0^{(1)},b^{(1)},\varepsilon_P^{(1)},\varepsilon_T^{(1)},\varepsilon_C^{(1)}\right) = \\ &U\Big(\boldsymbol{\theta}^{(1)}+\varepsilon_C^{(1)}\boldsymbol{\theta}^{(2)},\boldsymbol{v}^{(1)}+\varepsilon_P^{(1)}\varepsilon_T^{(1)}\varepsilon_C^{(1)}R^{(1)}\boldsymbol{v}^{(2)},\boldsymbol{a}^{(1)}+\varepsilon_P^{(1)}\varepsilon_C^{(1)}R^{(1)}\boldsymbol{a}^{(2)}+ \\ &+\varepsilon_T^{(1)}\varepsilon_C^{(1)}\boldsymbol{v}^{(1)}a_0^{(2)},a_0^{(1)}+\varepsilon_T^{(1)}\varepsilon_C^{(1)}a_0^{(2)},b^{(1)}+\varepsilon_C^{(1)}b^{(2)}+\varepsilon_P^{(1)}\varepsilon_C^{(1)}v_a^{(1)}R_{ab}^{(1)}a_b^{(2)}+ \\ &+\frac{1}{2}\varepsilon_T^{(1)}\varepsilon_C^{(1)}a_0^{(2)}v_a^{(1)}v_a^{(1)},\varepsilon_P^{(1)}\varepsilon_P^{(2)},\varepsilon_T^{(1)}\varepsilon_T^{(2)},\varepsilon_C^{(1)}\varepsilon_C^{(2)}\Big), \\ &U^{-1}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v},\boldsymbol{a},a_0,b,\varepsilon_P,\varepsilon_T,\varepsilon_C) = U\Big(-\varepsilon_C\boldsymbol{\theta},-\varepsilon_P\varepsilon_T\varepsilon_C R^{-1}\boldsymbol{v}, \\ &-R^{-1}(\varepsilon_P\varepsilon_C\boldsymbol{a}-\varepsilon_P\boldsymbol{v}a_0),-\varepsilon_C\varepsilon_T a_0,-\varepsilon_C b+\varepsilon_T a_a v_a-\frac{1}{2}\varepsilon_C\varepsilon_T a_0 v_a v_a,\varepsilon_P,\varepsilon_T,\varepsilon_C\Big). \end{aligned} \tag{30}$$

Закон групповой композиции (30) будем считать определением 14-параметрической группы $\tilde{G}$. Ниже описан класс неприводимых проективных представлений группы $\tilde{G}$ (30), соответствующий отличным от нуля значениям инвариантного оператора C_2.

Неприводимые представления алгебры (6)–(10) в конфигурационном пространстве. Неприводимые представления алгебры (6)–(10) можно разделить на три класса, соответствующих следующим значениям инвариантных операторов C_2 и C_3 [4]:

$$\begin{array}{rlll} \text{I.} & c_2 = m \neq 0, & c_3 = m^2 s(s+1), & s = 0, 1/2, 1, \dots; \\ \text{II.} & c_2 = 0, & c_3 = 0; & \\ \text{III.} & c_2 = 0, & c_3 = r^2 > 0. & \end{array}$$

В приложении 1 найдены в явном виде все неэквивалентные представления алгебры (6)–(10) в импульсном пространстве.

Для исследования дифференциальных уравнений, инвариантных относительно группы Галилея, используем представления алгебры Ли расширенной группы Галилея 1-го класса в пространстве квадратично-интегрируемых функций $\Psi(t, \boldsymbol{x})$. Неприводимые представления 1-го класса задаются тремя числами — ε_0 (собственное значение инвариантного оператора C_1 [13]), m и s. Явный вид соответствующих генераторов P_0, P_a, J_a, G_a и M задается формулами

$$\begin{aligned} &P_0 = \frac{p^2}{2m} + \varepsilon_0, \qquad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad M = m, \\ &J_a = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p})_a + S_a, \qquad G_a = tp_a - mx_a, \end{aligned} \tag{31}$$

где S_a — матрицы размерности $(2s+1) \times (2s+1)$, образующие представление $D(s)$ алгебры Ли группы $O(3)$, ε_0 и m — произвольные действительные числа. Можно проверить непосредственным вычислением, что операторы (31) удовлетворяют коммутационным соотношениям (6)–(10). Инвариантные операторы (13) для генераторов (31) принимают вид:

$$C_1 = 2m\varepsilon_0, \qquad C_2 = m, \qquad C_3 = m^2 \boldsymbol{S}^2 = m^2 s(s+1).$$

Наконец, операторы (31) эрмитовы относительно скалярного произведения

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x\, \Psi_1^+(t, \boldsymbol{x}) \Psi_2(t, \boldsymbol{x}), \tag{32}$$

где $\Psi(t, \boldsymbol{x})$ — $(2s+1)$-компонентные функции;

$$\Psi = \text{столбец}\ (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_{2s+1}), \qquad \Psi_\alpha \subset L_2.$$

Иными словами, операторы (31) образуют эрмитовые неприводимые представления алгебры (6)–(10).

В случае $s = 0$ генераторы (31) сводятся к представлению (4), которое реализуется на множестве решений уравнения Шредингера. В общем случае пространство неприводимого представления (31) можно ассоциировать с пространством состояний свободной нерелятивистской частицы с массой m, спином s и внутренней энергией ε_0.

Используя формулу (19), нетрудно найти преобразования волновой функции $\Psi(t, \boldsymbol{x})$, генерируемые операторами (31):

$$\begin{aligned} \Psi(t, \boldsymbol{x}) \to \Psi'(t, \boldsymbol{x}) &= \exp(-iP_\mu a^\mu - imb) \exp(-iG_a v_a) \times \\ &\times \exp(-iJ_a \theta_a) \Psi(t, \boldsymbol{x}) = \exp[if(t', \boldsymbol{x}') - imb] D^s(\boldsymbol{\theta}) \Psi(t', \boldsymbol{x}'), \end{aligned} \tag{33}$$

где $D^s(\boldsymbol{\theta})$ — числовые матрицы, образующие представление $D(s)$ группы $O(3)$:

$$D^s(\boldsymbol{\theta}) = \exp(-i\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\theta}), \tag{34}$$

а $\boldsymbol{x}'$, t' и $f(t', \boldsymbol{x}')$ заданы формулами (14), (18).

Иногда под преобразованиями Галилея для волновой функции подразумевают переход от $\Psi(t, \boldsymbol{x})$ к $\Psi''(t'', \boldsymbol{x}'')$, где $\Psi''(t'', \boldsymbol{x}'')$ — функция, получаемая из (33) заменой $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}''$, $t \to t''$ [см. (146)]. Делая такую замену в правой части (33), приходим к преобразованию

$$\Psi(t, \boldsymbol{x}) \to \Psi''(t'', \boldsymbol{x}'') = \exp[if(t, \boldsymbol{x}) - imb]D^s(\boldsymbol{\theta})\Psi(t, \boldsymbol{x}). \tag{35}$$

Формулы (14), (33) [или (14), (35)] задают неприводимое представление $D(m, \varepsilon_0, s)$ группы Галилея в конфигурационном пространстве.

Ниже используются также приводимые представления алгебры (6)–(10), базисные элементы которых имеют вид:

$$\begin{aligned} &P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \\ &J_a = (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p})_a + S_a, \qquad G_a = tp_a - mx_a + \eta_a, \end{aligned} \tag{36}$$

где η_a — числовые матрицы, удовлетворяющие совместно с S_a алгебре Ли однородной группы Галилея:

$$[\eta_a, \eta_b] = 0, \qquad [\eta_a, S_b] = i\varepsilon_{abc}\eta_c, \qquad [S_a, S_b] = i\varepsilon_{abc}S_c. \tag{37}$$

Формулы (36) задают общий вид генераторов группы Галилея в пространстве квадратично-интегрируемых функций: $\Psi(t, \boldsymbol{x})$ = столбец $(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n)$, порождающих локальные преобразования

$$\Psi(t, \boldsymbol{x}) \to \Psi''(t'', \boldsymbol{x}'') = \exp[if(t, \boldsymbol{x}) - imb]D^s(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v})\Psi(t, \boldsymbol{x}). \tag{38}$$

где $\boldsymbol{x}''$, t'' и $f(t, \boldsymbol{x})$ заданы в (14), (18), а $D(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v})$ — числовые матрицы, образующие представление однородной группы Галилея:

$$D(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}) = \exp(-i\boldsymbol{S}\boldsymbol{\theta})\exp(-i\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{v}). \tag{39}$$

Операторы дискретной симметрии. Рассмотрим теперь представления полной группы Галилея $\tilde{G}$, определяемой групповым законом (30).

Если $\varepsilon_P = \varepsilon_T = \varepsilon_C \equiv 1$, то группа $\tilde{G}$ сводится к расширенной: группе Галилея G (21), которая является подгруппой группы $\tilde{G}$. Из (30) следует, что фактор-группа $\tilde{G}/G$ содержит восемь элементов $\{I, P, C, T, PC, PT, CT, CPT\}$, соответствующих значениям параметров ε_T, ε_P, ε_C, $\varepsilon_{PC} = \varepsilon_P\varepsilon_C$, $\varepsilon_{PT} = \varepsilon_P\varepsilon_T$, $\varepsilon_{CT} = \varepsilon_C\varepsilon_T$, $\varepsilon_{CPT} = \varepsilon_P\varepsilon_C\varepsilon_T$, где $\varepsilon_P, \varepsilon_C, \varepsilon_T = \pm 1$. Закон группового умножения для элементов группы $\tilde{G}/G$ можно представить в следующем виде:

Элементы	I	P	T	C	PT	CP	CT	CPT
I	I	P	T	C	PT	CP	CT	CPT
P	P	I	PT	PC	T	C	CPT	CT
T	T	PT	I	CT	P	CPT	C	CP
C	C	CP	CT	I	CPT	P	T	PT
PT	PT	T	P	CPT	I	CT	CP	C
CP	CP	C	CPT	P	CT	I	PT	T
CT	CT	CPT	C	T	CP	PT	I	P
CPT	CPT	CT	CP	PT	C	T	P	I

Будем искать представления группы (30) в пространстве квадратично-интегрируемых функций $\Psi(t, \boldsymbol{x})$ со скалярным произведением (32). Рассмотрим только такие представления группы $\tilde{G}$, которые при редукции по G сводятся к представлениям 1-го класса (когда $m \neq 0$). Генераторы группы G для представлений 1-го класса задаются формулами (31), и поэтому остается только определить явный вид операторов P, T и C, которые порождают представление фактор-группы $\tilde{G}/G$.

Из (29), (30) заключаем, что операторы P, T и C должны удовлетворять следующим перестановочным соотношениям с генераторами P_μ, J_a, G_a, M:

$$PJ_a = J_aP, \qquad PP_0 = P_0P, \qquad PM = MP, \tag{40}$$

$$PP_a = -P_aP, \qquad PG_a = -G_aP, \tag{41}$$

$$TJ_a = J_aT, \qquad TP_a = P_aT, \tag{42}$$

$$TP_0 = -P_0T, \qquad TG_a = -G_aT, \qquad TM = -MT, \tag{43}$$

$$CJ_a = -J_aC, \qquad CP_a = -P_aC, \qquad CG_a = -G_aC, \tag{44}$$

$$CP_0 = -P_0C, \qquad CM = -MC. \tag{45}$$

Из (30) следует также, что операторы P, T и C удовлетворяют условиям

$$C^2 = T^2 = P^2 = 1, \qquad CP = PC, \qquad CT = TC, \qquad PT = TP. \tag{46}$$

Поскольку нас интересуют не только точные, но и проективные представления группы (30), то соотношения (46) должны выполняться с точностью до фазового множителя [27]

$$\begin{gathered} C^2 = \exp(i\varphi_3), \qquad T^2 = \exp(i\varphi_2), \qquad P^2 = \exp(i\varphi_1), \\ CP = PC\exp(i\varphi_4), \qquad CT = TC\exp(i\varphi_5), \qquad PT = TP\exp(i\varphi_6), \end{gathered} \tag{47}$$

где φ_n — некоторые действительные числа, причем можно положить $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

Из (40)–(45) видно, что операторы P, T и C не коммутируют с инвариантными операторами (13) (например, T не коммутирует с C_2), поэтому областью определения операторов P, T и C может служить только пространство приводимого представления алгебры (6)–(10). Генераторы такого представления для $m \neq 0$ можно выбрать в виде прямой суммы генераторов (31) (где для упрощения выкладок положим $\varepsilon_0 = 0$):

$$\begin{gathered} P_0 = \boldsymbol{P}^2(2M)^{-1}, \qquad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad M = \tilde{M}, \\ J_a = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p})_a + S_a, \qquad G_a = tp_a - Mx_a, \end{gathered} \tag{48}$$

где S_a — генераторы приводимого представления группы $O(3)$, а M — числовая матрица, коммутирующая с S_a.

Из (40)–(45), (48) следует, что операторы P, T и C удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} Px_a = -x_aP, \qquad Pp_a = -p_aP, \qquad Pt = tP, \\ Tx_a = x_aT, \qquad Tp_a = p_aT, \qquad Tt = -tT, \\ Cx_a = x_aC, \qquad Cp_a = -p_aC, \qquad Ct = tC, \end{gathered} \tag{49}$$

где x_a и t — операторы умножения на независимые переменные. Общий вид операторов, удовлетворяющих (49), можно задать формулами

$$\begin{aligned} &P\Psi(t,\boldsymbol{x}) = r_1\Psi(t,-\boldsymbol{x}),\\ &T\Psi(t,\boldsymbol{x}) = r_2\Psi(-t,\boldsymbol{x}),\\ &C\Psi(t,\boldsymbol{x}) = r_3\Psi^*(t,\boldsymbol{x}), \end{aligned} \tag{50}$$

где r_a — некоторые числовые матрицы.

Из (40)–(45), (48) и (49) получаем, что матрицы r_a должны удовлетворять следующим условиям:

$$r_0r_2 = -r_2r_0, \qquad r_0^2 = 1, \qquad r_2^2 = 1, \tag{51}$$

$$r_0S_a = S_ar_0, \qquad r_2S_a = S_ar_2, \tag{52}$$

$$r_0r_1 = r_1r_0, \qquad r_1^2 = 1, \qquad r_1r_2 = r_2r_1\exp(i\varphi_6), \qquad r_1S_a = S_ar_1, \tag{53}$$

$$\begin{aligned} &r_3r_1 = r_1^*r_3\exp(i\varphi_5), \qquad r_3r_2 = r_2^*r_3\exp(i\varphi_4),\\ &r_3^2 = \exp(i\varphi_3), \qquad r_3r_0 = r_0^*r_3, \end{aligned} \tag{54}$$

где r_0 — оператор знака массы:

$$r_0 = M\cdot|M|^{-1}. \tag{55}$$

Таким образом, задача описания представлений группы $\tilde{G}$ для $m\neq 0$ сводится к решению системы уравнений (51)–(54) для матриц r_μ и S_a.

Решение системы (51)–(54) приведем в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Все возможные (с точностью до эквивалентности) неприводимые матрицы, удовлетворяющие системе соотношений (51)–(55), можно пронумеровать набором чисел* $(s,\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\eta)$, *где* $s = 0, 1/2, 1, \ldots$, $\varepsilon_\mu,\eta = \pm 1$.

Явный вид соответствующих матриц задается формулами:

при $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_1,\varepsilon_3,\eta = \pm 1$

$$\begin{aligned} &r_1 = \eta\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & \varepsilon_3 I\end{pmatrix}, \qquad r_2 = \begin{pmatrix} 0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}, \qquad r_3 = \begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & \varepsilon_1 I\end{pmatrix}\Delta_2,\\ &r_0 = \begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}, \qquad S_a = \begin{pmatrix} S_a & 0\\ 0 & S_a\end{pmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{pmatrix} \Delta & 0\\ 0 & \Delta\end{pmatrix}; \end{aligned} \tag{56}$$

при $\varepsilon_0 = -1$, $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_1,\varepsilon_3,\eta = \pm 1$

$$\begin{aligned} &r_1 = \eta\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_3 I & 0 & 0\\ 0 & 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 I\end{pmatrix}, \qquad r_2 = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0\\ I & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & I\\ 0 & 0 & I & 0\end{pmatrix},\\ &r_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I\\ I & 0 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_1 I & 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad r_0 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0\\ 0 & -I & 0 & 0\\ 0 & 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0 & -I\end{pmatrix},\\ &S_a = \eta\begin{pmatrix} S_a & 0 & 0 & 0\\ 0 & S_a & 0 & 0\\ 0 & 0 & S_a & 0\\ 0 & 0 & 0 & S_a\end{pmatrix}, \qquad \Delta_4 = \eta\begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 & 0\\ 0 & \Delta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \Delta & 0\\ 0 & 0 & 0 & \Delta\end{pmatrix}; \end{aligned} \tag{57}$$

при $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_3 = \pm 1$

$$
\begin{gathered}
r_1 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_3 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I \end{pmatrix}, \qquad r_2 = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 \end{pmatrix}, \\
r_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_0 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_0\varepsilon_1 I \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 I & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
r_1 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad S_a = \begin{pmatrix} S_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_a \end{pmatrix},
\end{gathered} \tag{58}
$$

где S_a *— генераторы неприводимого представления* $D(s)$ *группы* $O(3)$*,* 0 *и* I *—* $(2s+1)$*-рядные единичная и нулевая матрицы;* Δ *— матрицы, определяемые с точностью до знака соотношениями [27]*

$$
\Delta s_a = -s_a^* \Delta, \qquad \Delta^2 = (-1)^{2s}. \tag{59}
$$

Доказательство. Рассмотрим соотношения (51) и (52). Используя лемму Шура и принимая во внимание, что представления алгебры (51) можно записать в виде прямой суммы матриц Паули, получаем неприводимые представления соотношений (51), (52) в форме

$$
r_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad r_2 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_a = \begin{pmatrix} S_a & 0 \\ 0 & S_a \end{pmatrix}, \tag{60}
$$

где S_a, I и 0 — матрицы, определяемые в формулировке теоремы.

Рассмотрим теперь соотношения (51)–(53). Так как операторы S_a, r_0 и r_2 всегда можно представить в виде прямой суммы матриц (60), нетрудно показать, что $\varphi_6 = \pm\pi$ и что неприводимые решения системы соотношений (51)–(53) задаются формулами (60) и (61):

$$
r_1 = \eta \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \varepsilon_3 I \end{pmatrix}, \qquad \eta = \pm 1. \tag{61}
$$

Наконец, представляя r_1, r_2 и r_0, S_a в виде прямой суммы матриц (56), (57), учитывая соотношения

$$
r_1^* = r_1, \qquad r_2^* = r_2, \qquad r_0^* = r_0
$$

и используя преобразования эквивалентности

$$
r_k \to r_k' = V r_k V^{-1} \quad (k \neq 3), \qquad r_3 \to r_3' = V r_3 (V^{-1})^*,
$$

получаем неприводимые решения соотношений (51)–(54) в виде (56)–(59).

Заметим, что значения параметров ε_μ следующим образом связаны со свойствами матриц r_μ:

$$
r_1 r_2 = \varepsilon_3 r_2 r_1, \qquad r_1 r_3 = \varepsilon_2 r_3 r_1, \qquad r_2 r_3 = \varepsilon_1 r_3 r_2, \qquad r_3^2 = \varepsilon_0 (-1)^{2s}. \tag{62}
$$

Формулы (46), (52)–(54) задают все возможные (с точностью до эквивалентности) представления операторов P, T и C, удовлетворяющих условиям (40)–(45), (47), (48). Из (40)–(45), (47), (48) заключаем, что

$$M = r_0 m. \tag{63}$$

Следовательно, *неприводимые проективные представления полной группы Галилея (30), соответствующие $m \neq 0$, нумеруются числами ε, s, m, ε_μ, η и задаются формулами (29), (48), (50), (56)–(58), (63).*

Отметим, что представления подгруппы группы $\tilde{G}$ (включающей преобразования (14), (15), (26) и произведение преобразований CT, где C и T заданы в (27) и (28)), найдены в работе [19].

2. Дифференциальные уравнения второго порядка для частиц с произвольным спином

В этом разделе получены два класса галилеевски-инвариантных систем дифференциальных уравнений второго порядка для частиц произвольного спина и дана их лагранжева формулировка.

Постановка задачи. Уравнение Шредингера (1) инвариантно относительно расширенной группы Галилея и описывает движение свободной бесспиновой частицы. Естественно, возникает вопрос, существуют ли уравнения вида

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,\boldsymbol{x}) = H_s(\boldsymbol{p})\Psi(t,\boldsymbol{x}), \tag{64}$$

где $H_s(\boldsymbol{p})$ — некоторый дифференциальный оператор, которые, как и уравнение (1), обладают галилеевской симметрией, но описывают частицы с произвольным значением спина. Выводу таких уравнений и посвящен настоящий раздел.

Определение 1. *Уравнение (64) галилеевски-инвариантно, если оператор $L = i\dfrac{\partial}{\partial t} - H_s(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет условиям (2), где $\{Q_A\}$ — совокупность операторов $\{P_0, P_a, J_a, G_a, M\}$, удовлетворяющих алгебре (6)–(10).*

Будем искать инвариантные уравнения (64) в пространстве $2(2s+1)$-компонентных квадратично-интегрирующих функций:

$$\Psi(t,\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \Psi_1(t,\boldsymbol{x}) \\ \Psi_2(t,\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \Psi_{2(2s+1)}(t,\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}, \qquad \Psi_n \subset L_2. \tag{65}$$

Задачу описания таких уравнений решим в двух, вообще говоря неэквивалентных подходах. В первом подходе (I) задача формулируется следующим образом: найти все возможные (с точностью до эквивалентности) операторы H_s^{I}, удовлетворяющие условию галилеевской инвариантности (2), если генераторы группы Галилея имеют вид (36), где

$$S_a = \begin{pmatrix} s_a & 0 \\ 0 & s_a \end{pmatrix}, \qquad \eta_a = k(\sigma_1 + i\sigma_2)S_a, \tag{66}$$

s_a — генераторы неприводимого представления $D(s)$ группы $O(3)$, σ_1 и σ_2 — $2(2s+1)$-рядные матрицы Паули:

$$\begin{aligned} &\sigma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \\ &\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = i\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{67}$$

I и 0 — $(2s+1)$-рядные единичные и нулевые матрицы; k — произвольный комплексный параметр.

Формулы (36), (66) задают самый общий (с точностью до эквивалентности) вид генераторов группы Галилея, соответствующих локальным преобразованиям (38) волновой функции (65).

Ниже покажем, что операторы H_s^{I} всегда можно выбрать такими, чтобы уравнение (64) было инвариантно также относительно произведения преобразований $P\cdot T\cdot C$, где операторы P, T и C заданы в (50) и (56).

Подставляя (36), (64) в (2), убеждаемся, что уравнение (64) удовлетворяет условию галилеевской инвариантности, если гамильтониан H_s^{I} удовлетворяет условиям

$$[H_s^{\mathrm{I}}, P_a] = [H_s^{\mathrm{I}}, J_a] = 0, \tag{68}$$

$$[H_s^{\mathrm{I}}, G_a] = iP_a, \tag{69}$$

где P_a, J_a, G_a — генераторы (36).

Во втором подходе (II) задача сводится к нахождению всех возможных дифференциальных операторов H_s^{II}, таких, чтобы операторы

$$\begin{aligned} &P_0^{\mathrm{II}} = H_s^{\mathrm{II}}, \qquad P_a^{\mathrm{II}} = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad M^{\mathrm{II}} = \sigma_1 m, \\ &J_a^{\mathrm{II}} = (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p})_a + S_a, \qquad G_a^{\mathrm{II}} = tp_a - Mx_a + \eta_a^{\mathrm{II}} \end{aligned} \tag{70}$$

удовлетворяли алгебре (6)–(10). Здесь σ_1 — одна из матриц Паули (67); η_a^{II} — некоторые операторы (явный вид которых нужно найти); S_a — матрицы (66).

Можно показать, что формулы (70) задают самый общий (с точностью до эквивалентности) вид генераторов группы G, соответствующих значениям инвариантных операторов (13) $|c_2| = m$, $c_3 = m^2 s(s+1)$, при котором уравнение (60) инвариантно относительно преобразования $P\cdot T$, где P и T определены в (50), (56) при $\varepsilon_3 = -1$.

Потребуем, чтобы генераторы (70) были эрмитовы относительно обычного принятого в квантовой механике скалярного произведения (32) (где $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ — $2(2s{+}1)$-компонентные функции (65)). Существенное отличие представления (36) от (70) состоит в том, что генераторы H_s^{I} и G_a^{I} оказываются неэрмитовыми относительно (32), но эрмитовыми в гильбертовом пространстве со скалярным произведением

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x\ \Psi_1^\dagger \hat{M}\Psi_2, \tag{71}$$

где $\hat{M}$ — некоторый положительно определенный дифференциальный оператор, или относительно индефинитной метрики (71), $\hat{M}$ — некоторая положительно неопределенная числовая матрица. Явный вид $\tilde{M}$ определен ниже. Усложнение метрики — следствие локальных трансформационных свойств (38) функции $\Psi(t, \boldsymbol{x})$.

Потребуем, чтобы гамильтониан H_s^{II} удовлетворял условию

$$\left(H_s^{\mathrm{II}}\right)^2 = \left(m + p^2/2m\right)^2. \tag{72}$$

Это эквивалентно требованию, чтобы внутренняя энергия частицы (собственные значения инвариантного оператора G_1 (13)) совпадала с ее массой.

Итак, задача описания галилеевски-инвариантных уравнений вида (64) сводится к решению системы коммутационных соотношений (68), (69) для операторов H_s^{I} и P_a^{I}, G_a^{I}, J_a^{I}, M^{I} (36), (66) и соотношений (6)–(10) для генераторов (70).

Явный вид гамильтонианов $\boldsymbol{H_s^{\mathrm{II}}}$. Решение задачи 1 приведем в виде следующей теоремы.

Теорема 3. *Все возможные (с точностью до эквивалентности) гамильтонианы H_s^{I}, удовлетворяющие совместно с генераторами (36), (66) коммутационным соотношениям (68), (69), задаются формулами*

$$H_s^{\mathrm{I}} = \sigma_1 a m + 2iak\sigma_3 S_a p_a + \frac{1}{2m} C_{ab} p_a p_b, \tag{73}$$

$$\tilde{H}_s^{\mathrm{I}} = \frac{a}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2)m + \sigma_3 \tilde{a} m - 2\tilde{a}k(i\sigma_1 - \sigma_2) S_a p_a + \frac{1}{2m} C_{ab} p_a p_b, \tag{74}$$

где

$$C_{ab} = \delta_{ab} - 2ak^2(\sigma_1 + i\sigma_2)(S_a S_b + S_b S_a), \tag{75}$$

a, $\tilde{a}$ и k — произвольные параметры.

Доказательство. Общий вид гамильтониана H_s^{I} проще найти в представлении, где $\eta_a^{\mathrm{I}} = 0$. Переход к такому представлению осуществляется с помощью преобразования

$$\begin{aligned} &H_s^{\mathrm{I}} \to \left(H_s^{\mathrm{I}}\right)' = V H_s^{\mathrm{I}} V^{-1}, \qquad P_a^{\mathrm{I}} \to \left(P_a^{\mathrm{I}}\right)' = V P_a^{\mathrm{I}} V^{-1} = p_a, \\ &J_a^{\mathrm{I}} \to \left(J_a^{\mathrm{I}}\right)' = V J_a^{\mathrm{I}} V^{-1} = J_a^{\mathrm{I}}, \qquad G_a^{\mathrm{I}} \to \left(G_a^{\mathrm{I}}\right)' = V G_a^{\mathrm{I}} V^{-1} = t p_a - m x_a, \end{aligned} \tag{76}$$

где

$$V = \exp[(i/m)\eta_a p_a] = 1 + (i/m)\eta_a p_a. \tag{77}$$

Преобразование (76), (77) сводит генераторы (36) к прямой сумме генераторов (31).

Из (68), (69) и (76) находим общий вид оператора $\left(H_s^{\mathrm{I}}\right)'$:

$$\left(H_s^{\mathrm{I}}\right)' = p^2/2m + A, \qquad A = \sigma_\mu a^\mu m, \tag{78}$$

где σ_μ — матрицы (67); a^μ — произвольные комплексные коэффициенты.

Таким образом, в представлении (76) уравнение (64) принимает вид:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi' = \left(p^2/2m + \sigma_\mu a^\mu m\right)\Psi', \qquad \Psi' = V\Psi, \tag{79}$$

а уравнение в исходном Ψ-представлении можно получить из (79) с помощью преобразования, обратного (76), (77).

Покажем, что матрицу A (78) можно свести к одной из следующих форм:

$$A = \sigma_3 \tilde{a} m + (a/2)(\sigma_1 - i\sigma_2)m \tag{80}$$

или

$$A = \sigma_1 a m, \tag{81}$$

где a, $\tilde{a}$ — произвольные коэффициенты.

Действительно, коэффициент a_0 всегда может быть обращен в нуль с помощью унитарного преобразования

$$\begin{gathered}\left(H_s^{\mathrm{I}}\right)' \to \exp(ia_0 mt)\left(H_s^{\mathrm{I}}\right)' \exp(-ia_0 mt) + \\ + i\exp(ia_0 mt)\frac{\partial}{\partial t}\exp(-ia_0 mt) = \left(H_s^{\mathrm{I}}\right)' - a_0 m.\end{gathered} \tag{82}$$

Далее имеется три возможности:

$$A \equiv 0, \qquad a_b = 0, \quad b = 1, 2, 3, \tag{83}$$

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0, \qquad a_b \neq 0, \tag{84}$$

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a^2 \neq 0. \tag{85}$$

Формула (83) совпадает с (80) при $a = \tilde{a} = 0$. Случай (84) соответствует неунитарному представлению расширенной группы Галилея (инвариантный оператор $C_1 = 2mP_0 - P_a P_a = 2m^2 A$ задается нильпотентной матрицей) и поэтому должен быть отброшен.

Рассмотрим третью возможность — (85). Пусть $\tilde{a}_1^2 + \tilde{a}_2^2 \neq 0$, тогда преобразование

$$A \to V_1 A V_1^{-1}, \qquad V_1 = b + i\sigma_3 c + (\sigma_1 + i\sigma_2)d, \quad V_1^{-1} = b - i\sigma_3 c - (\sigma_1 + i\sigma_2)d, \tag{86}$$

$$b = \cos\varphi, \quad c = \sin\varphi, \quad \varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{a_1 + 2d^2}{a_2 - 2id^2}\right), \quad d = \left[\frac{a_3^2(a_1 - ia^2)}{4a(a_1^2 + a_2^2)}\right]^{1/2}, \tag{87}$$

приводит матрицу A (78) к форме (81). Если же $a_1^2 + a_2^2 = 0$, то посредством преобразования $A \to V_2 A V_2^{-1}$, где

$$\begin{gathered} V_2 = 1 + (\sigma_1 + i\sigma_2)\frac{f}{2}, \qquad V_2^{-1} = 1 - (\sigma_1 + i\sigma_2)\frac{f}{2}, \\ f = \begin{cases} a_1/a_3, & \text{если } a_2 = ia_1, \\ 0, & \text{если } a_2 = -ia_1, \end{cases}\end{gathered} \tag{88}$$

матрица (82) приводится к виду (80).

Операторы (86) и (88) удовлетворяют условиям

$$V_\alpha \eta_a V_\alpha^{-1} = \varkappa_\alpha \eta_a, \qquad \alpha = 1, 2, \tag{89}$$

где η_a — матрицы (66), а $\varkappa_\alpha$ — числовые коэффициенты, причем $\varkappa_1 = \exp(2i\varphi)$, $\varkappa_2 = 1$, параметр φ задан в (87). Нетрудно убедиться, что не существует оператора, удовлетворяющего одному из условий (89) и преобразующего (80) к форме (81).

Подвергая операторы (78), (80), (81) преобразованию, обратному (76), приходим к гамильтонианам (73), (74). Операторы (73), (74), очевидно, удовлетворяют условиям (68), (69). Кроме того, эти операторы исчерпывают все возможные решения соотношений (36), (66), (68), (69) с точностью до преобразований эквивалентности $H_s^{\mathrm{I}} \to V_\alpha H_s^{\mathrm{I}} V_\alpha^{-1} + i(\partial V_\alpha/\partial t)V_\alpha^{-1}$, где V_α — числовые матрицы (88), не изменяющие согласно (89) общего вида генераторов (36), (66). Итак, теорема доказана.

Таким образом, мы получили галилеевски-инвариантные дифференциальные уравнения в форме (64), (73), (74). Инвариантность этих уравнений относительно преобразований Галилея (14), (38) можно проверить непосредственно. Действительно, используя соотношение (см. (66))

$$\exp(-i\eta_a v_a) = 1 - i\eta_a v_a, \tag{90}$$

получаем, что операторы (73), (74) удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered}\exp[if(t,\boldsymbol{x})]D(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v})\left[i\frac{\partial}{\partial t} - H_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{p})\right] \times \\ \times D^{-1}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v})\exp[-if(t,\boldsymbol{x})] = i\frac{\partial}{\partial t''} - H_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{p}''),\end{gathered} \tag{91}$$

где $H_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{p}'')$ — гамильтонианы, получаемые из (73), (74) заменой $p_a \to p''_a = -i\dfrac{\partial}{\partial x''_a}$. Из (91) следует, что $\Psi''(t'',\boldsymbol{x}'')$ (38) удовлетворяет такому же уравнению, как и непреобразованная функция $\Psi(t,\boldsymbol{x})$:

$$i\frac{\partial}{\partial t''}\Psi''(t'',\boldsymbol{x}'') = H_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{p}'')\Psi''(t'',\boldsymbol{x}'').$$

Нетрудно убедиться (проще всего это сделать в представлении (76)), что операторы Казимира (13), построенные из генераторов (36), имеют следующие собственные значения: $c_1 = \pm m$, $c_2 = m$, $c_3 = m^2 s(s+1)$. Итак, уравнения (64), (73), (74) можно интерпретировать как уравнения движения свободной нерелятивистской частицы с массой m, спином s и внутренней энергией $\pm m$.

Лагранжева формулировка. Формулы (73), (74) задают нерелятивистские гамильтонианы для частицы с произвольным спином. Эти гамильтонианы определены с точностью до произвольных параметров a, $\tilde{a}$ и k, которые можно выбрать такими, чтобы уравнения (64), (73), (74) были инвариантны относительно антиунитарного преобразования $\Theta^* = P{\cdot}T{\cdot}C$, где операторы P, T и C заданы формулами (50):

$$\Psi(t,\boldsymbol{x}) \to \Theta^*\Psi(t,\boldsymbol{x}) = r\Psi^*(-t,-\boldsymbol{x}), \qquad r = r_1 r_2 r_3.$$

Необходимым и достаточным условием такой инвариантности для H_s^{I} или $\tilde{H}_s^{\mathrm{I}}$ является одновременное выполнение соотношений

$$a^* = \pm a, \quad k^* = \pm k \qquad \text{или} \qquad a = 0, \quad \tilde{a}^* = \tilde{a}, \quad k^* = k. \tag{92}$$

При этом

$$r = \begin{cases} \sigma_3\Delta_2, & \text{если } a^* = -a, \quad k^* = -k \quad \text{или} \quad a = 0, \quad \tilde{a}^* = \tilde{a}, \quad k^* = k, \\ \Delta_2, & \text{если } a^* = a, \quad k^* = k, \end{cases}$$

где Δ_2 — матрицы, заданные в (56), (59).

При ограничениях на параметры a, $\tilde{a}$ и k, задаваемых формулами (92), уравнения (64), (73), (74) инвариантны относительно группы $G \times F$, где F — группа, состоящая из двух элементов: $F = \{\Theta^*, I\}$, где I — тождественное преобразование. Отметим, однако, что эти уравнения неинвариантны относительно каждого из преобразований (50) в отдельности.

Согласно лемме 1 уравнения (64), (73), (74) инвариантны также относительно алгебры Ли группы Шредингера, базисные элементы которой включают помимо генераторов P_a, G_a J_a и M (36) также операторы

$$\begin{gathered} \hat{P}_0 = \frac{p^2}{2m}, \qquad D = t\hat{P}_0 - x_a p_a + \frac{3i}{2} + \frac{1}{m}\eta_a p_a, \\ A = t^2\hat{P}_0 - tD - \frac{1}{2}m\boldsymbol{x}^2 + \eta_a x_a. \end{gathered} \tag{93}$$

Операторы P_a, J_a, G_a, M (36) и $\hat{P}_0$, D, A (93) удовлетворяют алгебре (6)–(11).

Гамильтонианы (73), (74) и генераторы (36), (66) неэрмитовы в скалярном произведении (32). Однако гамильтонианы (73) эрмитовы в метрике (71), где положительно определенный оператор $\hat{M}$ равен

$$\hat{M} = V^\dagger V = 1 + \left[i(k^* - k)\sigma_1 - (k^* + k)\sigma_2\right] \frac{S_a p_a}{m} + 2k^* k(1 - \sigma_3)\left(\frac{S_a p_a}{m}\right)^2.$$

Кроме того, если параметры a, $\tilde{a}$ и k удовлетворяют условиям (92), гамильтонианы (73), (74) эрмитовы также в индефинитной метрике, когда $\hat{M}$ в (71) имеет вид:

$$\hat{M} = \xi = \begin{cases} \sigma_1, & \text{если } a^* = a, \ k^* = k \quad \text{или} \quad k^* = k, \ \tilde{a}^* = \tilde{a}, \ a = 0, \\ \sigma_2, & \text{если } a^* = -a, \ k^* = -k. \end{cases} \tag{94}$$

Если выполняется (94), то уравнения (64), (73), (74) можно получить из вариационного принципа. Действительно, выбирая лагранжиан $L_0(t, \boldsymbol{x})$ в виде

$$\begin{gathered} L_0(t, \boldsymbol{x}) = \frac{i}{2}\left(\bar{\Psi}\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t}\Psi\right) - am\bar{\Psi}\sigma_1\Psi + \\ + a\tilde{k}\left(\bar{\Psi}\sigma_3 S_a \frac{\partial \Psi}{\partial x_a} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_a}\sigma_3 S_a \Psi\right) - \frac{1}{2m}\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_b} C_{ab} \frac{\partial \Psi}{\partial x_b}, \qquad \bar{\Psi} = \Psi^\dagger \xi, \end{gathered} \tag{95}$$

если H_s^{I} задается формулой (73), и

$$\begin{gathered} L_0(t, \boldsymbol{x}) = \frac{i}{2}\left(\bar{\Psi}\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t}\Psi\right) + m\bar{\Psi}\left[\frac{a}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) + a\sigma_3\right]\Psi + \\ + 2\tilde{a}k\left[\bar{\Psi}(\sigma_2 - i\sigma_1)S_a \frac{\partial \Psi}{\partial x_a} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_a}(\sigma_2 - i\sigma_1)S_a \Psi\right] - \frac{1}{2m}\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_a} C_{ab} \frac{\partial \Psi}{\partial x_b}, \end{gathered} \tag{96}$$

если гамильтониан имеет вид (74), можно убедиться, что уравнения Лагранжа–Эйлера для функций (95), (96) совпадают с уравнениями (64), (73), (74) для $\bar{\Psi}(t,\boldsymbol{x})$. Для $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ получаем уравнение

$$i\frac{\partial}{\partial t}\bar{\Psi} = \left[H_s^{\mathrm{I}}\right]^T \bar{\Psi},$$

где $\left[H_s^{\mathrm{I}}\right]^T$ — операторы, которые можно получить из (73), (74) с помощью операции транспонирования всех входящих в H_s^{I} и $\tilde{H}_s^{\mathrm{I}}$ матриц.

Кроме того, легко показать, что формулы (95), (96) задают действительные функции от Ψ, $\bar{\Psi}$ и их первых производных, инвариантные относительно преобразований Галилея (38), (66), и, следовательно, $L_0(t,\boldsymbol{x})$ можно интерпретировать как лагранжиан свободной нерелятивистской частицы с произвольным спином s.

Явный вид гамильтонианов $\boldsymbol{H_s^{\mathrm{II}}}$. Найдем теперь дифференциальные операторы H_s^{II}, удовлетворяющие совместно с генераторами (70) соотношениям (6)–(10), (72).

Теорема 4. *Все возможные (с точностью до эквивалентности) дифференциальные операторы H_s^{II}, эрмитовые в метрике (32) и удовлетворяющие условиям (6)–(10), (70), (72), задаются формулами*

$$\begin{aligned} H_s^{\mathrm{II}} = \sigma_1\left[m + \frac{p^2}{2m} - \frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2}{ms^2}\sin^2\theta_s\right] + \\ +\sigma_2\frac{\sqrt{2}\sin\theta_s}{s}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} - \sigma_3\left[a_s\frac{p^2}{2m} + b_s\frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2}{2ms^2}\right], \end{aligned} \tag{97}$$

где

$$\begin{aligned} & a_{1/2} = \sin 2\theta_{1/2}, \qquad b_{1/2} = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad b_1 = \sin 2\theta_1, \\ & a_{3/2} = b_{3/2} - \frac{5}{4}\sin 2\theta_{3/2} = -\frac{1}{8}\sin 2\theta_{3/2} - \frac{3}{4}\sin\theta_{3/2}\left(1 - \frac{1}{9}\sin\theta_{3/2}\right)^{1/2}, \\ & a_s = b_s = \theta_s = 0, \qquad s > 3/2, \end{aligned} \tag{98}$$

а $\theta_{1/2}$, θ_1, $\theta_{3/2}$ — произвольные действительные параметры.

Доказательство. Сначала покажем, что операторы H_s^{II} могут включать производные не выше второго порядка. Действительно, пусть $H_s^{\mathrm{II}} = \sum\limits_{i=0}^{N} H_i$, где H_i содержит производные только i-го порядка. Тогда из (72) получаем:

$$H_N H_N = H_N^{\dagger} H_N = 0 \qquad \text{или} \qquad H_N = 0, \quad \text{если} \quad N > 2. \tag{99}$$

Представим искомые дифференциальные операторы H_s^{II} в виде разложения по спиновым матрицам и $2(2s+1)$-рядным матрицам Паули (67):

$$H_s^{\mathrm{II}} = \sum_{\mu=0}^{3}\left(a_\mu m + b_\mu\frac{p^2}{2m} + c_\mu\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} + d_\mu\frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2}{2m}\right)\sigma_\mu, \tag{100}$$

где a_μ, b_μ, c_μ, d_μ — произвольные действительные коэффициенты. Используя операторы ортогонального проектирования [16, 17]

$$\Lambda_r = \prod_{r'\neq r}\frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})p^{-1} - r'}{r - r'}, \qquad r, r' = -s, -s+1, \ldots, s,$$

удовлетворяющие условиям ортогональности и полноты

$$\Lambda_r\Lambda_{r'} = \delta_{rr'}\Lambda_r, \qquad \sum_r \Lambda_r = 1, \qquad \sum_r r^k \Lambda_r = \left(\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{p}\right)^k,$$

формулу (100) можно переписать в виде

$$H_s^{\rm II} = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{r=-s''}^{s'} \left[a_\mu m + \left(b_\mu + r^2 d_\mu\right)\frac{p^2}{2m} + rpc_\mu\right]\sigma_\mu\Lambda_r. \tag{101}$$

Операторы (101), очевидно, удовлетворяют условиям (68). Потребуем, чтобы выполнялось (77). Подставляя (101) в (72), используя ортогональность проекторов Λ_r и приравнивая независимые слагаемые, получаем, что a_r, b_r, c_r и d_r должны удовлетворять одной из следующих систем уравнений:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{3} a_i^2 = 1, \qquad \sum_{i=1}^{3}\left[r^2c_i^2 + a_i\left(b_i + r^2 d_i\right)\right] = 1,\\ \sum_{i=1}^{3} c_i r\left(b_i + r^2 d_i\right) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} rc_i a_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3}\left(b_i + r^2 d_i\right)^2 = 1\end{gathered} \tag{102}$$

или

$$a_0 = b_0 = 1, \qquad d_0 = c_0 = a_i = b_i = c_i = d_i = 0, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{103}$$

Общее решение системы алгебраических уравнений (102) (с точностью до линейных преобразований эквивалентности) задается формулами

$$\begin{aligned}&a_1 = 1, \qquad a_0 = a_2 = a_3 = 0,\\ &b_1 = 1, \qquad b_3 = a_s, \qquad b_0 = b_2 = 0,\\ &c_2 = \frac{\sqrt{2}\sin\theta_{s'}}{s^2}, \qquad c_0 = c_1 = c_3 = 0,\\ &d_1 = -(c_2)^2, \qquad d_3 = \frac{b_s}{s^2}, \qquad d_0 = d_2 = 0,\end{aligned} \tag{104}$$

где a_s, b_s, θ_s заданы в (98). Можно показать, что уравнения (103) несовместны с (6)–(10).

Подставив (104) в (100), приходим к гамильтонианам (97). Для завершения доказательства теоремы достаточно теперь указать явный вид операторов $\eta_a^{\rm II}$, при котором операторы (70) удовлетворяют соотношениям (10), (57). Нетрудно убедиться, что $\eta_a^{\rm II}$ можно выбрать в форме

$$\eta_a^{\rm II} = [U, \sigma_1 x_a m]U^\dagger, \tag{105}$$

где

$$U = \frac{E + H_s^{\rm II}\sigma_1}{\sqrt{2E\left[2E - \left(\frac{pr}{ms}\sin\theta_s\right)^2\right]}}\Lambda_r, \qquad E = m + \frac{p^2}{2m} \tag{106}$$

есть оператор, диагонализующий гамильтонианы (97) и генераторы (70):

$$U^+H_s^{\mathrm{II}}U = \sigma_1 E, \qquad U^+G_a^{\mathrm{II}}U = tp_a - \sigma_1 m x_a,$$
$$U^+J_a^{\mathrm{II}}U = J_a^{\mathrm{II}}, \qquad U^+P_a^{\mathrm{II}}U = P_a^{\mathrm{II}}. \tag{107}$$

Теорема доказана.

Таким образом, мы получили гамильтонианы нерелятивистской частицы со спином s в виде (97). Уравнения (64) с гамильтонианами H_s^{II} инвариантны относительно алгебры Ли расширенной группы Галилея (70), а значит, и относительно алгебры Ли группы Шредингера, базисные элементы которой задаются формулами (12), (70). Эти уравнения инвариантны также относительно дискретного преобразования $\Theta = P\cdot T$, где P и T определены в (50)

$$\Psi(r, \boldsymbol{x}) \to \Theta\Psi(t, \boldsymbol{x}) = \sigma_2\Psi(-t, -\boldsymbol{x}). \tag{108}$$

Здесь σ_2 — одна из матриц (67). Можно показать, что уравнения (64), (97) инвариантны относительно каждого из преобразований (50), но только в том случае, если r_a задаются не числовыми матрицами, но некоторыми интегродифференциальными операторами.

Отметим, что в случае $s = 1/2$, $\theta_{1/2} = \pi/4$, $k = -i$, $a = 1$ уравнения (64), (73) и (64), (97) можно записать в компактной форме:

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\,\Psi(t, \boldsymbol{x}) = i\gamma_4 \frac{p^2}{2m}\Psi(t, \boldsymbol{x}) \tag{109}$$

и

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\,\Psi(t, \boldsymbol{x}) = (1 + \gamma_4 - \gamma_0)\frac{p^2}{2m}\Psi(t, \boldsymbol{x}), \tag{110}$$

где

$$\gamma_0 = \sigma_1, \qquad \gamma_a = -2i\sigma_2 S_a, \qquad \gamma_4 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

суть матрицы Дирака.

Уравнения (109), (110) отличаются от релятивистского уравнения Дирака только наличием слагаемых в правой части, которые, очевидно, нарушают инвариантность относительно группы Пуанкаре, но обеспечивают инвариантность соответствующих уравнений относительно группы Галилея.

Для решения конкретных задач с использованием полученных выше уравнений может понадобиться явный вид матриц S_a, входящих в гамильтонианы H_s^{I} и H_s^{II}. Матричные элементы генераторов S_a в базисе Гельфанда–Цетлина [28] приведены в формулах (149), (150). Приведем также уравнения (64), (73) для $s = 1/2, 1$ в покомпонентной записи:

1. $s = 1/2$, $\Psi(t, \boldsymbol{x})$ — столбец $(\Phi_1, \Phi_2, \chi_1, \chi_2)$,

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{p^2}{2m}\right)\Phi = am\chi + iak\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\Phi - \frac{a^2k^2}{2m}p^2\chi,$$
$$\left(i\frac{p}{\partial t} - \frac{p^2}{2m}\right)\chi = am\Phi - iak\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\chi, \tag{111}$$

где Φ и χ — двухкомпонентные спиноры:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \qquad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix},$$

σ_a — матрицы Паули.

2. $s = 1$, $\Psi(t, \boldsymbol{x})$ — столбец $(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3)$,

$$\begin{aligned} &\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{p^2}{2m}\right)\boldsymbol{\Phi} = am\boldsymbol{\chi} - 2ak\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\Phi} - \frac{ak^2}{m}\left[p^2\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\chi})\right], \\ &\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{p^2}{2m}\right)\boldsymbol{\chi} = am\boldsymbol{\Phi} + 2ak\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\chi}, \end{aligned} \tag{112}$$

где $\boldsymbol{\chi}$ и $\boldsymbol{\Phi}$ — векторы с компонентами χ_1, χ_2, χ_3 и Φ_1, Φ_2, Φ_3. Уравнения (112) совпадают с (64), (73), если матричные элементы генераторов S_a выбрать в виде

$$(S_a)_{bc} = -i\varepsilon_{abc}, \tag{113}$$

где ε_{abc} — абсолютно антисимметричный тензор третьего ранга.

3. Уравнения первого порядка

Здесь рассматриваются системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с постоянными коэффициентами, т. е. уравнения вида

$$L\Psi(t, \boldsymbol{x}) = 0, \qquad L = \beta_\mu p^\mu + \beta_5 m, \tag{114}$$

где $\Psi(t, \boldsymbol{x})$ — вектор-столбец:

$$\Psi(t, \boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \Psi_1(t, \boldsymbol{x}) \\ \Psi_2(t, \boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \Psi_n(t, \boldsymbol{x}) \end{pmatrix}, \qquad n < \infty,$$

β_μ, β_5 — некоторые числовые матрицы.

Имеется хорошо разработанная теория уравнений вида (114), инвариантных относительно преобразований из группы $O(3)$ и группы Лоренца [28], и в то же время мало изучены системы дифференциальных уравнений первого порядка, инвариантные относительно группы Галилея.

Построению галилеевски-инвариантных систем дифференциальных уравнений первого порядка для частиц с произвольным спином посвящен этот раздел. Среди полученных ниже уравнений имеются такие, которые, в отличие от уравнений ЛХГ, описывают спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействие частицы с полем.

Основные определения и постановка задачи. Рассмотрим системы дифференциальных уравнений (114) и определим условия, которым должны удовлетворять матрицы β_μ, β_5 чтобы эти уравнения были инвариантными относительно преобразований Галилея.

Обобщая свойства симметрии уравнения Шредингера (1), будем говорить, что уравнение (114) инвариантно относительно группы Галилея, если оператор L (114) удовлетворяет условиям (2), где Q_A — генераторы произвольного представления расширенной группы Галилея. Потребуем, чтобы генераторы группы Галилея на множестве решений уравнения (114) имели локально-ковариантную форму (36), а операторы f_A задавались числовыми матрицами (в этом и только в этом случае конечные преобразования Галилея для $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ имеют локальную форму (38). Тогда условие галилеевской инвариантности можно сформулировать следующим образом.

Определение 2. *Уравнение (114) локально-инвариантно относительно группы Галилея, если оператор L (114) удовлетворяет условиям*

$$\tilde{J}_a L - L J_a = 0, \qquad \tilde{G}_a L - L G_a = 0, \tag{115}$$

где J_a, G_a и $\tilde{J}_a$, $\tilde{G}_a$ — генераторы расширенной группы Галилея в представлении (36):

$$\begin{aligned} J_a &= (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p})_a + S_a, \qquad & G_a &= tp_a - mx_a + \eta_a,\\ \tilde{J}_a &= (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p})_a + \tilde{S}_a, \qquad & \tilde{G}_a &= tp_a - mx_a + \tilde{\eta}_a, \end{aligned} \tag{116}$$

а S_a, η_a (и $\tilde{S}_a$, $\tilde{\eta}_a$) — матрицы, образующие представления (в общем случае неэквивалентные) алгебры Ли однородной группы Галилея (37).

Подставив генераторы (116) и оператор L из (114) в (115), получаем условие локальной галилеевской инвариантности уравнений (114) в виде следующих соотношений для матриц β_k $(k = 0,1,2,3,5)$:

$$\begin{aligned} &\tilde{S}_a\beta_0 - \beta_0 S_a = 0, \qquad \tilde{S}_a\beta_5 - \beta_5 S_a = 0, \qquad \tilde{\eta}_a\beta_0 - \beta_0\eta_a = 0,\\ &\tilde{\eta}_a\beta_5 - \beta_5\eta_a = -i\beta_a, \qquad \tilde{\eta}_a\beta_b - \beta_b\eta_a = -i\delta_{ab}\beta_0, \end{aligned} \tag{117}$$

где S_a, η_a и $\tilde{S}_a$, $\tilde{\eta}_a$ — матрицы, удовлетворяющие алгебре (37).

Таким образом, задачу описания галилеевски-инвариантных уравнений первого порядка вида (114) можно свести к решению матричных уравнений (37), (117).

Особый интерес для физики представляют уравнения, допускающие лагранжеву формулировку. Исследуем дополнительные ограничения, налагаемые на матрицы β_k, S_a, η_a, $\tilde{S}_a$, $\tilde{\eta}_a$ требованием, чтобы уравнение (114) могло быть получено при использовании принципа минимального действия из соответствующим образом подобранного лагранжиана. Для этого сформулируем сначала следующее утверждение, которое позволяет выделить классы эквивалентных галилеевски-инвариантных уравнений (114).

Лемма 2. *Пусть η_a, S_a, $\tilde{\eta}_a$, $\tilde{S}_a$, β_k — совокупность матриц, удовлетворяющих условиям (37), (117). Тогда матрицы*

$$\begin{aligned} &\beta'_k = B\beta_k, \qquad S'_a = S_a, \qquad \eta'_a = \eta_a,\\ &\tilde{\eta}'_a = B\eta_a B^{-1}, \qquad \tilde{S}'_a = B\tilde{S}_a B^{-1}, \end{aligned} \tag{118}$$

где B — произвольная невырожденная матрица, также удовлетворяют уравнениям (37), (117).

Для доказательства леммы достаточно умножить каждое из уравнений (117) слева на матрицу B и воспользоваться соотношением $B^{-1}B = 1$.

Согласно лемме 2, каждое решение системы соотношений (117) определяет целый класс уравнений, локально инвариантных относительно группы Галилея

$$B(\beta_\mu p^\mu + \beta_5 m)\Psi(t,\boldsymbol{x}) = 0, \tag{119}$$

где B — произвольная невырожденная матрица.

Потребуем, чтобы уравнения (114) допускали лагранжеву формулировку. Общий вид лагранжиана, соответствующего уравнению (114) (с точностью до членов, не вносящих вклада в уравнения движения), задается формулой

$$L = \frac{i}{2}\left(\bar{\Psi}\beta_\mu\frac{\partial\Psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_\mu}\beta_\mu\Psi\right) - \bar{\Psi}\beta_5 m\Psi, \tag{120}$$

где $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger B$, а B — некоторая неособенная матрица. Из условия вещественности лагранжиана получаем, что

$$(B\beta_\mu)^\dagger = B\beta_\mu, \qquad (B\beta_5)^\dagger = B\beta_5. \tag{121}$$

В силу леммы 2 и с учетом (121) делаем вывод, что матрицы β_μ, β_5 можно выбрать эрмитовыми (что соответствует лагранжиану (120) с $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger$). Но тогда из требования инвариантности лагранжиана относительно инфинитезимальных преобразований

$$\Psi \to (1 + iG_a v_a)\Psi, \qquad \Psi \to (1 + iJ_a\theta_a)\Psi, \tag{122}$$

где G_a и J_a заданы формулами (116), получаем следующие условия для матриц $\tilde{S}_a$ и $\tilde{\eta}_a$ из (117):

$$\tilde{S}_a = S_a^\dagger, \qquad \tilde{\eta}_a = \eta_a^\dagger. \tag{123}$$

Подставляя (123) в (117) и принимая во внимание эрмитовость матриц S_a приходим к системе уравнений

$$S_a\beta_0 - \beta_0 S_a = 0, \tag{124}$$

$$S_a\beta_5 - \beta_5 S_a = 0, \tag{125}$$

$$\eta_a^\dagger\beta_0 - \beta_0\eta_a = 0, \tag{126}$$

$$\eta_a^\dagger\beta_5 - \beta_5\eta_a = -i\beta_a, \tag{127}$$

$$\eta_a^\dagger\beta_b - \beta_b\eta_a = -i\delta_{ab}\beta_0, \tag{128}$$

$$\beta_k^\dagger = \beta_k, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 5. \tag{129}$$

Итак, мы получили, что задача описания галилеевски-инвариантных уравнений вида (114), допускающих лагранжеву формулировку, эквивалентна решению системы уравнений (37), (124)–(129) для матриц β_k, S_a, η_a.

Сформулируем еще одно утверждение, используемое ниже при вычислении явного вида матриц β_k.

Лемма 3. *Пусть матрицы S_a, η_a, β_k удовлетворяют соотношениям (37), (124)–(129). Тогда совокупность матриц $\{S_a, \eta_a, \beta'_k\}$, где*

$$\beta'_k = V^\dagger\beta_k V, \tag{130}$$

где V — произвольная матрица, коммутирующая с S_a и η_a:

$$[V, S_a] = [V, \eta_a] = 0, \tag{131}$$

также удовлетворяет уравнениям (37), (124)–(129).

Доказательство. Умножим каждое из соотношений (124)–(129) слева на $V^\dagger$, а справа на V. В результате, учитывая (131), приходим к уравнениям (124)–(129) для β'_k, определяемых формулой (130).

Если матрица V обратима, то β_k и β'_k являются эквивалентными решениями системы соотношений (124)–(129). Будем искать решения этих соотношений с точностью до преобразований эквивалентности, задаваемых формулами (130), (131).

Каноническая форма уравнений (114). Прежде чем приступать к решению системы соотношений (37), (124)–(129), исследуем некоторые свойства уравнений (114), которые можно вывести, не используя явный вид матриц β_k.

Хорошо известно (см. [29]), что релятивистские волновые уравнения вида (114) (где β_5 — обратимая матрица) могут быть приведены к стандартной (канонической) форме (включающей только одну матрицу $\beta'_0 = \beta_5^{-1}\beta_0$):

$$\beta'_0\sqrt{p_\mu p^\mu}\Psi = m\Psi.$$

Покажем, что галилеевски-инвариантные уравнения (114) также приводятся к некоторой канонической форме (в которой оператор L выражается только через две матрицы — β_0 и β_5). Для этого подвергнем функцию $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ из (144) преобразованию $\Psi(t,\boldsymbol{x}) \to \Psi'(t,\boldsymbol{x}) = V^{-1}\Psi(t,\boldsymbol{x})$, где

$$V = \exp(-i\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{p}/m). \tag{132}$$

Функция $\Psi'(t,\boldsymbol{x})$, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$L'\Psi'(t,\boldsymbol{x}) = 0, \qquad L' = V^\dagger L V, \tag{133}$$

где L — оператор (114).

Используя формулу Кэмпбелла–Хаусдорфа

$$\begin{aligned} &\exp(A^\dagger)B\exp(A) = \sum\{A,B\}^n\frac{1}{n!},\\ &\{A,B\}^n = [A^\dagger\{A,B\}^{n-1}], \qquad \{A,B\}^0 = B \end{aligned} \tag{134}$$

и коммутационные соотношения (124)–(128), получаем:

$$\begin{aligned} &V^\dagger\beta_0 V = \beta_0, \qquad V^\dagger\beta_a p_a V = \beta_a p_a + \beta_0\frac{p^2}{m},\\ &V^\dagger\beta_5 V = \beta_5 + \frac{1}{m}\beta_a p_a + \frac{1}{2m}\beta_0 p^2, \end{aligned} \tag{135}$$

откуда

$$L' = V^\dagger(\beta_0 p_0 - \beta_a p_a + \beta_5 m)V = \beta_0\left(p_0 - \frac{p^2}{2m}\right) + \beta_5 m. \tag{136}$$

Подставляя (136) в (133), приходим к уравнению в канонической форме:

$$\left[\beta_0\left(p_0 - \frac{p^2}{2m}\right) + \beta_5 m\right]\Psi'(t,\boldsymbol{x}) = 0. \tag{137}$$

Итак, произвольное галилеевски-инвариантное уравнение первого порядка (114) можно преобразовать к системе уравнений второго порядка в форме (137) (для уравнений АХГ [5–7] этот факт был установлен в работе [11]). Однако уравнения (114) и (137) становятся неэквивалентными после введения минимального взаимодействия с внешним электромагнитным полем (т.е. после замены $p_\mu \to p_\mu - eA_\mu$, где A_μ — 4-вектор-потенциал электромагнитного поля).

Уравнения (137) имеют форму явно инвариантную относительно преобразований Галилея. Генераторы группы Галилея на решениях уравнений (137) имеют квазидиагональный вид, задаваемый формулами (31), где S_a — генераторы некоторого приводимого представления группы $O(3)$, коммутирующие с матрицами β_0 и β_5.

Используя представление (137), сформулируем еще одно дополнительное требование, которое будет налагаться на матрицы β_k. А именно, потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\det\left(\beta_\mu p^\mu + \beta_5 m\right) \equiv \det\left[\beta_0\left(p_0 - \frac{p^2}{2m}\right) + \beta_5 m\right] = c\left(p_0 - \frac{p^2}{2m}\right)^n, \tag{138}$$

где c — некоторая не равная нулю константа; n — целое число ($n \neq 0$).

Условие (138) означает, что уравнение (114) принадлежит параболическому типу.

Конечномерные представления алгебры Ли однородной группы Галилея. Приступим к решению системы соотношений (37), (124)–(129).

Рассмотрим сначала соотношения (37), определяющие алгебру Ли однородной группы Галилея, которая локально-изоморфна группе Евклида $E(3)$. Каждое решение соотношений (37), т. е. каждый набор конечномерных матриц S_a и η_a, удовлетворяющих (37), задает представление этой алгебры.

Группа $E(3)$ не является полупростой, поэтому ее конечномерные представления неунитарны и не вполне приводимы. Описанию неразложимых конечномерных представлений алгебры Ли группы $E(3)$ посвящена работа [30]. Однако результаты, полученные в ней, имеют весьма общую и, по-видимому, не очень конструктивную форму. Кроме того, не все из приведенных в [30] представлений являются неэквивалентными.

Ниже конструктивно описан класс конечномерных представлений алгебры (37). Алгебра (37) имеет два инвариантных оператора

$$D_1 = S_a\eta_a, \qquad D_2 = \eta_a\eta_a, \tag{139}$$

которые в случае конечномерных представлений являются нильпотентными матрицами, т.е. удовлетворяют условиям

$$D_1^N = D_2^{N'} = 0, \tag{140}$$

где N и N' — некоторые положительные целые числа.

Алгебра (37) включает подалгебру $O(3)$, образуемую матрицами S_a. Представления этой подалгебры хорошо известны и задаются целым или полуцелым числом s.

Рассмотрим только такие представления алгебры (37), которые при редукции по алгебре $O(3)$ включают не более двух неэквивалентных представлений. В этом случае матрицы S_a можно выбрать в виде

$$S_a = S_a^{nm} = \left(\begin{array}{c|c} I_n \otimes \hat{S}_a & \hat{0}^\dagger \\ \hline \hat{0} & I_m \otimes \Sigma_a \end{array}\right), \tag{141}$$

где $\hat{S}_a$ и Σ_a — генераторы неприводимых представлений $D(s)$ и $D(s')$ группы $O(3)$, т.е. матрицы, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} &[\hat{S}_a, \hat{S}_b] = i\varepsilon_{abc}s_c, \qquad s_a s_a = s(s+1), \\ &[\Sigma_a, \Sigma_b] = i\varepsilon_{abc}\Sigma_c, \qquad \Sigma_a\Sigma_a = s'(s'+1), \end{aligned} \tag{142}$$

I_n и I_m — единичные матрицы размерности $n \times n$ и $m \times m$, $\hat{0}$ — нулевые матрицы с размерностью $m \times n$, а символ $A \otimes B$ означает прямое (кронекеровское) произведение матриц. Ограничимся также случаем, когда пространство представления алгебры $E(3)$ включает не более двух ортогональных подпространств, инвариантных относительно действия оператора (139). Описание указанных выше представлений дается следующей теоремой.

Теорема 5. *Все возможные (с точностью до эквивалентности) неразложимые конечномерные представления алгебры $E(3)$ (37), включающие не более двух неэквивалентных представлений подалгебры $O(3)$ и удовлетворяющие дополнительному требованию, чтобы инвариантный оператор D_1 (139) имел не более двух ортогональных собственных подпространств, можно пронумеровать набором целых чисел (n, m, α), где*

$$\alpha = 1, 2, \quad n \le 4, \quad m \le 4, \quad |n - m| \le 2, \quad nm \ne 9.$$

Явный вид соответствующих матриц S_a и η_a задается формулами

$$\begin{aligned} &S_a = S_a^{(nm\alpha)} = S_a^{nm}, \qquad \eta_a = \eta_a^{(nm\alpha)}, \\ &\eta_a^{(nm1)} = \frac{1}{2s}\left(\begin{array}{c|c} a_1^{nm} \otimes \hat{S}_a & a_2^{nm} \otimes K_a \\ \hline a_3^{nm} \otimes K_a^\dagger & a_4^{nm} \otimes \Sigma_a \end{array}\right), \qquad \eta_a^{(nm2)} = \left[\eta_a^{(nm1)}\right]^\dagger, \end{aligned} \tag{143}$$

где S_a^{nm} — матрицы (141); $s' = s - 1$; K_a — матрицы размерности $(2s-1) \times (2s+1)$, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} &K_a\hat{S}_b - \Sigma_b K_a = i\varepsilon_{abc}K_c, \\ &\hat{S}_a\hat{S}_b + K_a^\dagger K_b = is\varepsilon_{abc}\hat{S}_c + s^2\delta_{ab}, \end{aligned} \tag{144}$$

a_l^{nm} — матрицы с матричными элементами

$$\begin{aligned} &[a_1^{nm}]_{ij} = \begin{cases} \delta_{i-1,j}, & n \ge m,\ i, j, \le n, \\ \dfrac{s-1}{s+1}\delta_{i-1,j}, & n < m, \end{cases} \\ &[a_2^{nm}]_{ij} = \begin{cases} -(2s-1)^{-1/2}\delta_{i-2,j}, & n > m,\ i \le n,\ j \le m, \\ (2s+1)^{-1/2}\delta_{i,j}, & n < m, \\ k\delta_{i,j+1}, & n = m, \end{cases} \\ &[a_3^{nm}]_{ij} = \begin{cases} (2s-1)^{-1/2}\delta_{i,j}, & n > m,\ i \le m,\ j \le n, \\ (2s+1)^{-1/2}\delta_{i-2,j}, & n \le m, \end{cases} \\ &[a_4^{nm}]_{ij} = \begin{cases} \dfrac{s+1}{s-1}\delta_{i-1,j}, & n \ge m, \\ \delta_{i-1,j}, & n < m \end{cases} \end{aligned} \tag{145}$$

где k — произвольный параметр.

Представления $D(n,m,\alpha=1)$ и $D(n,m,\alpha=2)$ эквивалентны в том и только в том случае, если $|n-m|=1$.

Доказательство. Полное доказательство теоремы здесь не приведено. Однако следует заметить, что формулы (143) определяют общий вид матриц η_a, удовлетворяющих перестановочным соотношениям $[\eta_a, S_a]=i\varepsilon_{abc}\eta_c$ генераторами (141). Потребуем, чтобы матрицы η_a (143) коммутировали друг с другом, и используем соотношения [7]:

$$\begin{aligned}
&K_a\hat{S}_b-K_b\hat{S}_a=i(s+1)\varepsilon_{abc}K_c,\\
&\Sigma_aK_b-\Sigma_bK_a=i(1-s)\varepsilon_{abc}K_c,\\
&K_aK_b^\dagger-K_bK_a^\dagger=-i(2s+1)\varepsilon_{abc}\Sigma_c,\\
&K_a^\dagger K_b-K_b^\dagger K_a=i(2s-1)\varepsilon_{abc}\hat{S}_c,
\end{aligned}\tag{146}$$

тогда получим следующую систему уравнений для матриц a_l^{nm}:

$$\begin{aligned}
&(a_1^{nm})^2+(2s-1)a_2^{nm}a_3^{nm}=0,\\
&(s+1)a_1^{nm}a_2^{nm}-(s-1)a_2^{nm}a_4^{nm}=0,\\
&(s+1)a_3^{nm}a_1^{nm}-(s-1)a_4^{nm}a_3^{nm}=0,\\
&(a_4^{nm})^2-(2s+1)a_3^{nm}a_2^{nm}=0.
\end{aligned}\tag{147}$$

Условие, чтобы инвариантный оператор D_1 (139) имел не более двух инвариантных собственных подпространств, сводится к требованию, чтобы матрицы a_1^{nm} и a_3^{nm} не были вполне приводимыми.

Все неэквивалентные решения соотношений (147) и задаются формулами (142), (145). При этом большее из чисел (n,m) совпадает с индексом нильпотентности инвариантного оператора D_1 (139).

Приведем для полноты явный вид матриц S_a и K_a в базисе $|s,s_3\rangle$, в котором операторы $\boldsymbol{S}^2$ и S_3 диагональны [7]:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{S}^2|s,s_3\rangle=s(s+1)|s,s_3\rangle,\qquad S_3|s,s_3\rangle=s_3|s,s_3\rangle,\\
&S_1|s,s_3\rangle=a^s_{s_3,s_3+1}|s,s_3+1\rangle+a^s_{s_3,s_3-1}|s,s_3-1\rangle,\\
&S_2|s,s_3\rangle=ia^s_{s_3,s_3+1}|s,s_3+1\rangle-ia^s_{s_3,s_3-1}|s,s_3-1\rangle,\\
&K_1|s,s_3\rangle=C^{s,s-1}_{s_3}|s-1,s_3\rangle+C^{s,s-1}_{s_3,s_3-2}|s-1,s_3-2\rangle,\\
&K_2|s,s_3\rangle=iC^{s,s-1}_{s_3}|s-1,s_3\rangle-iC^{s,s-1}_{s_3,s_3-2}|s-1,s_3-2\rangle,\\
&K_3|s,s_3\rangle=f^{s,s-1}_{s_3}|s-1,s_3\rangle,
\end{aligned}\tag{148}$$

где

$$\begin{aligned}
&s_3=-s,-s+1,\dots,s,\qquad a^s_{s_3,s_3\pm1}=\frac{1}{2}\sqrt{s_3(s_3\pm1)-s(s+1)},\\
&f^{s,s-1}_{s_3}=\sqrt{s_3(2s-s_3)},\qquad C^{s,s-1}_{s_3}=\frac{1}{2}\sqrt{(2s-s_3)(2s+1-s_3)},\\
&C^{s,s-1}_{s_3,s_3-2}=\frac{1}{2}\sqrt{s_3(s_3+1)}.
\end{aligned}\tag{149}$$

Выражения для матриц Σ_a можно получить из формул (148), (149) заменой $s\to s'$, $s'=s-1$.

Явный вид матриц $\boldsymbol{\beta_k}$. При решении системы уравнений (37), (124)–(129) ограничимся случаем, когда матрицы S_a и η_a реализуют неразложимые представления алгебры (37), описанные в теореме 5.

Рассмотрим сначала представления алгебры (37), соответствующие $N \leq 3$, где N — индекс нильпотентности инвариантного оператора D_1 (139). Потребуем, чтобы матрицы β_k удовлетворяли условию (138).

Решение задачи приведем в виде следующего утверждения.

Теорема 6. *Все возможные (с точностью до эквивалентности) маьрицы β_k, S_a, η_a, удовлетворяющие соотношениям (124)–(129), (138)–(140) (с $N \leq 3$) и условиям теоремы 5, задаются формулами (150)–(153):*

$$\beta_0 = \left(\begin{array}{c|c|c} I & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right), \qquad \beta_5 = 2\left(\begin{array}{c|c|c} \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & I & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & c^{-2}I \end{array}\right),$$

$$\beta_a = \frac{i}{s}\left(\begin{array}{c|c|c} \cdot & \hat{S}_a & c^{-1}K_a^\dagger \\ \hline -\hat{S}_a & \cdot & \cdot \\ \hline -c^{-1}K_a & \cdot & \cdot \end{array}\right), \qquad S_a = \left(\begin{array}{c|c|c} \hat{S}_a & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \hat{S}_a & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \Sigma_a \end{array}\right), \tag{150}$$

$$\eta_a = \frac{1}{2s}\left(\begin{array}{c|c|c} \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \hat{S}_a & \cdot & \cdot \\ \hline cK_a & \cdot & \cdot \end{array}\right), \qquad c = (2s-1)^{-1/2};$$

$$\beta_0 = \left(\begin{array}{c|c|c} \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & 1 & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right), \qquad \beta_5 = 2\left(\begin{array}{c|c|c} d^{-2}I & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & 1 \end{array}\right),$$

$$\beta_a = \frac{i}{s}\left(\begin{array}{c|c|c} \cdot & -d^{-1}K_a^\dagger & \cdot \\ \hline d^{-1}K_a & \cdot & \Sigma_a \\ \hline \cdot & -\Sigma_a & \cdot \end{array}\right), \qquad S_a = \left(\begin{array}{c|c|c} \hat{S}_a & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \Sigma_a & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \Sigma_a \end{array}\right), \tag{151}$$

$$\eta_a = \frac{1}{2s}\left(\begin{array}{c|c|c} \cdot & dK_a^\dagger & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \Sigma_a & \cdot \end{array}\right), \qquad d = (2s+1)^{-1/2};$$

$$\beta_0 = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right), \quad \beta_5 = 2\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \cdot & \frac{a^2}{2}I & aI & \cdot & \cdot \\ \hline \frac{a^2}{2}I & aI & I & \cdot & \cdot \\ \hline aI & I & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & -a\hat{1} & (s-1)\hat{1} \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & (s-1)\hat{1} & \cdot \end{array}\right), \tag{152}$$

$$\beta_a = \frac{i}{s}\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \cdot & \cdot & S_a & \cdot & c(s-1)K_a^\dagger \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & csK_a^\dagger & \cdot \\ \hline -S_a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & -csK_a & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline -c(s-1)K_a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right),$$

$$S_a = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} S_a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & S_a & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & S_a & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \Sigma_a & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \Sigma_a \end{array}\right), \quad \eta_a = \frac{1}{2s}\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline S_a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & S_a & \cdot & -cK_a^\dagger & \cdot \\ \hline cK_a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & cK_a & \cdot & \frac{s+1}{s-1}\Sigma_a & \cdot \end{array}\right);$$

$$\beta_0 = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \hat{1} & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \hat{1} & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right), \quad \beta_5 = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} bI & (s+1)I & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline (s+1)I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \frac{b^2}{2} & b\hat{1} \\ \hline \cdot & \cdot & \frac{b^2}{2}\hat{1} & b\hat{1} & \hat{1} \\ \hline \cdot & \cdot & b\hat{1} & \hat{1} & \cdot \end{array}\right),$$

$$\beta_a = \frac{i}{s}\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \cdot & \cdot & \cdot & -dsK_a^\dagger & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & -d(s+1)K_a^\dagger & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & d(s+1)K_a & \cdot & \cdot & \Sigma_a \\ \hline dsK_a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & -\Sigma_a & \cdot & \cdot \end{array}\right), \tag{153}$$

$$S_a = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} S_a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & S_a & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \Sigma_a & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \Sigma_a & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \Sigma_a \end{array}\right), \quad \eta_a = \frac{1}{2s}\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \cdot & \cdot & dK_a^\dagger & \cdot & \cdot \\ \hline \frac{s-1}{s+1}S_a & \cdot & \cdot & dK_a^\dagger & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \Sigma_a & \cdot & \cdot \\ \hline dK_a & \cdot & \cdot & \Sigma_a & \cdot \end{array}\right),$$

где символами S_a, Σ_a *и* K_a *обозначены матрицы размерности* $(2s+1)\times(2s+1)$, $(2s-1)\times(2s-1)$ *и* $(2s-1)\times(2s+1)$, *определяемые соотношениями (144), (146),* 1 *и* $\hat{1}$ — $(2s+1)$- *и* $(2s-1)$*-рядные единичные матрицы, а точками — нулевые матрицы соответствующей размерности;* a *и* b — *произвольные числа.*

Доказательство. Используя лемму Шура заключаем, что общий вид матриц β_0 и β_5, удовлетворяющих соотношениям (124), (125), (129), (141), задается формулами

$$\beta_0 = \left(\begin{array}{c|c} y_1\otimes I & 0 \\ \hline 0 & y_2\otimes\hat{1} \end{array}\right), \qquad \beta_5 = 2\left(\begin{array}{c|c} x_1\otimes I & 0 \\ \hline 0 & x_2\otimes 1 \end{array}\right), \tag{154}$$

где x_1, y_1 (и x_2, y_2) — неизвестные эрмитовые матрицы размерности $(n\times n)$ и $(m\times m)$.

Потребуем, чтобы матрица β_0 удовлетворяла условиям (126). Используя (143), (154), получаем следующие уравнения для y_1 и y_2:

$$(a_1^{nm})^\dagger y_1 - y_1 a_1^{nm} = (a_3^{nm})^\dagger y_2 - y_1 a_2^{nm} = (a_4^{nm})^\dagger y_2 - y_2 a_4^{nm} = 0. \tag{155}$$

Подставляя β_5 (154) и η_a (143) в (127), находим β_a:

$$\beta_a = \frac{i}{s}\left(\begin{array}{c|c} A\otimes S_a & B^\dagger\otimes K_a^\dagger \\ \hline -B\otimes K_a & D\otimes\Sigma_a \end{array}\right), \tag{156}$$

где

$$A = (a_1^{nm})^\dagger x_1 - x_1 a_1^{nm}, \; B = (a_2^{nm})^\dagger x_1 - x_2 a_3^{nm}, \; D = (a_4^{nm})^\dagger x_2 - x_2 a_4^{nm}. \tag{157}$$

Наконец, подставив (143), (154), (156) в (128), приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&Aa_1^{nm}\otimes S_aS_b+B^\dagger a_3^{nm}\otimes K_a^\dagger K_b-\left(a_1^{nm}\right)^\dagger A\otimes S_bS_a+\\
&\qquad+\left(a_3^{nm}\right)^\dagger BK_b^\dagger K_a=2s^2y_1\otimes I\delta_{ab},\\
&Aa_2^{nm}\otimes S_aK_b^\dagger+B^\dagger a_4^{nm}\otimes K_a\Sigma_b-\left(a_1^{nm}\right)^\dagger B^\dagger\otimes S_bK_a^\dagger-\\
&\qquad-\left(a_3^{nm}\right)^\dagger D\otimes K_b^\dagger\Sigma_a=0,\\
&Da_4^{nm}\otimes\Sigma_a\Sigma_b-Ba_2^{nm}\otimes K_aK_b^\dagger-\left(a_2^{nm}\right)^\dagger B^\dagger\otimes K_bK_a^\dagger-\\
&\qquad-\left(a_4^{nm}\right)^\dagger D\otimes\Sigma_b\Sigma_a=2s^2y_2\otimes I\delta_{ab}.
\end{aligned}\tag{158}$$

Выражая в (158) с помощью соотношений (144), (146) $K_a^\dagger K_b$, S_bS_a, $K_b^\dagger K_a$, $\Sigma_a\Sigma_b$ через S_aS_b, $\Sigma_a\Sigma_b$, S_c, Σ_c и $\delta_{ab}I$, δ_{ab}, $\hat{1}$ и приравнивая матричные коэффициенты при этих линейно независимых операторах, приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}
&\left\{(a_1^\dagger x_1a_1-x_1a_1a_1)(2s-1)+x_1a_3a_2-a_3^\dagger x_2a_3\right\}+\text{э.с.}=0,\\
&(2s-1)(a_1^\dagger a_1^\dagger x_1-a_1^\dagger x_1a_1+a_3^\dagger x_2a_3)+(s-1)a_3^\dagger a_2^\dagger x_1-sx_1a_2a_3=0,\\
&(a_3^\dagger x_2a_3-x_1a_2a_3)+\text{э.с.}=2(2s-1)y_1,\\
&\left\{(s-1)(x_2a_3a_2-a_2^\dagger x_1a_2)+(s+1)(2s-1)(a_4^\dagger x_2a_4-x_2a_4a_4)\right\}+\text{э.с.}=0,\\
&(2s+1)(s-1)a_2^\dagger x_1a_2+s(s-1)x_2a_3a_2+(s^2-1)a_2^\dagger a_3^\dagger x_2+\\
&\qquad+(s+1)(2s-1)(a_4^\dagger a_4^\dagger x_2-a_4^\dagger x_2a_4)=0,\\
&(a_2^\dagger x_1a_2-x_2a_3a_2)+\text{э.с.}=2(2s-1)y_2,\\
&2a_2^\dagger x_1a_2-a_2^\dagger a_1^\dagger x_1-x_2a_3a_1+2a_4^\dagger x_2a_3-a_4^\dagger a_2^\dagger x_1-x_2a_4a_3=0,\\
&2a_2^\dagger x_1a_1-a_2^\dagger a_1^\dagger x_1-x_2a_3a_1-(s-1)(a_4^\dagger x_2a_3-x_2a_4a_3)+\\
&\qquad+(s+1)(a_2^\dagger a_1^\dagger x_1-a_2^\dagger x_1a_1)=0,
\end{aligned}\tag{159}$$

где введены обозначения

$$A+\text{э.с.}=A+A^\dagger,\qquad a_k=a_k^{nm},\qquad k=1,2,3,4.$$

При заданных a_1, a_2, a_3 и a_4 формулы (155), (159) определяют систему линейных однородных уравнений для матричных элементов $(x_\alpha)_{ij}$ и $(y_\alpha)_{ij}$. Решая эту систему для матриц $a_k=a_k^{nm}$, заданных формулами (145), приходим к результатам, сформулированным в теореме 6.

Мы получили четыре неэквивалентных класса галилеевски-инвариантных уравнений вида (114), где матрицы β_k задаются формулами (150)–(153). Если матрицы β_kимеют вид (150), то функция $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ имеет $6s+1$ компонент, а уравнение (114) описывает движение свободной нерелятивистской частицы с произвольным спином s. Такие уравнения эквивалентны уравнениям Хагена–Герлея [6, 7], а в случае $s=1/2$ совпадают с уравнениями Леви-Леблонда [5].

Уравнения (114), (151) имеют $6s-1$ компонент и описывают галилеевскую частицу со спином $s'=s-1$. Ниже показано, что эти уравнения приводят к константе дипольного взаимодействия, отличной от предсказываемой уравнениями Герлея.

Уравнения (114) представляют наибольший интерес в том случае, когда матрицы β_k имеют вид (152) и (153). Эти уравнения также можно интерпретировать как уравнения движения нерелятивистской частицы с произвольным спином. Как будет показано ниже, именно эти уравнения (в отличие от уравнений ЛХГ) позволяют описать галилеевски-инвариантным образом спин-орбитальное взаимодействие заряженной частицы с внешним электромагнитным полем (в рамках принципа минимального взаимодействия).

Приведем решения соотношений (124)–(129) для случая, когда представление алгебры (37) соответствует $N = 4$, где N — индекс нильпотентности инвариантного оператора D_1 (139). Такая задача имеет нетривиальные решения только для $n = 2$, $m = 4$, $s = 1/2$. При этом матрицы β_k задаются формулами (154), где отличные от нуля матричные элементы матриц x_1 и x_2 имеют вид:

$$\begin{aligned}
&(x_1)_{13} = (x_1)_{14} = (x_1)_{22} = (x_1)_{23} = \frac{1}{s+1}(x_1)_{24} = \\
&\quad = (x_1)_{31} = (x_1)_{32} = s(x_1)_{33} = (x_1)_{41} = \frac{1}{s+1}(x_1)_{42} = \\
&\quad = (x_2)_{11} = (x_2)_{12} = (x_2)_{21} = \frac{s}{(s+1)^2}(x_2)_{22} = 1.
\end{aligned} \tag{160}$$

Используя формулы (154), (160) и соотношения (143), (145), (124)–(128), нетрудно найти явный вид соответствующих матриц β_0 и β_a.

Приведем некоторые из уравнений (114), (150)–(153) для $s = 0,\ 1/2,\ 1$ в покомпонентной записи:

$$s = 0, \qquad \begin{cases} p_0\psi_0 + i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\psi} = 0, \\ 2m\boldsymbol{\psi} - i\boldsymbol{p}\cdot\psi_0 = 0, \end{cases} \tag{161}$$

$$s = \frac{1}{2}, \qquad \begin{cases} p_0\boldsymbol{\varphi} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\boldsymbol{\chi} = 0, \\ 2m\boldsymbol{\chi} - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\boldsymbol{\varphi} = 0, \end{cases} \qquad \boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}, \tag{162}$$

$$s = 1, \qquad \begin{cases} p_0\boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\Phi} + a^2m\boldsymbol{\chi} + 2am\boldsymbol{\varphi} = 0, \\ p_0\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{p}\Phi_0 + a^2m\boldsymbol{\varphi} + 2am(\boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{\Phi}) = 0, \\ \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\chi} + 2am\Phi_0 = 0, \\ -\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\chi} + 2am(\boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{\varphi}) = 0, \end{cases} \tag{163}$$

где σ_a — матрицы Паули; ψ_μ, χ_α, φ_α, χ_a, φ_a, Φ_μ ($\mu = 0,1,2,3$, $\alpha = 1,2$, $a = 1,2,3$) — однокомпонентные волновые функции.

К уравнениям (163)–(165) сводятся (при заданных значениях спина s) системы (114) с матрицами (151), (150) и (152) соответственно. Уравнения (114), (152) при $s = 1$ (или, что то же, систему уравнений (163)) можно записать также в виде

$$\left\{\frac{1}{2}\left(\hat\beta_0 + \hat\beta_4\right)p_0 + \left[\hat\beta_0 - \hat\beta_4 + 2aI + \frac{a^2}{2}\left(\beta_0 + \hat\beta_4\right)\right]m - \hat\beta_a p_a\right\}\Psi = 0,$$

где $\hat\beta_l$ ($l = 0,1,2,3,4$) — матрицы Кеммера–Дэффина.

Уравнения (114) для представлений с произвольным индексом нильпотентности. Выше получены все возможные (с точностью до эквивалентности) решения уравнений (124)–(129) для представлений алгебры (37), перечисленных в теореме 5. Однако в этой теореме описан только некоторый класс представлений алгебры (37), соответствующий $N \leq 4$, где N — индекс нильпотентности инвариантного оператора D_1 (139).

Ниже получен класс уравнений, соответствующий произвольным значениям N. Уравнения выведены с учетом того, что расширенная группа Галилея G является подгруппой обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ (группы вращений и сдвигов в пятимерном пространстве Минковского), и, следовательно, каждое уравнение) инвариантное относительно группы $P(1,4)$, автоматически оказывается инвариантным также относительно группы G.

Рассмотрим систему уравнений в частных производных следующего вида:

$$\left(\tilde{\beta}_\mu p^\mu + \varkappa\right)\Psi(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \tag{164}$$

где $p_\mu = -i\frac{\partial}{\partial x_\mu}$, $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$, $\tilde{\beta}_\mu$ — некоторые числовые матрицы; $\varkappa$ — произвольный параметр.

Потребуем, чтобы матрицы $\tilde{\beta}_\mu$ удовлетворяли соотношениям

$$\left[\tilde{\beta}_\mu, S_{\nu\lambda}\right] = i\left(g_{\mu\lambda}\tilde{\beta}_\nu - g_{\mu\nu}\tilde{\beta}_\lambda\right), \tag{165}$$

где $S_{\mu\nu}$ — генераторы группы $O(1,4)$; $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор: $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1, -1)$. Если выполняется (165), то уравнение (167) инвариантно относительно группы $P(1,4)$ [31].

Как указывалось выше, в этом случае уравнение (167) инвариантно также относительно группы Галилея. Действительно, делая в (164) замену переменных

$$x_0 = \frac{1}{2}\left(2\hat{x}_0 + \hat{x}_4\right), \qquad x_4 = \frac{1}{2}\left(2\hat{x}_0 - \hat{x}_4\right), \tag{166}$$

так что

$$\frac{\partial}{\partial x_0} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \hat{x}_0} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_4}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_4} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \hat{x}_0} - \frac{\partial}{\partial \hat{x}_4}, \tag{167}$$

получаем следующее уравнение:

$$\left(\beta_0\hat{p}_0 - \beta_4\hat{p}_4 - \hat{\beta}_a p_a + \varkappa\right)\Psi\left(\hat{x}_0, \hat{x}_4, \boldsymbol{x}\right) = 0, \tag{168}$$

где

$$\hat{p}_0 = i\frac{\partial}{\partial \hat{x}_0}, \qquad \hat{p}_4 = -i\frac{\partial}{\partial \hat{x}_4}, \qquad \beta_0 = \frac{1}{2}\left(\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_4\right), \qquad \beta_4 = \tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_4. \tag{169}$$

Галилеевскую инвариантность уравнения (168) нетрудно проверить непосредственно, воспользовавшись следующей реализацией генераторов расширенной группы Галилея:

$$\begin{aligned} &P_0 = -i\frac{\partial}{\partial \hat{x}_0}, \qquad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad M = \hat{p}_4 = -i\frac{\partial}{\partial \hat{x}_4}, \\ &J_a = (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p})_a + S_a, \qquad G_a = \hat{x}_0 p_a - x_a M + \eta_a, \end{aligned} \tag{170}$$

где

$$S_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}S_{bc}, \qquad \eta_a = \frac{1}{2}(S_{0a} + S_{4a}).$$

Оператор $L = \beta_0\hat{p}_0 - \beta_4\hat{p}_4 - \tilde{\beta}_a p_a$ и генераторы (170) удовлетворяют условию (2).

Накладывая на решения уравнения (168) галилеевски-инвариантное дополнительное условие

$$\hat{p}_4\Psi\left(\hat{x}_0, \hat{x}_4, \boldsymbol{x}\right) = -\lambda\varkappa\Psi\left(\hat{x}_0, \hat{x}_4, \boldsymbol{x}\right),$$

получаем из (168) галилеевски-инвариантное уравнение в форме (114), где

$$\beta_a = \tilde{\beta}_a, \qquad \beta_5 = \beta_4 + \lambda I, \qquad m = \varkappa/\lambda, \tag{171}$$

I — единичная матрица.

Таким образом, каждому решению системы перестановочных соотношений (165) можно поставить в соответствие галилеевски инвариантное уравнение (114), где матрицы β_μ и β_5 задаются формулами (169), (171).

Полное решение соотношений (165), в отличие от аналогичных соотношений для матриц, определяющих пуанкаре-инвариантные уравнения [28], до сих пор не получено. Воспользуемся частным решением уравнений (165), предложенным в работе [31]. Обозначим $\hat{S}_{kl}$ — генераторы неприводимого конечномерного представления группы $O(1,5)$. Тогда матрицы

$$S_{\mu\nu} = \hat{S}_{\mu\nu}, \qquad \tilde{\beta}_\mu = \tilde{S}_{5\mu}, \qquad \mu = 0,1,2,3,4, \tag{172}$$

удовлетворяют соотношениям (165). Подставив (175) в (169) и (171) получим матрицы β_k в форме

$$\beta_a = \hat{S}_{5a}, \qquad \beta_0 = \left(\hat{S}_{40} + \hat{S}_{50}\right)/2, \qquad \beta_5 = S_{40} - S_{50} + \lambda I. \tag{173}$$

Следовательно, каждому неприводимому представлению группы $O(1,5)$ можно сопоставить галилеевски-инвариантное уравнение (114), (173). Генераторы группы Галилея на множестве решений уравнения (114), (173) имеют локально-ковариантную форму (36), где

$$M = m = \varkappa/\lambda, \qquad \eta_a = \left(\hat{S}_{4a} + \hat{S}_{0a}\right)/2, \qquad S_a = \varepsilon_{abc}\hat{S}_{bc}/2. \tag{174}$$

Конечномерные представления группы $O(1,5)$, которая локально-изоморфна группе $O(6)$, задаются тремя числами (n_1, n_2 и n_3), одновременно целыми или полуцелыми [28]. Если матрицы $\hat{S}_{kl}$ из (173) образуют представление $D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ алгебры Ли группы $O(1,5)$, то уравнения (114), (173) эквивалентны уравнению Леви-Леблонда [5] для нерелятивистской частицы со спином $s = 1/2$. Представление $D(1,1,0)$ приводит к уравнениям (114), (152) для частиц со спином $s = 1$. При этом матрицы (172) совпадают с матрицами Кеммера–Дэффина. В общем случае уравнения (114), (173) описывают мультиплет нерелятивистских частиц со спинами $s_1, s_2, \ldots$, где числа s_i характеризуют представления группы $O(3)$, входящие в неприводимое представление $D(n_1, n_2, n_3)$ группы $O(1,5)$.

Можно показать, что матрицы (174) удовлетворяют условиям

$$(\eta_a S_a)^{2s+1} = 0, \qquad (\eta_a S_a)^{2s} \neq 0, \tag{175}$$

где s — максимальное значение спина частиц, описываемых уравнениями (114), (173). Таким образом, найденные здесь уравнения соответствуют представлениям алгебры (37) с произвольным значением индекса нильпотентности инвариантного оператора D_1 (139).

4. Нерелятивистская частица с произвольным спином во внешнем электромагнитном поле

Уравнения движения свободных нерелятивистских частиц могут представлять реальный интерес для физики только в том случае, если они являются первым шагом на пути описания частиц, участвующих в различного рода взаимодействиях. Одним из них является взаимодействие заряженной частицы, обладающей спином, с внешним электромагнитным полем.

Ниже показано, что найденные уравнения в рамках принципа минимального взаимодействия описывают дипольное, спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействия заряженной нерелятивистской частицы с внешним полем, т.е. учитывают все физические эффекты, предсказываемые в порядке $1/m^2$ релятивистским уравнением Дирака. Точно решена задача о движении заряженной частицы с произвольным спином в постоянном магнитном поле.

Уравнения второго порядка для частицы со спином, взаимодействующей с внешним электромагнитным полем. Выше получены уравнения Шредингера (64), (73), (74) и (64), (97), описывающие движение свободных нерелятивистских частиц с произвольным спином. Для того чтобы перейти к описанию движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле, сделаем в этих уравнениях обычную замену

$$p_\mu \to \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu, \tag{176}$$

где A_μ — 4-вектор-потенциал электромагнитного поля. В результате приходим к уравнениям

$$L(\pi)\Psi(t,\boldsymbol{x}) = 0, \qquad L(\pi) = i\frac{\partial}{\partial t} - H_s^\alpha(\boldsymbol{\pi}, A_0), \tag{177}$$

где $H_s^\alpha(\boldsymbol{\pi}, A_0)$ — один из гамильтонианов, полученных из (73), (74) или (97) с помощью замены (176):

$$\begin{gathered}H_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi}, A_0) = \sigma_1 am + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + eA_0 + 2iak\sigma_3\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi} - \\ -(\sigma_1 + i\sigma_2)\frac{2ak^2}{m}\left[(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - \frac{e}{2}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}\right],\end{gathered} \tag{178}$$

$$\begin{gathered}\tilde{H}_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi}, A_0) = \sigma_3\tilde{a}m + \frac{a}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2)m - 2\tilde{a}k(i\sigma_1 - \sigma_2)\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi} - \\ -(\sigma_1 + i\sigma_2)\frac{2ak^2}{m}\left[(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - \frac{e}{2}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}\right] + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + eA_0,\end{gathered} \tag{179}$$

$$\begin{gathered}H_s^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\pi}, A_0) = \sigma_1\left\{m + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - \frac{\sin^2\theta_s}{ms^2}\left[(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - \frac{e}{2}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}\right]\right\} - \\ -\sigma_3\left\{a_s\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{b_s}{2ms^2}\left[(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - \frac{e}{2}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}\right]\right\} + \sigma_2\frac{\sqrt{2}\sin\theta_s}{s}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}.\end{gathered} \tag{180}$$

В формулах (178)–(180) символом $\boldsymbol{H}$ обозначен вектор напряженности магнитного поля: $\boldsymbol{H} = -i\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\pi}$.

Уравнения (177)–(180), очевидно, инвариантны относительны калибровочных преобразований:

$$\Psi(t, \boldsymbol{x}) \to \Psi(t, \boldsymbol{x}) \exp[ie\varphi(t, \boldsymbol{x})], \qquad A_\mu \to A_\mu + \frac{\partial \varphi(t, \boldsymbol{x})}{\partial x_\mu}. \tag{181}$$

Покажем, что уравнения (177), (178) и (177), (179) инвариантны относительно преобразований из группы Галилея (14), (38) если вектор-потенциал A_μ преобразуется по галилеевскому закону [5]

$$A_0 \to A_0'' = A_0 + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}, \qquad A_a \to A_a'' = R_{ab} A_b, \tag{182}$$

где R_{ab} — оператор трехмерного поворота (17). Инвариантность уравнения

$$L(\pi)\Psi(t, \boldsymbol{x}) = 0, \tag{183}$$

где $L(\pi)$ — некоторый линейный оператор, функционально зависящий от π_μ (176); относительно галилеевских преобразований (14), (38), (182) означает, что преобразованная функция $\Psi''(t'', \boldsymbol{x}'')$ (38) удовлетворяет такому же уравнению, как и исходная функция

$$L(\pi'')\Psi(t'', \boldsymbol{x}'') = 0, \tag{184}$$

где $L(\pi'')$ — оператор, получаемый из $L(\pi)$ заменой $\pi_\mu \to \pi_\mu'' = -i\frac{\partial}{\partial x_\mu''} - eA_\mu''$, а x_a'', t'' и A_μ'' задаются формулами (14), (182).

Условие галилеевской инвариантности уравнения (185) можно сформулировать в виде следующего требования, налагаемого на оператор $L(\pi)$ [ср. (91)].

Определение 3. *Уравнение (183) инвариантно относительно преобразований из группы Галилея (14), (38), если оператор $L(\pi)$ удовлетворяет условиям*

$$\exp[if(t, \boldsymbol{x})\tilde{D}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}) L(\pi) D^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}) \exp[-if(t, \boldsymbol{x})] = L(\pi''), \tag{185}$$

где $f(t, \boldsymbol{x})$ — фазовый множитель (18);

$$\begin{aligned} &\tilde{D}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}) = \exp\left(-i\tilde{\boldsymbol{S}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\theta}}\right) \exp(-i\tilde{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{v}), \\ &D(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}) = \exp\left(-i\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{\theta}\right) \exp(-i\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{v}), \end{aligned} \tag{186}$$

а S_a, η_a и $\tilde{S}_a$, $\tilde{\eta}_a$ — матрицы, реализующие представления (в общем случае неэквивалентные) алгебры Ли однородной группы Галилея (37).

Если выполняется (185), то (184) непосредственно следует из (14), (38), (182) и (183).

Используя соотношения

$$\begin{aligned} &\pi_0'' = \pi_0 + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\pi}, \qquad \pi_a'' = R_{ab}\pi_b, \\ &\exp[if(t, \boldsymbol{x})]\pi_a \exp[-if(t, \boldsymbol{x})] = \pi_a + mv_a \end{aligned} \tag{187}$$

и формулу (90), прямой проверкой убеждаемся, что операторы (177) удовлетворяют условию (185), (186), где $\tilde{D}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}) = D(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v})$, а $D(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v})$ заданы в (39), (66) и, следовательно, уравнения (177), (178) и (177), (179) галилеевски-инвариантны.

Анализ уравнений (177) удобно проводить в представлении, в котором операторы (180)–(182) квазидиагональны, т.е. коммутируют с матрицей σ_1 или σ_3 (67). Как и в случае уравнения Дирака, гамильтонианы (178)–(180) могут быть диагонализованы только приближенно. Ниже покажем, что с точностью до членов порядка $1/m^2$ операторы (178), (179) при $a = 0$, и (180) можно привести к следующей форме:

$$\begin{aligned}\left[H_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi}, A_0)\right]' &= \sigma_1 am + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + eA_0 - eB\sigma_1\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}}{m} + \\ &+ \frac{eD^2}{2m^2}\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\pi}) + \frac{1}{3}Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b} + \frac{1}{3}s(s+1)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}\right] + \\ &+ \frac{eBD}{m^2}\left[\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi}) - \frac{2}{3}Q_{ab}\frac{\partial H_a}{\partial x_b}\right] + o\left(\frac{1}{m^3}\right),\end{aligned} \tag{188}$$

$$\left[\tilde{H}_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi}, A_0)\right]' = \sigma_3\tilde{a}m + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + eA_0 + o\left(\frac{1}{m^3}\right), \tag{189}$$

$$\begin{aligned}\left[H_s^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\pi}, A_0)\right]' &= \sigma_1\left(m + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + eA_0 + \frac{e\sin^2\theta_s}{2ms^2}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}\right) + \\ &+ \frac{e\sin^2\theta_s}{4m^2s^2}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\pi}) - \frac{1}{3}Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b} - s(s+1)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}\right] + \\ &+ \frac{e\sqrt{2}\sin\theta_s}{4m^2s}\left(\frac{b_s}{4s^2} - a_s\right)\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi}) + \\ &+ \frac{e\sqrt{2}b_s\sin\theta_s}{24m^2s^3}Q_{ab}\frac{\partial H_a}{\partial x_b} + o\left(\frac{1}{m^3}\right),\end{aligned} \tag{190}$$

где $\boldsymbol{E} = i[\bar{\boldsymbol{\pi}}, \boldsymbol{\pi}_0]$ — вектор напряженности электрического поля; Q_{ab} — тензор квадрупольного взаимодействия:

$$Q_{ab} = \frac{1}{3}\left\{3[S_a, S_b]_+ - 2\delta_{ab}s(s+1)\right\}; \tag{191}$$

B и D — произвольные коэффициенты, следующим образом выражаемые параметрами a и k:

$$B = ak^2, \qquad D = k. \tag{192}$$

Если же в (179) $a \neq 0$, то приближенный гамильтониан $\left[\tilde{H}_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi}, A_0)\right]'$ имеет структуру, аналогичную (188).

Гамильтонианы (188) и (190) содержат слагаемые, соответствующие взаимодействию точечной заряженной частицы с внешним электромагнитным полем $\left(\sim \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + eA_0\right)$, а также дипольному ($\sim \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}$), спин-орбитальному ($\sim \boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\pi})$), дарвиновскому ($\sim \mathrm{div}\,\boldsymbol{E}$) и квадрупольному ($\sim Q_{ab}\partial E_a/\partial x_b$) взаимодействиям. Два последние слагаемые (которые P-неинвариантны и могут быть сделаны как угодно малыми в пределе $D \to 0$, $\theta_s \to 0$) можно интерпретировать как магнитное спин-орбитальное и магнитное квадрупольное взаимодействия.

Аналогичную структуру имеют приближенные гамильтонианы, получаемые при диагонализации релятивистских уравнений для частиц произвольного спина [16, 17].

Подчеркнем, что в отличие от уравнения Дирака галилеевски инвариантные уравнения (177), (178) и (177), (180) (и гамильтонианы (188), (190)) определены с точностью до произвольных параметров a, k и θ_s, которые могут быть выбраны, скажем, из условия соответствия величины констант дипольного и спин-орбитального взаимодействий экспериментальным данным. Если

$$\theta_s = \pi/4, \qquad a = 1, \qquad k = 2, \qquad s = 1/2, \tag{193}$$

то шесть первых слагаемых в (188) и (190) совпадают с гамильтонианом, получаемым при диагонализации уравнения Дирака [32]. При этом, однако, операторы (188) и (190) содержат дополнительные члены (зависящие от напряженности магнитного поля), которые можно получить из обобщенного уравнения Дирака, учитывающего аномальное взаимодействие частицы с полем.

Отметим, что уравнения (177), (178) и (177), (179) можно получить в рамках лагранжева формализма — если параметры a, $\tilde{a}$ и k удовлетворяют условиям (92). Действительно, делая в лагранжианах (95), (96) минимальную замену $\partial/\partial x_\mu \rightarrow \partial/\partial x_\mu + ieA_\mu$, получаем операторы [14]

$$\begin{aligned} &L(t,\boldsymbol{x}) = L_0(t,\boldsymbol{x}) + L^{\text{вз}}(t,\boldsymbol{x}),\\ &\tilde{L}(t,\boldsymbol{x}) = \tilde{L}_0(t,\boldsymbol{x}) + \tilde{L}^{\text{вз}}(t,\boldsymbol{x}), \end{aligned} \tag{194}$$

где $L_0(t,\boldsymbol{x})$ и $\tilde{L}_0(t,\boldsymbol{x})$ заданы формулами (95), (96), а $L^{\text{вз}}(t,\boldsymbol{x})$ и $\tilde{L}^{\text{вз}}(t,\boldsymbol{x})$ равны соответственно:

$$\begin{aligned} L^{\text{вз}}(t,\boldsymbol{x}) = e\Bigg\{ &\bar{\Psi}A_0\Psi + 2ik\bar{\Psi}\sigma_3 S'_a A_a\Psi + \\ &+\frac{1}{2m}\left[i\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_a}C_{ab}A_b\Psi - i\bar{\Psi}A_aC_{ab}\frac{\partial\Psi}{\partial x_b} - e\bar{\Psi}C_{ab}A_aA_b\Psi\right]\Bigg\}, \end{aligned} \tag{195}$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}^{\text{вз}}(t,\boldsymbol{x}) = e\Bigg\{ &\bar{\Psi}A_0\Psi - 2\tilde{a}k\bar{\Psi}(\sigma_1 + i\sigma_2)S_aA_a\Psi + \\ &+\frac{i}{2m}\left(\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_a}A_a\Psi - \bar{\Psi}A_a\frac{\partial\Psi}{\partial x_a}\right) - \frac{e}{2m}A_bA_b\bar{\Psi}\Psi\Bigg\}. \end{aligned} \tag{196}$$

Нетрудно убедиться, что уравнения Лагранжа–Эйлера для функций (194)–(196) приводят к (177), (178) и (177), (179).

Приведем явный вид операторов, преобразующих гамильтонианы (178), (179) при $a = 0$ и (180) к форме (188), (189) и (190) соответственно:

$$V^{\text{I}} = \exp\left(iC_s^{\text{I}}\right)\exp\left(iB_s^{\text{I}}\right)\exp\left(iA_s^{\text{I}}\right), \tag{197}$$

$$\tilde{V}^{\text{I}} = \exp\left(i\tilde{C}_s^{\text{I}}\right)\exp\left(i\tilde{B}_s^{\text{I}}\right)\exp\left(i\tilde{A}_s^{\text{I}}\right), \tag{198}$$

$$V^{\text{II}} = \exp\left(iC_s^{\text{II}}\right)\exp\left(iB_s^{\text{II}}\right)\exp\left(iA_s^{\text{II}}\right), \tag{199}$$

где

$$A_s^{\mathrm{I}} = -i\sigma_2 k\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}, \qquad A_s^{\mathrm{II}} = \sigma_3\frac{\sqrt{2}\sin\theta_s}{2ms}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi},$$

$$B_s^{\mathrm{I}} = \sigma_3\frac{k}{2m^2}\left\{\frac{1}{2a}[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\pi}^2]_+ + ik[2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 + e\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}] + \frac{1}{a}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}\right\},$$

$$C_s^{\mathrm{I}} = \sigma_2\frac{k^2}{m^3}\left\{-\frac{2ik}{3}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^3 + ik[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}, e\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}]_+ + [(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2, eA_0]\right\} + \frac{i}{2m}\sigma_1\frac{\partial B_s^{\mathrm{I}}}{\partial t},$$

$$B_s^{\mathrm{II}} = \sigma_2\frac{1}{4m^2}\left\{a_s\boldsymbol{\pi}^2 + \frac{b_s}{2s^2}[2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - e\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}] + \frac{e\sqrt{2}\sin\theta_s}{s}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}\right\},$$

$$C_s^{\mathrm{II}} = \sigma_1\frac{1}{8m^3}\left\{\frac{\sqrt{2}\sin\theta_s}{s}\left[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\pi}^2 + \left(\frac{e\sin\theta_s}{s}\right)^2 e\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}\right]_+ + iea_s[\boldsymbol{\pi}^2, A_0] -\right.$$

$$\left. -\frac{4\sqrt{2}\sin^3\theta_s}{s^3}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^3 - \frac{ieb_s}{s^2}[(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2, A_0]\right\} + \frac{i}{2m}\sigma_1\frac{\partial B_s^{\mathrm{II}}}{\partial t},$$

$$\tilde{A}_s^{\mathrm{I}} = \frac{ik}{m}(\sigma_2 - i\sigma_1)\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}, \qquad \tilde{B}_s^{\mathrm{I}} = \frac{k}{2\tilde{a}m^2}(\sigma_2 - i\sigma_1)\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E},$$

$$\tilde{C}_s^{\mathrm{I}} = \frac{ik}{4m^3}(\sigma_2 - i\sigma_1)[\boldsymbol{\pi}^2, \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}] + \frac{i}{2m}\sigma_3\frac{\partial\tilde{B}^{\mathrm{I}}}{\partial t}.$$

Гамильтонианы (178)–(180) и (188)–(190) связаны соотношениями

$$H' = VHV^{-1} + i\frac{\partial V}{\partial t}V^{-1},$$

где H — один из гамильтонианов (178), (179) или (180), а V — один из операторов (197), (198) или (199) соответственно.

Введение минимального взаимодействия в уравнения первого порядка. Осуществив замену (176) в формуле (114), приходим к системам уравнений вида

$$L(\pi)\Psi(t,\boldsymbol{x}) = 0, \qquad L(\pi) = \beta_\mu\pi^\mu + \beta_5 m, \tag{200}$$

которые также можно интерпретировать как уравнения движения частицы, обладающей спином, во внешнем электромагнитном поле.

Обсудим вкратце свойства уравнений (200), которые можно получить без использования явного вида β-матриц. Нетрудно убедиться, что эти уравнения инвариантны относительно калибровочных преобразований (181). Из соотношений (124)–(128) непосредственным вычислением получаем, что оператор $L(\pi)$ (200) удовлетворяет условиям галилеевской инвариантности (185) (где $\tilde{D}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v}) = [D^{-1}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v})]^\dagger$). Наконец, уравнения (200) можно получить с использованием вариационного принципа, исходя из следующего лагранжиана:

$$\hat{L}(t,\boldsymbol{x}) = L(t,\boldsymbol{x}) + ie\bar{\Psi}\beta_\mu A_\mu\Psi,$$

где $L(t,\boldsymbol{x})$ задается формулой (120).

Для дальнейшего анализа уравнений (200) и физической интерпретации их решений подвергнем функцию $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ и оператор $L(\pi)$ преобразованиям

$$\Psi \to \Psi' = V\Psi, \qquad L(\pi) \to L'(\pi) = V^\dagger L(\pi)V, \tag{201}$$

где

$$V = \exp\left(i\frac{\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}\right). \tag{202}$$

В результате приходим к эквивалентному уравнению

$$L'(\pi)\Psi'(t,\boldsymbol{x}) = 0. \tag{203}$$

Найдем явный вид оператора $L'(\pi)$. Используя формулу (134) и коммутационные соотношения (124)–(128), получаем:

$$V^\dagger\beta_0\pi_0 V = \beta_0\left(\pi_0 + \frac{e}{m}\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{e}{2m^2}\eta_a\eta_b\frac{\partial E_a}{\partial x_b}\right),$$

$$V^\dagger\beta_a\pi_a V = \beta_a\pi_a + \beta_0\left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{3e}{4m^2}\boldsymbol{\eta}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi})\right] + \frac{e}{m}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{H},$$

$$V^\dagger\beta_5 m V = \beta_5 m + \beta_a\pi_a + $$
$$+\frac{1}{2}\beta_0\left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{m} - \frac{e}{2m^2}\boldsymbol{\eta}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi})\right] + \frac{2}{2m}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{H},$$

откуда следует непосредственно, что

$$\begin{aligned} L'(\pi) = {}& \beta_0\left(\pi_0 - \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m}\right) + \beta_5 m + \frac{e}{m}\left(\beta_0\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{H}\right) + \\ & + \frac{e}{m^2}\beta_0\left[\eta_a\eta_b\frac{\partial E_a}{\partial x_b} + \boldsymbol{\eta}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi})\right]. \end{aligned} \tag{204}$$

Уравнения (203), (204) нельзя получить из (137) заменой $p_\mu \to \pi_\mu$, но они содержат дополнительные слагаемые, зависящие от напряженности электромагнитного поля. Ниже показано, что эти слагаемые описывают взаимодействия, обусловленные наличием у частицы спина.

Уравнения (203), (204) могут описывать различные физические эффекты — в зависимости от того, какое представление алгебры (37) реализуют матрицы η_a. Несложный анализ показывает, что если эти матрицы образуют представления, соответствующие $N \le 2$, где N — индекс нильпотентности инвариантного оператора D_1 (139), то оператор (204) не включает слагаемых, зависящих от напряженности электрического поля. Действительно, в этом случае выполняется $\eta_a\eta_b = 0$, откуда (и из соотношений (128)) следует, что

$$\beta_0\eta_a \equiv 0. \tag{205}$$

Подставив (205) в (204), получим оператор $L'(\pi)$ в форме

$$L'(\pi) = \beta_0\left(\pi_0 - \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m}\right) + \beta_5 m + \frac{e}{2m}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{H}. \tag{206}$$

Если $\boldsymbol{H} \equiv 0$, а напряженность электрического поля $\boldsymbol{E} \ne 0$, то оператор (206) коммутирует с матрицами спина S_a и, следовательно, уравнение (203) не описывает взаимодействия спина частицы с электрическим полем. Этот результат можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Лемма 4. *Необходимым условием того, чтобы уравнение (200), где β_k — матрицы, удовлетворяющие уравнениям (124)–(129), (37), описывало взаимодействие спина частицы с электрическим полем, является выполнение соотношения*

$$(S_a \eta_a)^2 \neq 0. \tag{207}$$

Матрицы (150), (151) не удовлетворяют условию (207). Следовательно, уравнения (200), (150) и (200), (151) (в число которых входят уравнения ЛХГ) не описывают взаимодействия (спин-орбитального, квадрупольного и т.д.) спина частицы с внешним электрическим полем.

Далее увидим, что уравнения (200) с матрицами (152), (153) (для которых соотношения (207) выполняются) описывают перечисленные выше взаимодействия.

Рассмотрим теперь подробно уравнения (203), (204) для случаев, когда матрицы β_k задаются одной из формул (150)–(153). Обозначив

$$\Psi'(t, \boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \Phi_1(t, \boldsymbol{x}) \\ \Phi_2(t, \boldsymbol{x}) \\ \chi(t, \boldsymbol{x}) \end{pmatrix},$$

где Φ_1, Φ_2 — $(2s+1)$-компонентные, а χ — $(2s-1)$-компонентная функция, и подставив в (203) и (204) явный вид матриц β_k и η_a из (150), приходим к уравнениям

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi_1(t, \boldsymbol{x}) = \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + eA_0 - \frac{eg}{2m}\hat{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{H}\right]\Phi_1, \qquad g = \frac{1}{s}. \tag{208}$$

Таким образом, уравнения (150), (200) (уравнения ЛХГ) сводятся к уравнению Паули (208) для $(2s+1)$-компонентной функции $\Phi_1(t, \boldsymbol{x})$.

Далее, обозначив

$$\Psi'(t, \boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \Phi(t, \boldsymbol{x}) \\ X_1(t, \boldsymbol{x}) \\ X_2(t, \boldsymbol{x}) \end{pmatrix}, \tag{209}$$

и подставив (209), (151) в (203), (206), получим:

$$i\frac{\partial}{\partial t}X_1 = HX_1, \qquad X_2 = \Phi = 0, \qquad H = \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{H}}{2sm} + eA_0,$$

или в обозначениях $s' = s - 1$, $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{S}'$

$$H = \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - g'\frac{e}{2m}\boldsymbol{S}' \cdot \boldsymbol{H} + eA_0, \qquad g' = \frac{1}{s'+1}. \tag{210}$$

Следовательно, уравнения (151), (200) также сводятся к уравнению Паули для частицы с произвольным спином, но предсказывают другое свойство (по сравнению с уравнениями ЛХГ) дипольного момента частицы (так как при $s = s'$ факторы g и g' не равны друг другу).

Рассмотрим теперь случай, когда матрицы β_k задаются формулами (152). Обозначим

$$\Psi'(t, \boldsymbol{x}) \quad \text{— столбец } (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \chi_1, \chi_2), \tag{211}$$

и подставим (152), (211) в (203), (204). После несложных вычислений приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{gathered}L\Phi_1 \equiv \left\{\pi_0 - \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e}{4sm}\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{H} + \frac{e}{4sam}\left[\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{1}{2m}\hat{\boldsymbol{S}}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi})\right] + \right.\\ \left. + \frac{e^2}{16am^2s(2s-1)}\left[s^2\boldsymbol{H}^2 - (\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{H})^2\right]\right\}\Phi_1 = 0,\end{gathered} \tag{212}$$

$$\begin{gathered}\Phi_2 = -a\Phi_1, \qquad \Phi_3 = -\frac{1}{2m}\left[\pi_0 - \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - a^2m + \frac{e\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{H}}{4sm}\right]\Phi_1,\\ \chi_1 = -\frac{(s+1)e\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{H}}{8am^2s\sqrt{2s-1}}\Phi_1, \qquad \chi_2 = 0.\end{gathered} \tag{213}$$

Итак, уравнения (203), (204) с матрицами (152) сводятся к уравнению (212) для $(2s+1)$-компонентной функции $\Phi_1(t,\boldsymbol{x})$ (остальные компоненты $\Psi'(t,\boldsymbol{x})$ выражаются через Φ_1 по формулам (213)). Для выяснения физического смысла решений уравнения (212) подвергнем функцию Φ_1 и оператор L преобразованию, которое позволяет устранить слагаемое $\dfrac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}}{4sam}$, соответствующее нефизическому электрическому дипольному взаимодействию:

$$\Phi_1 \to \Phi_1' = \exp\left(i\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{4sam}\right)\Phi_1,$$

$$L \to L' = \exp\left(i\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{4sam}\right)L\exp\left(-i\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{4sam}\right).$$

Используя формулу Кэмпбелла–Хаусдорфа (134) и принимая во внимание тождества

$$i[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}] = \frac{1}{2}[S_a, S_b]_+\frac{\partial H_a}{\partial x_b} + \frac{1}{2}i[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}^2],$$

$$i[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}^2] = e\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi}),$$

$$i[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}] = -\frac{1}{2}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\pi}) + \frac{1}{3}Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b} + s(s+1)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E},$$

получаем:

$$\begin{gathered}L' = \pi_0 - \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e}{4sm}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H} + \frac{e}{16s^2m^2a^2}\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\pi}) + \right.\\ + \frac{1}{3}Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b} + s(s+1)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} + \frac{a}{3}Q_{ab}\frac{\partial H_a}{\partial x_b} - \\ \left. - \frac{a}{2}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi})\right] + o\left(\frac{1}{m^3}\right) + o\left(e^2\right).\end{gathered} \tag{214}$$

Оператор (214), как и приближенные гамильтонианы (178)–(180), содержит слагаемые, соответствующие дипольному, квадрупольному и спин-орбитальному взаимодействию заряженной частицы с внешним электромагнитным полем.

Совершенно аналогично можно показать, что уравнение (203), (204) с матрицами (153) сводится к уравнению

$$\pi_0\chi_1 = \left\{\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - \frac{e\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}}{4(s'+1)m} - \frac{e}{4b(s'+1)m}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\boldsymbol{S}'\cdot\boldsymbol{E} + \frac{1}{2m}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi})\right] + o\left(e^2\right)\right\}\chi_1,$$

которое в результате унитарного преобразования

$$\chi_1 \to \chi_1' = \exp\left(i\frac{\boldsymbol{S}'\cdot\boldsymbol{\pi}}{4(s'+1)mb}\right)\chi_1$$

приводится к форме $L'\chi_1 = 0$;

$$L' = \pi_0 - \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\boldsymbol{S}'\cdot\boldsymbol{H}}{4(s'+1)m} + \frac{e}{16(s'+1)^2b^2m^2}\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{S}'\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\pi}) + \right.$$
$$+\frac{1}{3}Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b} + s(s+1)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} + \frac{b}{3}Q_{ab}\frac{\partial H_a}{\partial x_b} - \tag{215}$$
$$\left.-\frac{b}{2}\boldsymbol{S}'\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi})\right] + o\left(\frac{1}{m^3}\right) + o\left(e^2\right).$$

Оператор (215) можно получить из (214) заменой $s \to s'+1$, $\boldsymbol{S}\to\boldsymbol{S}'$, $a\to b$.

В заключение отметим, что все приближенные гамильтонианы (208), (210), (214), (215), получаемые при диагонализации уравнений первого порядка (200), можно получить из оператора (188) соответствующим подбором коэффициентов B и D. Иными словами, уравнения второго порядка (179), (180) являются более универсальными, чем уравнения (200), так как включают последние как частные случаи в приближении $1/m^2$.

Следует заметить, что уравнения в форме Шредингера (177) в рамках группы Галилея представляются более естественными, чем уравнения вида (200), поскольку в нерелятивистской квантовой механике временная координата t выделена и, следовательно, не обязана входить в уравнения движения на равных правах с пространственными переменными x_a.

Аномальное взаимодействие в нерелятивистской квантовой механике. Замена $p_\mu \to \pi_\mu$ в уравнении движения не является единственно возможным способом описания взаимодействия частицы с внешним электромагнитным нолем. Более общий подход, который широко используется в релятивистской квантовой механике, состоит в том, чтобы учесть так называемое аномальное взаимодействие частицы с полем. Такое взаимодействие математически описывается добавлением в уравнения движения членов, зависящих от напряженности электромагнитного поля.

В настоящей работе ограничимся случаем дипольного аномального взаимодействия и рассмотрим уравнения вида

$$\begin{aligned} &i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi}, A_0)\Psi, \\ &\hat{H}_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi}, A_0) = H_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi}, A_0) + \frac{e}{m}(A_a^s E_a + B_a^s H_a) \end{aligned} \tag{216}$$

и

$$L\Psi \equiv \beta_\mu \pi^\mu + \beta_5 m + \frac{e}{m}(C_a H_a + D_a E_a), \qquad (217)$$

где E_a и H_a — компоненты векторов напряженности магнитного и электрического полей; $H_s^{\rm I}(\boldsymbol{\pi}, A_0)$ — оператор (178); β_μ — матрицы (150), (151); A_a^s, B_a^s, C_a и D_a — некоторые (пока неизвестные) матрицы, которые должны быть такими, чтобы уравнения (216) и (217) были инвариантны относительно группы Галилея.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 7. *Оператор* $i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_s^I(\boldsymbol{\pi}, A_0)$ *удовлетворяет условию галилеевской инвариантности (185) тогда и только тогда, когда матрицы* A_a^s *и* B_a^s *имеют вид:*

$$A_a^s = k_1 \eta_a, \qquad B_a^s = k_1 S_a + k_1' \eta_a, \qquad (218)$$

где k_1 *и* k_1' *— произвольные числа, а* η_a *и* S_a *— матрицы, задаваемые формулами (66).*

Доказательство. Подробное доказательство теоремы 7 имеется в работе [14], поэтому приведем только его схему. Условие инвариантности (185) сводится к следующим уравнениям:

$$D(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v})(A_a^s E_a + B_a^s H_a) D^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}) = A_a^s E_a'' + B_a^s H_a'', \qquad (219)$$

где матрицы $D(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v})$ задаются формулами (39), (66) и

$$\begin{aligned} &H_a'' = -i\varepsilon_{abc}\pi_b''\pi_c'' = R_{ab}H_b, \\ &E_a'' = i[\pi_0'', \pi_a''] = R_{ab}E_b - (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H})_a. \end{aligned} \qquad (220)$$

Подставив (39), (66) в (219) и (220), приходим к следующим уравнениям для A_a^s и B_a^s:

$$\begin{aligned} &[B_a^s, S_b] = i\varepsilon_{abc}B_c^s, \qquad [A_a^s, S_b] = i\varepsilon_{abc}A_c^s, \\ &[\eta_a, A_b^s] = 0, \qquad [\eta_a, B_b^s] = i\varepsilon_{abc}A_c^s, \\ &\eta_a A_b^s \eta_c + \eta_c A_b^s \eta_a = \eta_a B_b^s \eta_c + \eta_c B_b^s \eta_a = 0. \end{aligned} \qquad (221)$$

Общее решение уравнений (221) и задается формулами (218).

Подставляя (218) в (216) и подвергая гамильтониан $H_s^{\rm I}(\boldsymbol{\pi}, A_0)$ преобразованию

$$\hat{H}_s^{\rm I}(\boldsymbol{\pi}, A_0) \to \left[\hat{H}_s^{\rm I}(\boldsymbol{\pi}, A_0)\right]' = V\hat{H}_s^{\rm I}V^{-1} + i\frac{\partial V}{\partial t}V^{-1},$$

где

$$V = \exp\left(iD\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}\right)\exp\left(\frac{1}{2m}\sigma_1\frac{\partial S}{\partial t}\right)\exp(iS)\exp\left(i\frac{\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}\right),$$

$$D = \sigma_1 k(k'-1), \qquad S = \frac{\sigma_2}{2m^2}\left\{(k_1' - \eta k^2)\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H} - \right.$$

$$\left. -k(k'-1)\left[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{1}{2m}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi})\right] + \frac{k'k_1'}{2m}[S_a, S_b]_+\frac{\partial H_a}{\partial x_b}\right\},$$

получаем [14]:

$$\hat{H}_s(\boldsymbol{\pi}, A_0) = \left[H_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi}, A_0)\right]' + \frac{kk_1'}{3m^2} Q_{ab} \frac{\partial H_a}{\partial x_b}, \tag{222}$$

где $\left[H_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi}, A_0)\right]'$ задается формулой (186) при следующих значениях D и B:

$$B = k_1 + \sigma_1(k_1' - ak^2), \qquad D = \sigma_1 k(k_1' - 1). \tag{223}$$

Сравнивая (186) и (223), убеждаемся, что введение аномального дипольного взаимодействия в уравнения второго порядка (177), (178) почти не изменяет структуры гамильтониана в приближении $1/m^2$ (по существу меняется только коэффициент при слагаемом, представляющем магнитное квадрупольное взаимодействие, так как коэффициенты (192) и (223) на множествах функций $\Psi'_\pm = \frac{1}{2}(1 \mp \sigma_1)\Psi'$ в равной мере могут рассматриваться как произвольные параметры).

Рассмотрим теперь уравнение (217). Потребовав, чтобы оператор L удовлетворял условию галилеевской инвариантности (187), где $\tilde{D}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}) = [D^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v})]^\dagger$, и приняв во внимание соотношения (220), непосредственным вычислением получаем, что общий вид матриц C_a и D_a задается формулами

$$C_a = \frac{k_2}{2}\varepsilon_{abc}\beta_0\beta_b\beta_c, \qquad D_a = \frac{k_2'}{2}\varepsilon_{abc}\beta_0\beta_b\beta_c + \frac{ik_2}{2}(1 - 2\beta_0)\beta_a, \tag{224}$$

где k_2 и k_2' — произвольные постоянные.

Подставляя (224) в (217) и используя явный вид β-матриц (150), (151), после несложных вычислений получаем уравнения для $(2s+1)$-компонентной функции $\Phi_1 = \beta_0\Psi$ и для $(2s'+1)$-компонентной функции χ_1:

$$i\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = H_s\Phi_1, \qquad i\frac{\partial \chi_1}{\partial t} = H_s'\chi_1, \tag{225}$$

где

$$H_s = \frac{\boldsymbol{\pi}}{2m} + eA_0 - \frac{e(1+k_2')}{2ms}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H} - \frac{ek_2}{2ms}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H} - \frac{ek_2}{2m^2 s}[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}] + \frac{e^2k_2^2}{4m^2}H^2, \tag{226}$$

а H_s' можно получить из (226) заменой $\boldsymbol{S} \to \boldsymbol{S}'$, $s \to s' + 1$.

Подвергая функции Φ_1, χ_1 и гамильтонианы H_s и H_s' преобразованиям

$$\begin{aligned} &\Phi_1 \to U\Phi_1, \qquad H_s \to UH_sU^{-1} + i\frac{\partial U}{\partial t}U^{-1}, \\ &\chi_1 \to U'\chi_1, \qquad H_s' \to U'H_s'(U')^{-1} + i\frac{\partial U'}{\partial t}(U')^{-1}, \end{aligned} \tag{227}$$

где

$$U = \exp\left(\frac{ik_2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{2sm}\right), \qquad U' = \exp\left(\frac{ik_2\boldsymbol{S}'\cdot\boldsymbol{\pi}}{2(s'+1)m}\right), \tag{228}$$

приходим к оператору (188), где

$$B = (1 + k_2')/2s, \qquad D = k_2/2s. \tag{229}$$

Таким образом, гамильтонианы частиц с произвольным спином, получаемые из уравнений (150), (151) и (217), в приближении $1/m^2$ совпадают с точностью до коэффициентов D и B с гамильтонианом (188), получаемым при диагонализации уравнений (177), (178). Следовательно, уравнения ЛХГ (150), (217) и уравнения (150), (217), обобщенные на случай аномального дипольного взаимодействия частицы с внешним полем, также описывают дипольное, квадрупольное и спин-орбитальные взаимодействия.

Введение аномального взаимодействия в уравнение Шредингера. Мы убедились, что различные галилеевски-инвариантные уравнения (177), (178), (200), (216), (217) в приближении $1/m^2$ приводят к одинаковым (с точностью до коэффициентов) гамильтонианам частиц с произвольным спином. Для объяснения этого факта докажем следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть $L(\pi)$ — произвольный линейный оператор, функционально зависящий от π_μ (176) и удовлетворяющий условию галилеевской инвариантности (185). Тогда оператор*

$$\hat{L}(\pi) = \exp\left(i\frac{\tilde{\boldsymbol{\eta}}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}\right) L(\pi)\exp\left(-i\frac{\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}\right) \tag{230}$$

также удовлетворяет условию (185) с $\eta_a = \tilde{\eta}_a = 0$.

Доказательство. Подействуем на $\hat{L}(\pi)$ (230) слева оператором $\exp[if(t,\boldsymbol{x})]\times \exp(-i\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\theta})$, а справа — оператором $\exp[-if(t,\boldsymbol{x})]\exp(i\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\theta})$. Используя тождества, которые несложно получить с помощью формулы Кэмпбелла–Хаусдорфа,

$$\exp[if(t,\boldsymbol{x})]\exp\left(i\frac{\tilde{\boldsymbol{\eta}}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}\right) = \exp\left(i\frac{\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}\right)\exp[if(t,\boldsymbol{x})]\exp(-i\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{v}),$$
$$\exp\left(-i\frac{\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}\right)\exp(-if(t,\boldsymbol{x})] = \exp(i\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{v})\exp\left(-i\frac{\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}\right)\exp[-if(t,\boldsymbol{x})]$$

и принимая во внимание, что оператор $L(\pi)$ по определению удовлетворяет соотношениям (185), получаем:

$$\exp[if(t,\boldsymbol{x})]\exp(-i\tilde{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{\theta})\hat{L}(\pi)\exp(i\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\theta})\exp[-if(t,\boldsymbol{x})] = \hat{L}(\pi''),$$

т.е. $\hat{L}(\pi)$ действительно удовлетворяет условию галилеевской инвариантности (185) с $\eta_a = \tilde{\eta}_a = 0$. Лемма доказана.

Из леммы следует, что произвольное галилеевски-инвариантное уравнение (183) с помощью перехода к новой волновой функции

$$\Psi(t,\boldsymbol{x}) \to \hat{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) = \exp\left(i\frac{\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}\right)\Psi(t,\boldsymbol{x}) \tag{231}$$

может быть сведено к уравнению, инвариантному относительно группы Галилея

$$\hat{L}(\pi)\hat{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) = 0, \tag{232}$$

где функция $\hat{\Psi}(t,\boldsymbol{x})$ имеет простые трансформационные свойства (34), (35) (в этом случае представление однородной группы Галилея, реализующееся на множестве решений инвариантного уравнения, сводится к представлению группы $O(3)$).

Рассмотренные выше уравнения (177), (178), (200), (218), (219) с помощью преобразований (230), (231) сводятся к (232), где оператор $\hat{L}(\pi)$ имеет следующую общую форму:

$$\begin{aligned}\hat{L}(\pi) = A^1\left(\pi_0 - \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m}\right) + A^2 m + \frac{e}{m}B_a^1 H_a + \frac{e}{m}B_a^2\left[E_a + \frac{1}{2m}(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H})_a - \right.\\ \left.-\frac{1}{2m}(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi})_a\right] + \frac{e}{m^2}\left(Q_{ab}^1\frac{\partial E_a}{\partial x_b} + Q_{ab}^2\frac{\partial H_a}{\partial x_b}\right),\end{aligned} \tag{233}$$

где A^α, B_a^α, Q_{ab}^α $(\alpha = 1, 2)$ — некоторые матрицы, следующим образом коммутирующие с генераторами группы вращений:

$$[A^\alpha, S_a] = 0, \qquad [B_a^\alpha, S_b] = i\varepsilon_{abc}B_c^\alpha, \qquad [Q_{ab}^\alpha, S_c] = i(\varepsilon_{acd}Q_{bd} - \varepsilon_{bcd}Q_{ad}). \tag{234}$$

Итак, вместо рассмотренных выше различных галилеевски-инвариантных уравнений можно исследовать уравнение вида (232), (233), которое при соответствующем выборе матриц A^α, B_a^α и Q_{ab}^α эквивалентно (177), (178), (200), (218) или (219).

Если $A^\alpha = I$, $B_a^\alpha = S_a$, $Q_{ab}^\alpha = Q_{ab}$, где S_a — генераторы неприводимого представления $D(s)$ группы $O(3)$; Q_{ab} — тензор квадрупольного взаимодействия (191), то уравнения (232), (233) сводятся к (212). Эти уравнения можно рассматривать как галилеевски-инвариантное обобщение уравнения Шредингера (1) для $(2s+1)$-компонентной функции, учитывающее минимальное и аномальное взаимодействия частицы с электромагнитным полем (такие обобщения в другом подходе рассматривались в работах [32]). Итак, введение минимального взаимодействия в уравнения первого порядка (152), (200) оказалось эквивалентным введению аномального взаимодействия в уравнение Шредингера.

Нерелятивистская частица произвольного спина в однородном магнитном поле. Рассмотрим уравнения (216), (217) для случая постоянного однородного магнитного поля и найдем собственные значения оператора $H_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi}, A_0)$. Можно считать, что вектор напряженности такого поля параллелен третьей компоненте импульса, т.е. в (217) достаточно положить

$$H_1 = H_2 = E_1 = E_2 = E_3 = 0, \qquad H_3 = H. \tag{235}$$

Согласно (240) вектор-потенциал A_μ можно выбрать в виде

$$A_0 = A_2 = A_3 = 0, \qquad A_1 = -eHx_2. \tag{236}$$

Подставляя (178), (240) в (216) и (218) и полагая для упрощения выкладок $k_1 = 1$, приходим к гамильтониану

$$H_s = \sigma_1 am + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}}{m} + 2iak\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi} + \frac{1}{m}(\sigma_1 + i\sigma_2)[2a(k\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - ek_0\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}], \tag{237}$$

где $k_0 = (ak^2 - k_1')$ можно считать независимым параметром.

Преобразуем H_s к такой форме, чтобы он зависел только от коммутирующих операторов. Это позволит определить собственные значения гамильтониана (235), не решая уравнений движения.

Используя оператор

$$U=\frac{1}{2}\left(1+\sigma_3\frac{h}{\sqrt{h^2}}\right)\left(1+\frac{i}{m}\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\pi}\right),\quad U^{-1}=\left(1-\frac{i}{m}\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\pi}\right)\left(1-\sigma_3\frac{h}{\sqrt{h^2}}\right),$$

где η_a заданы формулой (66), а $h=\sigma_1 am+\frac{ek_0}{m}\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{H}$, получаем:

$$H_s'=UH_sU^{-1}=\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m}+S_3H+\sigma_3\left(a^2m^2+2ak_0S_3H\right)^{1/2}. \tag{238}$$

Все величины, входящие в гамильтониан (238), коммутируют друг с другом и с H_s' и имеют такие собственные значения [34]:

$$\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m}\Phi=\frac{1}{2m}\left[(2n+1)eH+p_3^2\right],\qquad n=0,1,2,\dots,$$
$$S_3\Phi=s_3\Phi,\qquad s_3=-s,-s+1,\dots,s,\qquad \sigma_3\Phi=\varepsilon\Phi,\qquad \varepsilon=\pm1,$$

откуда заключаем, что собственные значения H_s' равны:

$$E_{\varepsilon ns_3p_3}=(2n+1+2s_3)\frac{eH}{2m}+\frac{p_3^2}{2m}+\varepsilon\left(a^2m^2+2ak_0s_3H\right)^{1/2}. \tag{239}$$

Положив в (239) $k_0=0$, $s=1/2$, получаем формулу, которая с точностью до несущественного слагаемого εam задает известный спектр энергий нерелятивистской частицы в однородном магнитном поле (уровни Ландау). Если же $k_0\neq 0$, но $k_o\ll am$, то

$$E_{\varepsilon ns_3p_3}=[2n+1+2s_3(1+\varepsilon k_0)]\frac{eH}{2m}+\varepsilon am+\frac{\varepsilon k_0^2e^2H^2S_3^2}{8am^3}+o\left(\frac{1}{m^5}\right). \tag{240}$$

Формула (240) в отличие от случая $k_0=0$ включает поправку, учитывающую отклонение дипольного момента частицы от единицы, и поправку, квадратичную по напряженности магнитного поля.

Явный вид собственных функций оператора (237), который легко найти, используя результаты [17], здесь не приведен.

Заключение

1. Найденные выше системы дифференциальных уравнений первого и второго порядка (177), (178), (200), (216)–(218) и (224) инвариантны относительно преобразований Галилея и калибровочных преобразований и описывают дипольное, квадрупольное, спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействия частицы произвольного спина с внешним электромагнитным полем. Альтернативный способ галилеевски-инвариантного описания спин-орбитального взаимодействия предложен в работе [10], где используются уравнения ЛХГ в гамильтоновой форме. Перечисленные взаимодействия, таким образом, не являются чисто релятивистскими эффектами и их можно последовательно рассматривать в рамках нерелятивистской квантовой механики. В работе [38] наш вывод [8, 9] о нерялитивистской природе спин-орбитального взаимодействия обсужден с классических позиций.

2. Уравнения вида (64) и (114), конечно, не исчерпывают всех возможных линейных дифференциальных уравнений, инвариантных относительно группы Галилея. Так, для описания нерелятивистской частицы со спином $s = 1$ можно использовать галилеевски-инвариантный аналог уравнений Прока

$$\begin{aligned} &\left(2mp_0 - \boldsymbol{p}^2\right)\Psi_\nu, \qquad \nu = 0,1,2,3, \\ &m\Psi_0 - p_a\Psi_a = 0, \qquad a = 1,2,3. \end{aligned} \tag{241}$$

Уравнения (241) являются частным случаем систем уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} &C_1\Psi \equiv \left(2mp_0 - \boldsymbol{p}^2\right)\Psi, \\ &C_2\Psi \equiv W_aW_a\Psi \equiv \left[m^2\boldsymbol{S}^2 + m\boldsymbol{p}(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}\times\boldsymbol{S})\right]\Psi = m^2s(s+1)\Psi, \end{aligned}$$

где C_1 и C_2 — операторы Казимира (13) для представлений (36).

3. Неэрмитовость генераторов (36) относительно скалярного произведения типа (32) обусловлена неунитарностью конечномерных представлений однородной группы Галилея. Аналогичная ситуация имеет место в релятивистской теории, где на решениях конечных систем уравнений реализуются неунитарные представления однородной группы Лоренца, а требование унитарности этих представлений эквивалентно переходу к системам уравнений для функций с бесконечным числом компонент. Поэтому интересно рассмотреть бесконечнокомпонентные уравнения, инвариантные относительно группы Галилея. Примером таких уравнений могут служить системы (114), (173), где $\hat{S}_{kl}$ — генераторы унитарного бесконечномерного представления группы $O(1,5)$.

4. После того как рукопись настоящей статьи была сдана в редакцию, мы познакомились с работой [37], где также показано, что требование галилеевской инвариантности уравнений движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле не приводит однозначно к минимальному взаимодействию частицы с полем, но допускает также другие типы взаимодействий. Этот результат хорошо согласуется с данными [8]–[14].

Приложение 1
Неприводимые представления алгебры Ли расширенной группы Галилея

Неприводимые представления алгебры (6)–(10) получим в ортогональном базисе $|c,p,\lambda\rangle$, где $|\ldots\rangle$ — собственные векторы полного набора коммутирующих операторов C_a (13), P_μ и $\Lambda = P_a \cdot J_a \cdot P^{-1}$, $P = \left\{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2\right\}^{1/2}$:

$$\begin{aligned} &C_a|c,\hat{p},\lambda\rangle = c_a|c,\hat{p},\lambda\rangle, \qquad a = 1,2,3, \\ &P_\mu|c,\hat{p},\lambda\rangle = p_\mu|c,\hat{p},\lambda\rangle, \qquad \mu = 0,1,2,3, \\ &\Lambda|c,\hat{p},\lambda\rangle = \lambda|c,\hat{p},\lambda\rangle. \end{aligned} \tag{П.1}$$

Интересно рассмотреть только такие представления, которые не сводятся к представлениям какой-нибудь подалгебры алгебры (6)–(10).

Докажем сначала следующее утверждение.

Лемма. *Алгебра Ли, определяемая коммутационными соотношениями*

$$[\lambda_1, \lambda_2] = [\lambda_2, \lambda_3] = [\lambda_3, \lambda_1] = i\frac{c_2^2}{\sqrt{3}}\lambda_0,$$
$$[\lambda_0, \lambda_a] = \frac{i}{2\sqrt{3}}\varepsilon_{abc}(\lambda_b - \lambda_c), \qquad a, b, c = 1, 2, 3, \tag{П.2}$$

где c_2^2 — произвольное действительное число; при $c_2^2 > 0$ изоморфна алгебре Ли группы $O(3)$, в случае $c_2^2 = 0$ — алгебре Ли группы $E(2)$ и при $c_2^2 < 0$ — алгебре Ли группы $O(1,2)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что среди четырех элементов λ_μ алгебры (П.1) только три линейно независимых, поскольку всегда можно положить

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.$$

Изоморфизм, сформулированный в лемме, можно установить с помощью следующих соотношений:

$$\lambda_0 = K_3, \qquad \lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[K_1\left(1+\sqrt{3}\right) + K_2\left(1-\sqrt{3}\right)\right],$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[K_1\left(1-\sqrt{3}\right) + K_2\left(1+\sqrt{3}\right)\right], \qquad \lambda_3 = -\frac{1}{3}(K_1 + K_2), \tag{П.3}$$

где

$$K_1 = mS_1, \qquad K_2 = mS_2, \qquad K_3 = S_3, \qquad \text{если} \quad c_2^2 = m^2 > 0,$$
$$K_1 = T_1, \qquad K_2 = T_2, \qquad K_3 = T_0, \qquad \text{если} \quad c_2^2 = 0, \tag{П.4}$$
$$K_1 = \eta S_{01}, \qquad K_2 = \eta S_{02}, \qquad K_3 = S_{12}, \qquad \text{если} \quad c_2^2 = -\eta^2 < 0,$$

а S_a, T_α, $S_{\alpha\beta}$ ($a = 1,2,3$, $\alpha, \beta = 0,1,2$) — генераторы групп $O(3)$, $E(2)$ и $O(1,2)$ соответственно, т.е. матрицы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[S_a, S_b] = i\varepsilon_{abc}S_c,$$
$$[T_1, T_0] = -iT_2, \qquad [T_2, T_0] = iT_1, \qquad [T_1, T_2] = 0, \tag{П.5}$$
$$[S_{01}, S_{02}] = -iS_{12}, \qquad [S_{01}, S_{12}] = -iS_{02}, \qquad [S_{02}, S_{12}] = iS_{01}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что если матрицы S_a, T_α и $S_{\alpha\beta}$ удовлетворяют соотношениям (П.5), то матрицы λ_μ (П.3), (П.4) удовлетворяют алгебре (П.2), и наоборот, из (П.2)–(П.4) следует выполнение (П.5). Лемма доказана.

Можно показать, что алгебре (П.2) удовлетворяют операторы

$$\lambda_0 = W_0' p^{-1}, \qquad \lambda_a = \frac{1}{2\sqrt{3}}\varepsilon_{abc}(W_b' - W_c'),$$

где W_μ' — компоненты нерелятивистского аналога вектора Любанского–Паули

$$W_0 = P_a J_a, \qquad W_a = mJ_a - (\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{G})_a$$

в системе отсчета $p_1 = p_2 = p_3$. Сформулируем теперь основную теорему.

Теорема. *Произвольное эрмитовое представление алгебры Ли расширенной группы Галилея (6)–(10) можно реализовать с помощью операторов*

$$\begin{aligned}
&P_0 = p_0, \qquad P_a = p_a, \qquad M = m,\\
&J_a = -i\left(\boldsymbol{p}\times\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{p}}\right)_a + \lambda_0\frac{\sqrt{3}p_a + p}{\sqrt{3}p + p_1 + p_2 + p_3},\\
&G_a = -ip_0\frac{\partial}{\partial p_a} + \frac{(\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{p})_a}{p^2} - \frac{\varepsilon_{abc}(p_b - p_c)\lambda_0 mp - \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{p}}{2p^2\left(\sqrt{3}p + p_1 + p_2 + p_3\right)},
\end{aligned} \tag{П.6}$$

где λ_μ — матрицы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям (П.2).

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться, что операторы (П.6) удовлетворяют коммутационным соотношениям (6)–(10), т.е. реализуют представление алгебры Ли расширенной группы Галплея.

Покажем, что перебирая все неприводимые представления алгебры (П.2), получим по формулам (П.6) представления алгебры (6)–(10), соответствующие всем возможным значениям инвариантных операторов (13). Подставив (П.6) в (13), получим:

$$C_1 = 2mp_0 - \boldsymbol{p}^2, \qquad C_2 = m, \qquad C_3 = m^2\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2. \tag{П.7}$$

Используя изоморфизм (П.3), (П.4), оператор C_3 (П.7) перепишем в виде

$$\begin{aligned}
&C_3 = m^2\left(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2\right), \quad \text{если} \quad C_2^2 = m^2 > 0,\\
&C_3 = T_1^2 + T_2^2, \quad \text{если} \quad C_2 = 0.
\end{aligned} \tag{П.8}$$

Из (П.8) видно, что инвариантный оператор C_3 выражается через операторы Казимира групп $O(3)$ и $E(2)$ — малых групп группы Галилея, собственные значения которых (совместно с C_1 и C_2) нумеруют все неприводимые эрмитовые представления алгебры (6)–(10). Теорема доказана.

Таким образом, эрмитовые неприводимые представления $D(C_1, C_2, C_3)$ алгебры (6)–(10) можно разделить на три класса, соответствующих следующим значениям инвариантных операторов (П.6):

$$\begin{aligned}
&\text{I.} \quad -\infty < C_1 < \infty, \quad -\infty < C_2 < 0, \quad 0 < C_2 < \infty, \quad C_3 = m^2 s(s+1),\\
&\text{II.} \quad -\infty < C_1 < 0, \quad C_2 = C_3 = 0,\\
&\text{III.} \quad -\infty < C_1 < \infty, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = r^2 > 0.
\end{aligned} \tag{П.9}$$

Используя явный вид матриц S_a и T_α [35] и принимая во внимание изоморфизм (П.3) и (П.4), нетрудно вычислить явные выражения для матриц λ_μ в базисе $|c, \hat{p}, \lambda\rangle$

$$\begin{aligned}
&\lambda_0|c,\hat{p},\lambda\rangle = \lambda^\alpha|c,\hat{p},\lambda\rangle, \qquad \alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III},\\
&\lambda_1|c,\hat{p},\lambda\rangle = \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(a^\alpha_{\lambda,\lambda+1}|c,\hat{p},\lambda+1\rangle + a^\alpha_{\lambda,\lambda-1}|c,\hat{p},\lambda-1\rangle\right),\\
&\lambda_2|c,\hat{p},\lambda\rangle = \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(b^\alpha_{\lambda,\lambda+1}|c,\hat{p},\lambda+1\rangle + b^\alpha_{\lambda,\lambda-1}|c,\hat{p},\lambda-1\rangle\right)\\
&\lambda_3|c,\hat{p},\lambda\rangle = -(\lambda_1 + \lambda_2)|c,\hat{p},\lambda\rangle,
\end{aligned} \tag{П.10}$$

где значения индекса α зависят от величин c_a (эта зависимость приведена в (П.8)). При этом

$$\begin{aligned}
&\lambda^{\mathrm{I}} = -s, -s+1, -s+2\ldots, s,\\
&a^{\mathrm{I}}_{\lambda,\lambda\pm1} = \left[\left(1+\sqrt{3}\right) \mp \left(1\pm\sqrt{3}\right)\right]\sqrt{s(s+1)-\lambda^{\mathrm{I}}\left(\lambda^{\mathrm{I}}\pm1\right)},\\
&b^{\mathrm{I}}_{\lambda,\lambda\pm1} = \left[\left(1-\sqrt{3}\right) \mp \left(1\mp\sqrt{3}\right)\right]\sqrt{s(s+1)-\lambda^{\mathrm{I}}\left(\lambda^{\mathrm{I}}\pm1\right)},\\
&\lambda^{\mathrm{II}} = \tilde{\lambda}, \qquad a^{\mathrm{II}}_{\lambda,\lambda\pm1} = b^{\mathrm{II}}_{\lambda,\lambda\pm1} = 0,\\
&\lambda^{\mathrm{III}} = n+\varphi, \qquad a^{\mathrm{III}}_{\lambda,\lambda\pm1} = r\left(1\pm\sqrt{3}\right)(1\pm i), \qquad b^{\mathrm{III}}_{\lambda,\lambda\pm1} = r\left(1\mp\sqrt{3}\right)(1\pm i),
\end{aligned} \tag{П.11}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$, $0 \le \varphi \le 1$, а $\tilde{\lambda}$ и s — произвольные целые или полуцелые числа.

Формулы (П.1), (П.6), (П.9)–(П.11) (при фиксированных значениях C_a) полностью определяют явный вид генераторов группы Галилея для всех классов неприводимых представлений.

Представления I класса (которые обычно сопоставляются нерелятивистской частице со спином s, массой m и внутренней энергией $\varepsilon_0 = C_1/2m$) в другой реализации получены в [4]. Там же были найдены представления II класса алгебры (6)–(10), которые можно сопоставить нерелятивистской безмассовой частице. Такие представления имеют дополнительный инвариантный оператор $C_4 = J_aP_aP^{-1}$ и являются одномерными по индексу λ. Представления III класса бесконечномерны по спиновому индексу. Представления этого класса алгебры Ли расширенной группы Галилея по-видимому впервые получены в настоящей работе.

Отличительной чертой реализации (П.6) является одинаковая и симметричная форма генераторов P_μ, J_a, G_a для всех классов неприводимых представлений (в то время как обычно [4] неприводимые представления различных классов имеют совершенно разную реализацию). В случае $m = 0$ особенно $C_3 = 0$ аналитические выражения для операторов G_a значительно упрощаются (при этом $m = \lambda_a \equiv 0$).

Связь представления (П.6) с реализациями, полученными в [4], задается формулами

$$\begin{aligned}
&U_\alpha G^\alpha_a U^\dagger_\alpha = G_a, \qquad U_\alpha J^\alpha_a U^\dagger_\alpha = J_a, \qquad U_\alpha P^\alpha_\mu U^\dagger_\alpha = P_\mu, \qquad \alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II},\\
&U_{\mathrm{I}} = \exp\left(i\frac{\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{p}}{2m\tilde{p}}\operatorname{arctg}\frac{\tilde{p}}{p_1+p_2+p_3}\right),\\
&\tilde{p} = \left[(p_1-p_2)^2+(p_3-p_1)^2+(p_2-p_3)^2\right]^{1/2},\\
&U_{\mathrm{II}} = \exp\left(2i\lambda_0\operatorname{arctg}\frac{p_2-p_1}{\left(\sqrt{3}+1\right)(p+p_3)+p_1+p_2}\right),
\end{aligned}$$

где P^{I}_μ, J^{I}_a, G^{I}_a и P^{II}_μ, J^{II}_a, G^{II}_a — генераторы группы Галилея I и II класса в реализации, найденной в [4], а P_μ, J_a, G_a задаются формулами (П.6).

Отметим, что формулы (П.2), (П.6) определяют также представления IV класса, соответствующие $C_2^2 < 0$. Эти представления неэрмитовы, хотя и порождаются эрмитовыми представлениями алгебры $O(1,2)$. Однако операторы, образующие прямую сумму таких представлении:

$$\hat{P}_\mu = \begin{pmatrix} P_\mu & 0 \\ 0 & P_\mu \end{pmatrix}, \qquad \hat{M} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & -M \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & -\eta \end{pmatrix},$$

$$\hat{J}_a = \begin{pmatrix} J_a & 0 \\ 0 & J_a \end{pmatrix}, \qquad \hat{G}_a = \begin{pmatrix} G_a & 0 \\ 0 & G_a \end{pmatrix},$$

где P_μ, J_a, G_a задаются соотношениями (П.2), (П.6) с $c_2^2 < 0$, эрмитовы в индефинитной метрике

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int d^3p\, \varphi_1^\dagger(\boldsymbol{p})\sigma_1\varphi_2(\boldsymbol{p}),$$

где

$$\varphi = \begin{pmatrix} \Psi \\ \chi \end{pmatrix}, \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

Ψ и χ — элементы из пространства представлений $D(c_1, c_2, c_3)$ и $D(c_1^*, c_2, c_3)$, I и 0 — единичная и нулевая матрицы соответствующей размерности.

Приложение 2
О связи между представлениями расширенной группы Галилея и обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$

Расширенная группа Галился G является подгруппой обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ — группы вращений и сдвигов в пятимерном пространстве Минковского. Это означает, в частности, что каждое представление группы $P(1,4)$ определяет представление группы G, которое в общем случае будет приводимым.

Алгебру Ли группы $P(1,4)$ образуют пятнадцать генераторов P_μ, $J_{\mu\nu}$ ($\mu,\nu = 0,1,2,3,4$, $J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu}$), удовлетворяющих коммутационным соотношениям [31]

$$\begin{aligned} &[P_\mu, P_\nu] = 0, \qquad [P_\mu, J_{\nu\lambda}] = i(g_{\mu\nu}P_\lambda - g_{\mu\lambda}P_\nu), \\ &[J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}] = i(g_{\mu\lambda}J_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}J_{\mu\lambda} - g_{\mu\sigma}J_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda}J_{\mu\sigma}), \end{aligned} \tag{П.12}$$

где $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор; $g_{00} = -g_{kk} = 1$, $k = 1,2,3,4$; $g_{\mu\nu} = 0$, $\mu \neq \nu$.

Переходя в (П.12) к новому базису

$$\begin{aligned} &\hat{P}_0 = P_0 - P_4, \qquad M = \frac{1}{2}(P_0 + P_4), \qquad \hat{P}_a = P_a, \qquad K = J_{04}, \\ &J_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}J_{bc}, \qquad G_a^+ = \frac{1}{2}(J_{0a} + J_{4a}), \qquad G_a^- = J_{0a} - J_{4a}, \end{aligned} \tag{П.13}$$

получаем следующую алгебру (изоморфную (П.12)):

$$\begin{aligned} &[\hat{P}_0, \hat{P}_a] = [\hat{P}_0, M] = [\hat{P}_a, M] = [\hat{P}_a, \hat{P}_b] = 0, \\ &[\hat{P}_0, J_a] = [M, J_a] = [G_a^+, G_b^+] = [M, G_a^+] = 0, \qquad [\hat{P}_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}\hat{P}_c, \\ &[\hat{P}_a, G_b^+] = i\delta_{ab}M, \qquad [J_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}J_c, \qquad [\hat{P}_0, G_b^+] = i\hat{P}_b, \end{aligned} \tag{П.14}$$

$$\begin{aligned} &[\hat{P}_0, G_a^-] = [G_a^-, G_b^-] = 0, \qquad [G_a^-, M] = -i\hat{P}_a, \qquad [G_a^-, J_b] = i\varepsilon_{abc}G_c^-, \\ &[G_a^-, \hat{P}_b] = -i\delta_{ab}\hat{P}_0, \quad [G_a^-, G_b^+] = -i(\varepsilon_{abc}J_c + \delta_{ab}K), \quad [\hat{P}_0, K] = -i\hat{P}_0, \\ &[\hat{P}_a, K] = [J_a, K] = 0, \qquad [M, K] = iM, \qquad [G_a^\pm, K] = \pm iG_a^\pm. \end{aligned} \tag{П.15}$$

Коммутационные соотношения (П.13) совпадают с (6)–(10), т.е. определяют алгебру Ли расширенной группы Галплея.

Из изложенного выше следует, что любое уравнение, инвариантное относительно группы $P(1,4)$, инвариантно также относительно расширенной группы Галилея. Так, например, пятимерное уравнение Клейна–Гордона

$$P_\mu P^\mu \Psi = 0, \qquad P_\mu = p_\mu = -i\frac{\partial}{\partial x_\mu}, \qquad \mu = 0,1,2,3,4,$$

с помощью замены (П.13) приводят к форме, явно инвариантной относительно группы Галилея

$$\left(2M\hat{P}_0 - \hat{P}_a\hat{P}_a\right)\Psi = 0. \tag{П.16}$$

Уравнение (П.16) можно интерпретировать как уравнение Шредингера для частицы с переменной массой.

В работе [36] осуществлена редукция произвольного неприводимого представления группы $P(1,4)$ по представлениям группы G, т.е. полностью исследован вопрос, какие неприводимые представления группы G входят в заданное представление группы $P(1,4)$, и найден явный вид унитарных операторов, связывающих канонический базис представлений группы $P(1,4)$ с G-базисом, в котором операторы Казимира (13) диагональны.

1. Inönü E., Wigner E.P., *Nuovo Cimento*, 1952, **9**, 705.
2. Bargman V., *Ann. Math.*, 1954, **59**, 1.
3. Lie S., Engel F., Theorie der Transformationsgruppen, Bd. 2, Leipzig, 1890.
4. Levi-Leblond J.-M., *J. Math. Phys.*, 1963, **4**, 776.
5. Levi-Leblond J.-M., *Commun. Math. Phys.*, 1967, **6**, 286; 1967, **4**, 157; in: Group Theory and Its Applications, ed. E.M. Loebl, Vol.2, N.Y.–Lond., Academic Press, 1971.
6. Hagen C.R., Hurley W.J., *Phys. Rev. Lett.*, 1970, **26**, 1381.
7. Hurley W.J., *Phys. Rev. D*, 1971, **3**, 2339; 1974, **7**, 1185.
8. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Salogub V.A., *Lett. Nuovo Cimento*, 1975, **14**, 483.
9. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cimento*, 1976, **16**, 81.
10. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Salogub V.A., *Rep. Math. Phys.*, 1977, **13**, 175.
11. Никитин А.Г., Салогуб В.А., *Укр. физ. журн.*, 1975, **20**, 1730.
12. Никитин А.Г., Фущич В.И., Международный семинар по теоретико-групповым методам в физике, Звенигород, 1979, Москва, Наука, 1980, Т.2, 35–41.
13. Никитин А.Г., Фущич В.И., *Теор. и мат. физ.*, 1980, **44**, 34.
14. Никитин А.Г., *Укр. физ. журн.*, 1981, **26**, 2011.
15. Никитин А.Г., *Укр. физ. журн.*, 1973, **12**, 1000.
16. Фущич В.И., Грищенко А.Л., Никитин А.Г., *Теор. и мат. физ.*, 1971, **8**, 192; Никитин А. Г., Фущич В. И., *Теор. и мат. физ.*, 1978, *34*, 319.
17. Фущич В.И., Никитин А.Г., *ЭЧАЯ*, 1978, **9**, 501.
18. Ryder L.H., *Nuovo Cimento*, 1967, **3**, 879.
19. Brennich R.H., *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1970, **13**, 137.
20. Steinwedel N., *Fort. Phys.*, 1976, **24**, 211.
21. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978.

22. Hagen C.R., *Phys. Rev. D*, 1972, **5**, 377.
23. Niederer U., *Helv. Phys. Acta*, 1972, **45**, 802.
24. Фущич В.И., Сегеда Ю.Н., *Докл. АН СССР*, 1977, **232**, 801.
25. Никитин А.Г., Наконечный В.В., *Укр. физ. журн.*, 1980, **25**, 618.
26. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Math. Phys.*, 1978, **2**, 471.
27. Foldy L.L., *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 568.
28. Гельфанд И.М., Минлос Р.В., Шапиро З.Я., Представления группы вращений и группы Лоренца и их применения, М., Физматгиз, 1958.
29. Paravicini G., Sparzani A., *Nuovo Cimento A*, 1970, **66**, 579.
30. George C., Levi-Nahas M., *J. Math. Phys.*, 1966, **7**, 980.
31. Фущич В.И., *Теор. и мат. физ.*, 1971, **7**, 3.
32. Roman P., Leveille J.P., *J. Math. Phys.*, 1974, **10**, 1760;
Celeghni E., Lusanna L., Sorace E., *Nuovo Cimento A*, 1976, **31**, 89.
33. Foldy L.L., Wouthuysen S.A., *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 29.
34. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М., Квантовая механика, М., Физматгиз, 1969, с. 493.
35. Lomont D.S., Moses H.E., *J. Math. Phys.*, 1962, **3**, 405.
36. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *J. Phys. A*, 1980, **13**, 2319.
37. Kraus K., *Ann. Phys.*, 1980, **37**, 82.
38. Chatterjee R., Lulek T., *Acta Phys. Polon. A*, 1979, **56**, 205;
Chatterjee R., *Canad. J. Phys.*, 1979, **57**, 2072.