О точных решениях нелинейных многомерных волновых уравнений

В.И. ФУЩИЧ, С.С. МОСКАЛЮК, Н.И. СЕРОВ

В работе приведены в явном виде некоторые классы точных решений следующих нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП): гиперболические уравнения

$$\Box u + \lambda_1 u = 0, \tag{1}$$

$$\Box u + \lambda_2 \exp u = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x^\mu} = 0, \tag{3}$$

$$\Box u + \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x_0}\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_1} = 0, \tag{4}$$

$$\Box u + F_1(u) = 0, \qquad \Box \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \Delta, \tag{5}$$

параболические уравнения

$$i\frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{1}{2M}\Delta u + F_2(u) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{1}{2M}\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_0} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla}p = \Delta\vec{u}, \qquad \operatorname{div}\vec{u} = 0, \tag{7a}$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in R^n$, $\vec{u} = (u^1, u^2, u^3)$, Δ — оператор Лапласа; F_1, F_2 — произвольные интегрируемые функции; k, λ_1, λ_2, M, m — произвольные постоянные величины.

Все приведенные уравнения, как и другие основные уравнения математической и теоретической физики [1], обладают высокой симмерией. Именно это свойство уравнений (1)–(7) дает возможность отыскать целые семейства (классы) точных решений. Для уравнений (1)–(5) решения найдены через произвольные функции, зависящие от инвариантов группы симметрии [2, 3].

С помощью метода Ли [4] можно установить следующие группы инвариантности уравнений (1)–(7).

Теорема 1. *Максимальной группой инвариантности (МГИ) уравнений (1), (2) и (4) является расширенная группа Пуанкаре* $\tilde{P}(1, n-1) = \{P(1, n-1), D\}$ —

IX международная конференция по нелинейным колебаниям, Киев, 30.08–06.09 1981, Том 1, Аналитические методы теории нелинейных колебаний, Киев, Наукова думка, 1984, С. 384–389.

группа Пуанкаре $P(1,n-1)$ и масштабных преобразований D. МГИ уравнения (5) является группа $P(1,n-1)$.

Замечание 1. Уравнение Лиувилля (2) в двухмерном пространстве ($x \in R^2$) допускает бесконечную группу преобразований. Этот факт является причиной того, что все решения уравнения (2) в этом частном случае задаются известной формулой Лиувилля через две произвольные функции. Нами будут приведены решения уравнения Лиувилля в пространстве $x \in R^n$ при $n \geq 3$.

Теорема 2. *МГИ уравнения эйконала (3) является бесконечная группа преобразований. Инфинитезимально эта группа задается преобразованиями*

$$x'_\mu = x_\mu + \varepsilon A_\mu, \quad \mu = \overline{0, n-1}, \qquad u' = u + \varepsilon B, \tag{8}$$

$$A_\mu = -b_\mu(u) x_\nu x^\nu + 2x_\mu b_\nu(u) x^\nu - c_{\mu\nu}(u) x^\nu + d_\mu(u), \qquad B = \eta(u), \tag{9}$$

где b_μ, $c_{\mu\nu}$, d_μ, η — произвольные функции от u, причем $c_{00} = -c_{aa}$, $c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu}$, $\nu \neq \mu$.

Теорема 3. *МГИ уравнения (6) (при $F_2(u) = -\lambda u|u|^{4/(n-1)}$, $n = 4$) является 13-параметрическая группа. Инфинитезимально эта группа задается формулами (8), где*

$$\begin{aligned}
&A_0 = -cx_0^2 + 2qx_0 + b,\\
&A_i = (-cx_0 + q)x_i + \varepsilon_{ijk} r_j x_k + v_i x_0 + a_i,\\
&B = -\left[\frac{3}{2}(-cx_0 + q) + iM\left(\frac{1}{2}cx_i x_i - v_i x_i\right)\right] u,
\end{aligned} \tag{10}$$

a_i, b, r_i, v_i, q, c — параметры преобразований [5].

В основе нашего подхода к отысканию точных решений уравнений (1)–(7) лежит представление

$$u(x) = \Phi[\varphi(\omega), f(x)], \tag{11}$$

где Φ, φ, f — произвольные дифференцируемые функции соответствующих переменных; $\omega = \omega(x) = \{\omega_1(x), \ldots, \omega_{n-1}(x)\}$ — инварианты групп инвариантности уравнений (1)–(7).

В силу того, что ω являются инвариантами группы инвариантности уравнений, подстановка (11) в уравнения (1)–(7) приводит к ДУЧП для функции $\varphi(\omega)$, зависящей от меньшего числа переменных, чем $u(x)$. Функции Φ, f и инварианты ω находим из системы уравнений Лагранжа

$$\frac{dx_0}{A} = \frac{dx_1}{A_1} = \cdots = \frac{dx_{n-1}}{A_{n-1}} = \frac{du}{B}.$$

I. Решения уравнения (1) ищем в виде $u(x) = \varphi(\omega) f(x)$.

Приведем явный вид некоторых решений уравнений (1):

$$u = \left[-\frac{\lambda}{4}(1-k)^2((\beta_\nu y^\nu)^2 + y_\nu y^\nu)\right]^{1/(k-1)},$$

$$\beta_\nu \beta^\nu = -1, \qquad y_\nu = x_\nu + a_\nu, \qquad \nu = \overline{0, n-1};$$

$$u = \left[\frac{\lambda}{2}(1-k)^2 a_\nu y^\nu \cdot \beta_\nu y^\nu\right]^{1/(1-k)}, \qquad a_\nu a^\nu = \beta_\nu\beta^\nu = 0, \quad a_\nu\beta^\nu = -1;$$

$$u = \mu\left[x_3\cos(c_1 + x_0 \pm x_1) \pm x_2 \sin(c_1 + x_0 \pm x_1)\right]^{1/(1-k)},$$

$$\mu = \left[\frac{\lambda}{2}(1-k)^2(1+k)^{-1}\right]^{1/(1-k)};$$

$$u = \left[F(\alpha_\nu x^\nu) + \beta_\nu x^\nu\right]^{2/(1-k)}, \qquad \alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta^\nu = 0,$$

$$\beta_\nu\beta^\nu = -\frac{\lambda}{2}(1-k)^2(1+k)^{-1},$$

F — произвольная дифференцируемая функция, a_ν, α_ν, β_ν — const;

$$u = \left[x_3\Phi(x_0 \pm x_1) \pm x_2(\beta^2 - \Phi^2(x_0 \pm x_1))^{1/2}\right]^{2/(1-k)},$$

$$\beta^2 = \frac{\lambda}{2}(1-k)^2(1+k)^{-1},$$

Φ — произвольная дифференцируемая функция;

$$u = \left[F(\alpha_{1\nu}x^\nu, \ldots, \alpha_{n-1\nu}x^\nu) + \alpha_{n\nu}x^\nu\right]^{2/(1-k)},$$

$$\alpha_{a\mu}\alpha_b^\mu = 0, \quad a = \overline{1,n}, \ b = \overline{1,n-1}, \qquad \alpha_{n\nu}\alpha_n^\nu = -\frac{\lambda}{2}(1-k)^2(1+k)^{-1},$$

F — произвольная дифференцируемая функция.

II. Решения уравнения Лиувилля (2) ищем в виде

$$u(x) = \varphi(\omega) + f(x). \tag{12}$$

Найденные нами решения уравнения (2) имеют вид

$$\begin{aligned} &u = -2\ln\left[\gamma\mathcal{P}(x)\,\mathrm{sh}\,Q(x)\right], \qquad u = -2\ln\left[\delta\mathcal{P}(x)\,\mathrm{ch}\,Q(x)\right],\\ &u = -2\ln\left[\gamma\mathcal{P}(x)\cos Q(x)\right], \qquad u = -2\ln\left[\sigma\mathcal{P}(x)\mathcal{R}(x)\right], \end{aligned} \tag{13}$$

где

1) $\mathcal{P}(x) = \alpha_\nu y^\nu, \qquad Q(x) = c_1(\alpha_\nu y^\nu)^{-1}\sqrt{y_\nu y^\nu} + c_2, \qquad \mathcal{R}(x) = Q(x)|_{c_1=1},$

$\gamma = \dfrac{\sqrt{-2\lambda}}{2c_1}, \qquad \delta = \dfrac{\sqrt{2\lambda}}{2c_1}, \qquad \sigma = \gamma|_{c_1=1}, \qquad \alpha_\nu\alpha^\nu = 0;$

2) $\mathcal{P}(x) = \dfrac{1}{2}\left[(\beta_\nu y^\nu)^2 + y_\nu y^\nu\right]^{-1/2},$

$Q(x) = c_1\ln\left[(\beta_\nu y^\nu)^2 + y_\nu y^\nu\right] + c_2, \qquad \beta_\nu\beta^\nu = 1;$

3) $\mathcal{P}(x) = \Phi^{-1}(\alpha_\nu y^\nu), \quad Q(x) = c_1\beta_\nu y^\nu\Phi(\alpha_\nu y^\nu) + c_2, \quad \alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta^\nu = 0,$

$\beta_\nu\beta^\nu = 1, \qquad \Phi$ — произвольная дифференцируемая функция;

4) $\mathcal{P}(x) = \Phi^{-1}(\alpha_\nu y^\nu), \qquad Q(x) = c_1\left[\beta_\nu y^\nu\Phi(\alpha_\nu y^\nu) - \ln\Phi(\alpha_\nu y^\nu)\right] + c_2,$

$\alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta^\nu = 0, \qquad \beta_\nu\beta^\nu = 1;$

5) $\mathcal{P}(x) = 1, \qquad Q(x) = c_1\left[\beta_\nu y^\nu + \Phi(\alpha_\nu y^\nu)\right] + c_2,$

$\alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta^\nu = 0, \qquad \beta_\nu\beta^\nu = -1.$

III. Решения уравнения (5) ищем в виде $u(x) = \varphi(\omega)$. Решения уравнения (5) даются интегралом

$$\int\limits_0^u \frac{d\psi}{\sqrt{c_1 \pm \int\limits_0^\varphi F_1(\xi)d\xi}} = \omega + \ln c_2, \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} &1)\quad \omega = \alpha_\nu x^\nu + f(\beta_\nu x^\nu), \qquad \alpha_\nu\alpha^\nu = \beta_\nu\beta^\nu = 0, \qquad \nu = \overline{0, n-1}, \\ &\quad f \ \text{— произвольная дифференцируемая функция;} \end{aligned} \tag{15}$$

$$2)\quad \omega = \sqrt{2\left[(\alpha_\nu y_\nu)^2 \pm y_\nu y^\nu\right]}, \qquad \alpha_\nu\alpha^\nu = \pm 1, \qquad \nu = 0, 1. \tag{16}$$

В случае $F_1(u) = \sin u$ имеем решение уравнения синус-Гордона в форме (14). Кроме того, при $c_1 = 2$ решения этого уравнения записываются в явном виде:

$$u = 4\operatorname{arctg}(c_2 \exp\omega), \qquad \alpha_\nu\alpha^\nu = -1,$$

$$u = 4\operatorname{arctg}\left(c_2 \operatorname{th}\frac{\omega}{2}\right), \qquad \alpha_\nu\alpha^\nu = \pm 1,$$

где ω задается формулами (15), (16).

IV. Решения уравнения эйконала (3) ищем в виде

$$u(x) = F[\varphi(\omega) + f(x)].$$

Полученные решения имеют вид

$$u(x) = F(w), \tag{17}$$

где

1) $w = \alpha_\nu x^\nu, \qquad \alpha_\nu\alpha^\nu = 0;$

2) $w = \beta_\nu y^\nu + \sqrt{(\beta_\nu y^\nu)^2 - y_\nu y^\nu}, \qquad \beta_\nu\beta^\nu = 1;$

3) $w = (\alpha_\nu y^\nu)^{-1} y_\nu y^\nu, \qquad \alpha_\nu\alpha^\nu = 0.$

В (17) F — произвольная дифференцируемая функция.

V. Решения уравнения Борна–Инфельда (4) ищем в виде

$$u(x) = \varphi(\omega) + f(x) \qquad \text{или} \qquad u(x) = \varphi(\omega) f(x) + c. \tag{18}$$

Полученные решения имеют вид

$$u = f(\alpha_\nu x^\nu) + \beta_\nu x^\nu, \qquad \alpha_\nu\alpha^\nu + (\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0)^2 = 0.$$

В частности, при $\beta_0 = \beta_1 = 0$, $\alpha_0 = \pm\alpha_1$ имеем решение $u = f(x_0 \pm x_1)$ полученное в [6].

$$u = \frac{a}{2}\ln\left\{\frac{y_0 + y_1}{y_0 - y_1}\operatorname{th}\left[\frac{1}{4}\ln\left(\frac{a^2}{b^2}\frac{b^2 - y_\nu y^\nu}{a^2 + y_\nu y^\nu}\right)\right]\right\} + b\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a^2 + y_\nu y^\nu}{b^2 - y_\nu y^\nu}} + c,$$

$$u = \pm\left[c_1\exp[c_2(y_0-y_1)] + \frac{2}{c_2}(y_0+y_1)\right]^{1/2} + c_2,$$

$$u = \pm\left[\frac{y_0-y_1}{c_1}F(w)\right]^{1/2} + c_3, \qquad w = c_1(y_0+y_2)+c_2,$$

где 1) $F(w) = \operatorname{th} w$, 2) $F(w) = \operatorname{cth} w$, 3) $F(w) = \operatorname{tg} w$, 4) $F(w) = w$,

$$\frac{\Phi(x,u)+1}{\Phi(x,u)-1}\frac{1}{y_0+y_1}\exp\left[\frac{-2}{\Phi(x,u)-1} - \frac{y_0-y_1}{a}\right] = c,$$

$$\Phi(x,u) = \frac{u}{\sqrt{u^2+4a(y_0+y_1)}}.$$

VI. Решение нелинейного уравнения Шредингера (6) ищем в виде

$$u(x) = \varphi(\omega)f(x).$$

Приведем одно из полученных решений при $F_2(u) = -\lambda u|u|^m$, ($c = 0$, $q \neq 0$, $r_3 \neq 0$)

$$f = (2qx_0+b)^{-1/m+i\rho}\exp\left\{iM(\alpha_i z_i) + \frac{iM}{2}(\alpha_i\alpha_i)x_0\right\},$$

$$\varphi = \left[\frac{1}{2\lambda M}\left(\frac{4}{m^2} - B^2\right)\right]^{1/m}\left[(\omega^1)^2 - (\omega^3)^2\right]^{-1/m}\exp[iB\omega^2],$$

где

$$\rho = \frac{M}{4q}[2(\alpha_i\beta_i) + b(\alpha_i\alpha_i)], \qquad B = \frac{2q}{\sqrt{r_l r_l}}\rho, \qquad z_i = x_i - \alpha_i x_0 - \beta_i,$$

$$\alpha_i = \frac{q^2 v_i + r_i(r_k v_k) + q\varepsilon_{ijk}v_k}{q(q^2+r_l r_l)}, \quad \beta_i = \frac{bv_i - qa_i + \varepsilon_{ijk}r_j a_k}{q^2 + r_k r_k} + r_i\frac{r_k(bv_k - qa_k)}{q(q^2+r_l r_l)},$$

$$\omega^1 = \sqrt{\frac{z_i z_i}{2qx_0+b}}, \qquad \omega^3 = \frac{r_i z_i}{\sqrt{r_l r_l(2qx_0+b)}},$$

$$\omega^2 = \left|\arcsin\frac{z_2\Big/\sqrt{2qx_0+b-r_2\omega^3\Big/\sqrt{r_l r_l}}}{\sqrt{\left[(r_1^2+r_3^2)/r_l r_l\right]\left[(\omega^1)^2-(\omega^3)^2\right]}}\right| - \frac{\sqrt{r_k r_k}}{2q}\ln(2qx_0+b).$$

VII. Решения уравнения Гамильтона–Якоби (7) ищем в виде

$$u = \varphi(\omega^1,\omega^2,\omega^3) + f(x_0,x_1,x_2,x_3).$$

Приведем одно из полученных решений:

$$u = \frac{Mq}{2qx_0+b}z_i z_i + M(\alpha_i z_i) + \frac{M}{2}(\alpha_i\alpha_i)x_0, \quad z_i = x_i - \alpha_i x_0 - \beta_i, \quad i = 1,2,3,$$

где q, α_i, β_i — произвольные постоянные.

VIII. Решения уравнения Навье–Стокса (7a) ищем в виде

$$u^i = F^{ij}(x_0,x_1,x_2,x_3)\varphi_j\left(\omega^1,\omega^2,\omega^3\right) + f^i(x_0,x_1,x_2,x_3).$$

Приведем одно из полученных решений:

$$u^i = \frac{q(r_k r_k) z_i - r_i (r_k z_k)}{(r_l r_l)(z_j z_j) - (r_l z_l)^3} + \alpha_i, \qquad l,k,i,j = 1,2,3,$$

$$p = -\frac{1}{2} \frac{q^2 (r_l r_l)}{(r_k r_k)(z_j z_j) - (r_k z_k)^2}, \qquad z_i = x_i - \alpha_i x_0 - \beta_i,$$

где q, r_i, α_i, β_i — произвольные постоянные.

1. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств дифференциальных уравнений в частных производных, В кн.: Теоретико-групповые методы и математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1978, 5–44.
2. Фущич В.И., Серов Н.И., О точных решениях Борна–Инфельда, *Докл. АН СССР*, 1982, **263**, № 3, 582–586.
3. Фущич В.И., Серов Н.И., Симметрия и некоторые точные решения многомерного уравнения Монжа–Ампера, *Докл. АН СССР*, 1983, **273**, № 3, 543–546.
4. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнении, М., Наука, 1978, 400 с.
5. Fushchych W.I, Moskaliuk S.S., On some exact solutions of the nonlinear Schrödinger equation in three spatial dimensions, *Lett. Nuovo Cimento*, 1981, **31**, № 16, 571–576.
6. Барбашов Б.М., Черников Н.А., Решение и квантования нелинейной двухмерной модели тина Борна–Инфельда, *Журн. эксперим. и теор. физики*, 1966, **50**, 1296–1308.