Симметрия в задачах математической физики

В.И. ФУЩИЧ

Введение

Уравнения математической физики — это уравнения с высокой симметрией, т.е. они, как правило, инвариантны относительно широких групп Ли [1–6]. Это важное свойство линейных и нелинейных уравнений математической физики приводит к том, что если найдено хотя бы одно решение такого уравнения, то можно построить многопараметрические семейства решений*.

Наиболее распространенный подход к решению нелинейных уравнений в частных производных в идейном отношении такой же, как и в нелинейной механике Крылова–Боголюбова [7], т.е. рассматриваются нелинейные уравнения, в некотором смысле близкие к линейным. Такой подход к решению нелинейных уравнений в частных производных развит в работе [8], где, в частности, детально рассмотрено волновое уравнение для функции двух независимых переменных

$$\Box u(t,x) = \varepsilon F\left(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial x},\varepsilon\right),$$

ε — малый параметр. Далее речь пойдет о методе решения нелинейных уравнений, в которых отсутствует малый параметр ε.

Создать эффективные методы решения произвольных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (НДУЧП), если даже ограничиться лишь уравнениями второго порядка, как нам кажется, безнадежная задача. Поэтому для продвижения в этом направлении, видимо, нужно, прежде всего, выработать какой-то классификационный принцип (принцип отбора) НДУЧП, с помощью которого можно было бы выделить некоторые классы НДУЧП и подвергнуть их всестороннему исследованию. В основу такого классификационного принципа можно положить симметрийные свойства НДУЧП (§ 1). Как будет видно ниже, симметрийные свойства НЦУЧП дают возможность найти целые семейства точных решений многомерных НДУЧП.

В дальнейшем решается не начальная или краевая задача математической физики, поэтому желательно находить довольно широкий класс функций, удовлетворяющих НДУЧП. Начальные или краевые условия приведут к выделению из найденного класса функций одного или нескольких решений НДУЧП.

Можно выделить классические представители НДУЧП, обладающие высокой симметрией. Такие уравнения имеют следующую структуру.

Гиперболические уравнения:

$$p_\mu p^\mu u(x) = F_1\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{1.1}$$

Сборник научных трудов “Теоретико-алгебраические исследования в математической физике”, отв. ред. В.И. Фущич, Киев, Институт математики АН УССР, 1981, С. 6–28.

*В основу этой статьи положен доклад автора, прочитанный на Ученом совете Института математики АН УССР в октябре 1981 г.

$$-p_\mu p^\mu \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \Delta \equiv \Box, \qquad p_\mu = ig_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}, \qquad \mu = \overline{0,n},$$

$g_{\mu\nu}$ — метрический тензор с сигнатурой $(1,-1,-1,\ldots,-1)$, $u \equiv u(x)$, $x \equiv (x_0 = t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, F_1 — произвольная дважды дифференцируемая функция. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

$$\Box u = \lambda_1 \exp u \quad - \tag{1.2}$$

уравнение Лиувилля, λ_1 — параметр,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a} = \lambda_2 \quad - \tag{1.3}$$

уравнение эйконала или релятивистское уравнение Гамильтона, λ_2 — параметр, $a = \overline{1,n}$;

$$\gamma_\mu p^\mu \Psi = F_2(x, \Psi, \Psi^*)\Psi \quad - \tag{1.4}$$

нелинейная система Дирака, Ψ, Ψ^* — спиноры с компонентами

$$\Psi = (\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3), \qquad \Psi^* = (\Psi_0^*, \Psi_1^*, \Psi_2^*, \Psi_3^*).$$

Параболические уравнения:

$$p_0 u + \lambda_3 p_a p_a u = F_3\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_a}\right), \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} + \lambda_4 \frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a} = 0 \tag{1.6}$$

уравнения Гамильтона–Якоби;

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_0} + \lambda_5 u_l \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \lambda_6 \Delta u_k = 0 \tag{1.7}$$

система типа Навье–Стокса.

§ 1. Симметрийный принцип классификации нелинейных уравнений

На первый взгляд может показаться, что дифференциальных или интегродифференциальных уравнений, моделирующих реальные физические процессы, слишком много. На самом деле это не так. Если в реальном физическом процессе имеют место законы сохранения энергии, импульса, момента количества движения и если учесть тот факт, что для физических процессов выполняется либо принцип относительности Галилея, либо принцип относительности Пуанкаре–Эйнштейна, то оказывается, что уравнений, для которых выполнялись бы все эти законы и один из принципов относительности, не так уж много.

Дифференциальные уравнения (ДУ), для которых выполняются указанные законы сохранения, должны быть инвариантны либо относительно группы Галилея $G(1,3)$, либо относительно группы Пуанкаре $P(1,3)$ (или ее подгрупп), либо относительно групп, содержащих в качестве подгрупп группы $P(1,3)$, $G(1,3)$. Примерами таких групп, содержащих группу $P(1,3)$, является конформная группа

$C(1,3)$. Группа сдвигов и вращении в 5-мерном пространстве $P(1,4)$ содержит в качестве подгрупп как группу $P(1,3)$, так и группу $G(1,3)$ [9, 10].

Задача о явном описании, в некотором смысле, всех систем линейных ДУ, инвариантных относительно групп $P(1,3)$ и $C(1,3)$, решена (см. [9–13] и цитированную там литературу). Задача о явном описании всех НДУЧП вида (1.1), (1.5), инвариантных относительно группы $P(1,3)$ или $G(1,3)$, дополненных группой масштабных преобразований, может быть так же конструктивно решена. Ее решение приведем в виде теорем 1–5.

Группы Галилея $G(1,n)$ и Пуанкаре $P(1,n)$ в $(1+n)$-мерном пространстве, дополненные группой масштабных преобразований $x'_\mu = dx_\mu$, обозначим соответственно символами $\tilde{G}(1,n) \supset G(1,n)$ и $\tilde{P}(1,n) \supset P(1,n)$.

Теорема 1 [14]. *Уравнение (1), если функция F_1 не зависит от $\frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, инвариантно относительно группы $\tilde{P}(1,n)$ только в таких двух случаях: $F_1(u) = \lambda_1 u^k$, либо $F_2(u) = \lambda_2 \exp u$, λ_1, λ_2, k — произвольные постоянные.*

Из этого результата видно, что уравнение Лиувилля — единственное уравнение неполиномиального типа, инвариантное относительно группы $\tilde{P}(1,n)$.

Замечание 1. Если потребовать, чтобы уравнение вида (1) было инвариантно относительно конформной группы $C(1,n) \supset \tilde{P}(1,n)$, то, как хорошо известно, это будет выполняться только в том случае, когда $F_1 = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}}$ (см., например, [1, 3]).

Теорема 2 [15, 16]. *Если уравнение (1.1) инвариантно относительно конформной группы $C(1,n)$, то с помощью локальной невырожденной замены $w = \psi(u)$ оно приводится к нелинейному волновому уравнению*

$$\Box w + \lambda w^{\frac{n+2}{n-2}} = 0, \qquad \lambda = \mathrm{const}, \quad n \neq 2.$$

Замечание 2. Если F_1 не зависит от u и уравнение (1) конформно инвариантно, то такое уравнение с помощью локальной замены приводится к линейному волновому уравнению $\Box w = 0$.

Обозначим символом $E(1,n)$ группу сдвигов и вращений в $(1+n)$-мерном пространстве, символом $\tilde{E}(1,n)$ — группу $E(1,n)$, дополненную группой масштабных преобразований. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3 [17]. *Уравнение*

$$\Box u + F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0$$

инвариантно относительно группы $\tilde{E}(1,n)$ только в таких трех случаях:

$$1)\ F = u^k f\left(\frac{u_a u_a}{u^{2k+2}}\right); \qquad 2)\ F = \sqrt{u_a u_a} f(u);$$

$$3)\ F = \exp u\, f\left(\frac{u_a u_a}{\exp 4u}\right), \qquad u_a = \frac{\partial u}{\partial x_a},$$

где k — произвольная постоянная, f — произвольная дифференцируемая функция.

Теорема 4 [18]. *Уравнение (1.5), если F_3 не зависит от $\frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, инвариантно относительно группы $\tilde{G}(1,n)$ и группы проективных преобразований*

$$x_0' = \frac{x_0}{1+\alpha x_0}, \qquad x_a' = \frac{x_a}{1+\alpha x_0}$$

тогда и только тогда, когда $F_3 = \lambda u|u|^{4/n}$.

Таким образом, требование инвариантности НДУЧП относительно групп $\tilde{P}(1,n)$, $\tilde{G}(1,n)$ или их подгрупп дает возможность провести классификацию нелинейных уравнений. Во многих случаях эта классификация значительно шире, чем стандартное разделение уравнений на эллиптические, параболические, гиперболические и ультрагиперболические. Одно из преимуществ такой классификации состоит в том, что она пригодна как для линейных, так и для нелинейных ДУ.

Особенностью многих НДУЧП, обладающих нетривиальной симметрией $\tilde{P}(1,n)$, $\tilde{G}(1,n)$, является то, что на множестве решений этих нелинейных уравнений реализуется, как правило, линейное представление алгебры Ли. Именно это обстоятельство является тем решающим фактом, который дал нам возможность построить в явном виде многопараметрические семейства точных решений многих НДУЧП.

§ 2. О точных решениях нелинейных уравнений, инвариантных относительно групп $\tilde{P}(1,n)$ и $\tilde{E}(1,n)$

1. Для отыскания решений уравнений (1.1)–(1.3), (1.5), (1.6) поступим следующим образом. Решения уравнения (1.1) ищем в виде

$$u(x) = \varphi(\omega) f(x) + g(x), \tag{2.1}$$

где φ — некоторая неизвестная функция от новых переменных $\omega(x) = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_{n-1}(x)\}$, число которых на единицу меньше, чем переменных в уравнении (1.1). Эти переменные выбираются из инвариантов группы симметрии уравнения (1.1). Новые переменные $\omega(x)$ и явные выражения для функций $f(x)$ и $g(x)$ определяются из систем уравнений Лагранжа

$$\frac{dx_0}{A_0} = \frac{dx_1}{A_1} = \cdots = \frac{dx_n}{A_n} = \frac{du}{B}, \tag{2.2}$$

где A_μ и B — функции, задающие инфинитезимально группу инвариантности уравнения (1.1), т.е.

$$\begin{aligned} &x_\mu' = x_\mu + \varepsilon A_\mu, \qquad A_\mu = c_{\mu\nu} x^\nu + d_\mu, \\ &u' = u + \varepsilon B, \qquad B = au + b, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $c_{\mu\nu}$, d_μ, a, b — параметры группы инвариантности данного уравнения. Инвариантные переменные $\omega(x)$ являются первыми интегралами системы (2.2), зависящими только от x.

Структура (2.1) решений уравнения (1.1) находится из уравнения (2.2). Формула (2.1) лежит в основе нашего подхода к решению НДУЧП*. Подставив (2.1)

*Для некоторых уравнений решения следует искать в более общем виде

$$u = F\{\varphi(\omega), f(x), g(x)\} \qquad \text{или} \qquad u = F\left\{\varphi(\omega_1), \tilde{\varphi}(\omega_2), \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_1}, \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \omega_2}\right\}.$$

в уравнение (1.1), в силу того, что ω — инвариантные переменные, получим для $\varphi(\omega)$ уравнение, не зависящее от f, g. Для уравнения (1.1) с полиномиальной нелинейностью $g = 0$. Полученное таким путем уравнение для $\varphi(\omega)$ зависит только от новых переменных ω. Если удается найти какие-либо решения НДУЧП для $\varphi(\omega)$, то тем самым по формуле (2.1) найдем решения исходного уравнения.

Очевидно что к НДУЧП для функции $\varphi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1})$ может быть применен повторно сформулированный алгоритм. Конечно, при этом необходимо, чтобы уравнение для $\varphi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1})$ обладало нетривиальной симметрией. Решение в этом случае ищется в виде

$$\begin{aligned} \varphi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}) = \varphi_1(\omega_1^1, \omega_2^1, \ldots, \omega_{n-2}^1) \times \\ \times f_1(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}) + g_1(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}), \end{aligned} \tag{2.4}$$

где новые инварианты $\omega^1 \equiv \{\omega_1^1, \omega_2^1, \ldots, \omega_{n-2}^1\}$, зависящие от $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}\}$. Функция φ_1 зависит от $n-2$ независимых переменных.

2. Не вдаваясь в детали, приведем явный вид некоторых частных решений уравнения

$$\Box u + \lambda u^k = 0, \qquad k \neq 1, \tag{2.5}$$

полученных указанным способом [19, 20]. Решение ищем в виде $u = \varphi(\omega) f(x)$,

$$u = \left\{ -\frac{\lambda}{4}(1-k)^2 \left[(\beta_\nu y^\nu)^2 + y_\nu y^\nu \right] \right\}^{\frac{1}{1-k}}, \tag{2.6}$$

$$\beta_\nu \beta^\nu = -1, \qquad y_\nu = x_\nu + a_\nu, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \tag{2.7}$$

$$u = \left\{ \frac{\lambda}{2}(1-k)^2 \alpha_\nu y^\nu \beta_\sigma y^\sigma \right\}^{\frac{1}{1-k}}, \tag{2.8}$$

$$\alpha_\nu \alpha^\nu = \beta_\nu \beta^\nu = 0, \qquad \alpha_\nu \beta^\nu = -1, \tag{2.9}$$

$$u = \{ F(\alpha_\nu x^\nu) + \beta_\nu x^\nu \}^{\frac{2}{1-k}}, \tag{2.10}$$

$$\beta_\nu \beta^\nu = -\frac{\lambda}{2}(1-k)^2 (1+k)^{-1} \neq 0, \tag{2.11}$$

F — произвольная дважды дифференцируемая функция, a_ν, α_ν, β_ν — параметры, удовлетворяющие условиям (2.7), (2.9), (2.11) .

Следует подчеркнуть, что решения (2.6), (2.8) при $k > 1$ в точке $\lambda = 0$ имеют особенность. Это означает, что с помощью метода последовательного приближения, каким бы малым ни был параметр λ, невозможно получить решения, близкие к точным решениям (2.6), (2.8).

3. Решения многомерного уравнения Лиувилля (1.2) ищутся в виде

$$u(x) = \varphi(\omega) + g(x). \tag{2.12}$$

Полученные нами решения имеют вид [14]

$$\begin{aligned} &u = -2\ln\{\gamma P(x) \operatorname{sh} Q(x)\}, \qquad u = -2\ln\{\gamma P(x) \operatorname{ch} Q(x)\}, \\ &u = -2\ln\{\gamma P(x) \cos Q(x)\}, \qquad u = -2\ln\{c P(x) R(x)\}, \end{aligned}$$

где

$$P(x) = \alpha_\nu y^\nu, \qquad Q(x) = c_1(\alpha_\nu y^\nu)^{-1}\sqrt{y_\nu y^\nu} + c_2,$$
$$R(x) = Q(x)|_{c_1=1}, \qquad \alpha_\nu\alpha^\nu = 0,$$
$$P(x) = F^{-1}(\alpha_\nu y^\nu), \qquad Q(x) = c_1\beta_\nu y^\nu F(\alpha_\nu y^\nu) + c_2,$$
$$\alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta^\nu = 0, \qquad \beta_\nu\beta^\nu = 1, \qquad y_\mu = x_\mu + a_\mu.$$

4. Решения четырехмерного уравнения [17]

$$\Box u + \lambda u\frac{\partial u}{\partial x_0} = 0, \qquad x = (x_0, x_1, x_2, x_3), \tag{2.13}$$

ищем в виде $u(x) = \varphi(\omega)f(x)$.

Решениями уравнения (2.13) будут функции

$$u = F(\beta_a x_a)\,\mathrm{th}\left\{c_2 + \frac{\lambda y_0}{2}F(\beta_a y_a)\right\},$$
$$u = F(\beta_a x_a)\,\mathrm{cth}\left\{c_2 + \frac{\lambda y_0}{2}F(\beta_a y_a)\right\}, \qquad y_0 = x_0 + a_0, \qquad y_i = x_i + a_i,$$
$$u = \left\{c\sqrt{\left[\beta\frac{(\alpha_a x_a)^2}{-\alpha^2} + y_a y_a\right] - (\beta_\nu x^\nu + b)^2} + \frac{\sigma}{2}(\beta_\nu x^\nu + b)\right\}^{-1},$$
$$\alpha_a\alpha_a = \alpha^2 \neq 0, \qquad \beta_\nu\beta^\nu = \beta \neq 0, \qquad b = \frac{\alpha_0}{\alpha}, \qquad \sigma = \frac{\lambda i}{\alpha_a\alpha_a}, \qquad c = \mathrm{const}.$$

5. Решения уравнения sine-Гордон (sine-Даламбер)

$$\Box u + \sin u = 0, \qquad x = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{2.14}$$

полученные указанным способом, имеют вид

$$u = 4\,\mathrm{arctg}\,\{c_0\exp\left[\alpha_\nu x^\nu + F(\beta_\nu x^\nu)\right]\},$$
$$u = 4\,\mathrm{arctg}\,\{\mathrm{th}\left[\alpha_\nu x^\nu + F(\beta_\nu x^\nu) + c_0\right]\}.$$

Для одномерного случая $x = (x_0, x_1)$

$$u = 4\,\mathrm{arctg}\left\{c_0\exp\left[(\alpha_\nu y^\nu)^2 + y_\nu y^\nu\right]^{1/2}\right\},$$
$$y_\nu = x_\nu + a_\nu, \qquad \alpha_\nu\beta^\nu = \beta_\nu\beta^\nu = 0, \qquad \alpha_\nu\alpha^\nu = -1.$$

По найденным решениям, используя преобразование Беклунда или преобразование Лоренца, можно найти целое семейство точных решений.

6. Решение нелинейного уравнения Шредингера [18]

$$p_0 u + \lambda_3 p_a p_a u = \lambda u|u|^m \tag{2.15}$$

ищем в виде

$$u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)f(x_0, x_1, x_2, x_3).$$

Явные решения уравнения (2.15), зависящие от одиннадцати параметров, приведены в [18].

7. Решения уравнения Гамильтона–Якоби (1.6) ищем в виде

$$u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + g(x_0, x_1, x_2, x_3).$$

Приведем явный вид трех простейших решений уравнения (1.6):

1) $$\varphi = \frac{1}{4\lambda}\left(\omega_1^2 + \omega_3^2\right), \qquad \lambda = \lambda_4,$$

$$g = \frac{1}{4\lambda}\left\{2(\alpha_i z_i)\sqrt{2qx_0 + b} + \alpha_i\alpha_i x_0\right\},$$

$$\omega_1 = \sqrt{z_i z_i - \omega_3^2}, \qquad \omega_3 = \frac{\eta_i z_i}{\sqrt{\eta_k\eta_k}}, \qquad z_i = \frac{x_i - \alpha_i x_0 - \beta_i}{\sqrt{2qx_0 + b}},$$

$$\omega_2 = \left|\arcsin\left[\sqrt{\eta_l\eta_l(2qx_0 + b)}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}\left(\eta_1^2 + \eta_3^2\right)^{-1/2}\right]\right| - \frac{(\eta_l\eta_l)^{1/2}}{2q}\ln|2qx_0 + b|,$$

$$\eta_1^2 + \eta_3^2 \neq 0, \qquad \alpha_i = \frac{q^2 V_i + \eta_i(\eta_k V_k) + q\varepsilon_{ijk}\eta_i V_k}{q(q^2 + \eta_k\eta_k)},$$

$$\beta_i = \frac{bV_i - qa_i + \varepsilon_{ijk}\eta_j a_k}{q^2 + \eta_k\eta_k} + \eta_i\frac{\eta_k(bV_k - qa_k)}{q^2(q^2 + \eta_k\eta_k)},$$

a_i, b, q, V_i, η_i — параметры группы $\tilde{G}(1,3)$;

2) $$u = (2\lambda)^{-1}\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_0 + C}, \qquad C$$ — постоянная величина;

3) комплексные решения уравнения (1.6) задаются формулой

$$u = F(\alpha_i x_i - \alpha_i\beta_i x_0) + \frac{1}{2\lambda}\left(\beta_i x_i + \frac{\beta_i\beta_i}{2}x_0\right),$$

F — произвольная функция, $\alpha_i\alpha_i = 0$, $\alpha_i\beta_i \neq 0$, $\beta_i\beta_i \neq 0$.

Новые решения u' уравнения (1.6) по известным решениям (нелинейный принцип суперпозиции) u находятся по формуле

$$u'(t, x_a) = u(t', x_a') - \frac{\theta}{1 - \theta t}\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{4\lambda}, \qquad \theta \text{ — параметр},$$
$$t' = \frac{t}{1 - \theta t}, \qquad x_a' = \frac{x_a}{1 - \theta t}. \tag{2.16}$$

Нетрудно написать и другие формулы типа (2.16) для размножения решений.

8. Решения уравнения Навье–Стокса

$$\frac{\partial u^i}{\partial x_0} + (u_k\nabla_k)u^i + \nabla^i p = \Delta u^i, \qquad \frac{\partial u^i}{\partial x_i} = 0, \tag{2.17}$$

ищем в виде

$$u^i = \varphi^j(\omega)F_j^i(x_0, x_1, x_2, x_3) + f_i(x_0, x_1, x_2, x_3).$$

Одно из решений уравнения (2.17) имеет вид

$$u^i = \left[\frac{c_1}{\omega_1}\ln\omega_1 + \frac{c_2}{2}\omega_1\right]\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i} - c_2\omega_2\frac{\partial\omega_2}{\partial x_i} - c_2\omega_3\frac{\partial\omega_3}{\partial x_i} + \alpha_i,$$

$$p = \frac{c_1}{2qx_0 + b}\left\{2q\ln\omega_1 + \sqrt{\eta_l\eta_l}\,\omega_2 - \frac{c_1}{\omega_1^2}\ln\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)\right\},$$

c_1, c_2 — постоянные величины.

Комплексные решения уравнения (2.21) при $p = 0$ можно представить через произвольную функцию F

$$u^i = \alpha^i F\left\{\beta_k(x_k + \beta_k x_0)\right\} - \beta^i,$$
$$\alpha_i\alpha_i = 0, \qquad \alpha_i\beta_i = 0, \qquad \beta_k\beta_k \neq 0, \qquad i,k = 1,2,3.$$

§ 3. О симметрийных свойствах уравнения Ламе и его дифференциального следствия

Система уравнений Ламе имеет вид

$$\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho_0}\Delta\vec{u} + \frac{\lambda+\mu}{\rho_0}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}, \tag{3.1}$$

$\vec{u} = \vec{u}(t,\vec{x}) = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор смещения, ρ_0, λ, μ — постоянные величины. В рамках лиевского подхода, где базисные элементы алгебры Ли — операторы первого порядка, максимальной алгеброй инвариантности уравнения (3.1) является 8-мерная алгебра [21]. В [5, 22] показано, что в классе интегро-дифференциальных операторов алгеброй инвариантности являются 10- и 15-мерные алгебры Ли. Это означает, что уравнение Ламе не инвариантно ни относительно преобразований Галилея, ни относительно преобразований Лоренца. То есть, для уравнения Ламе не справедлив ни один из известных в настоящее время принципов относительности. Этот факт ставит под сомнение правомерность использования уравнения Ламе в качестве основного уравнения линейной теории упругости. Поэтому вопрос о правиле сложения скоростей упругих волн, описываемых уравнением (3.1), в различных инерциальных системах отсчета не может быть решен.

Некоторые из указанных трудностей, связанных с уравнением Ламе, как будет видно ниже, отсутствуют для системы уравнений, которые являются дифференциальными следствиями системы (3.1). Эти уравнения инвариантны относительно преобразований Лоренца. Действительно, взяв дивергенцию и ротор от (3.1), получим незацепленную систему четырех волновых уравнений

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} = a^2\Delta v_0, \qquad v_0 = \operatorname{div}\vec{u}, \qquad a^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2} = b^2\Delta\vec{v}, \qquad \vec{v} = \operatorname{rot}\vec{u}, \qquad b^2 = \frac{\mu}{\rho_0} \tag{3.3}$$

для функций v_0 и $\vec{v}$.

Очевидно, что уравнения (3.2) и (3.3) инвариантны относительно конформной группы $C(1,3) \supset P(1,3)$. Кроме того, система (3.3) инвариантна относительно группы $GL(3)$, т.е. относительно линейных преобразований

$$v_i' = a_{ik}v_k, \qquad i,k = 1,2,3. \tag{3.4}$$

Таким образом, система уравнений (3.2), (3.3) инвариантна относительно группы $C(1,3)\otimes GL(1)\otimes GL(3)$. Инвариантность уравнений (3.2), (3.3) относительно указанной группы означает, что помимо известных законов сохранения (энергии, импульса, количества движения) существуют новые законы сохранения, обусловленные инвариантностью относительно конформных преобразований и преобразований (3.4).

Последнее утверждение означает, что билинейная форма

$$\langle Q_\alpha \rangle = \int d^3x \left\{ v^*_\mu \frac{\partial (Q_\alpha v)^\mu}{\partial x_0} - \frac{\partial v^*_\mu}{\partial x_0} (Q_\alpha v)^\mu \right\}$$

сохраняется во времени. Q_α — базисный элемент алгебры Ли группы $C(1,3) \otimes GL(1) \otimes GL(3)$. Оператор Q_α отображает множество решений уравнений (3.2), (3.3) в себя.

Приведем явный вид базисных элементов алгебры Ли группы $C(1,3)$, относительно которых система (3.3) инвариантна:

$$\begin{aligned} &P^{\mathrm{I}}_\mu = ig_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}, \qquad J^{\mathrm{I}}_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \\ &K^{\mathrm{I}}_\mu = 2x_\mu D^{\mathrm{I}} - x_\alpha x^\alpha P^{\mathrm{I}}_\mu, \qquad D^{\mathrm{I}} = x_\mu p^\mu + i. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Важно подчеркнуть, что операторы (3.5) порождают такие конечные преобразования, при которых каждая компонента вектора $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ преобразуется независимым путем, т.е. $\vec{v}$ не является вектором ни относительно группы $O(3)$, ни относительно группы $O(1,3)$.

Система (3.3), помимо алгебры (3.5) инвариантна относительно алгебры $\tilde{P}(1,3)$ с такими базисными элементами:

$$\begin{aligned} &P^{\mathrm{II}}_\mu = P^{\mathrm{I}}_\mu, \qquad J^{\mathrm{II}}_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \qquad S_{ab} = \varepsilon_{abc} S_c, \\ &J^{\mathrm{II}}_{0a} = x_0 p_a - x_a p_0 + S_{0a}, \qquad S_{0a} = iS_a, \qquad D^{\mathrm{II}} = D^{\mathrm{I}}, \\ &S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Операторы (3.6) порождают конечные преобразования из группы $\tilde{P}(1,3)$, при которых $\vec{v}$ является действительным вектором относительно группы $O(3)$. При лоренцовых преобразованиях действительный вектор $\vec{v}$ перейдет в комплексный вектор. Последнее свойство лоренцовых преобразований связано с тем, что матрицы S_{0a} — неэрмитовы.

Из уравнений (3.2) и (3.3) следует, что скорость поперечных и продольных волн является постоянной величиной в любых инерциальных системах отсчета. Это обстоятельство противоречит релятивистскому принципу относительности, согласно которому только величина скорости света в однородных средах не зависит от системы отсчета. Эту трудность можно преодолеть, если модифицировать систему (3.2), (3.3) следующим образом:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} = a^2 \Delta v_0 + a_1^2 v_0, \\ &\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = b^2 \Delta \vec{v} + b_1^2 \vec{v}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где постоянные величины a_1 и b_1 характеризуют свойство упругой среды. Скорость волн, описываемых уравнениями (3.7), не будет постоянной в различных инерциальных системах. На физическом языке это означает, что волне в упругих средах следует приписать некую массу (a_1 и b_1).

Укажем еще на одну, более радикальную, возможность преодоления указанных трудностей. Гиперболическую систему уравнений (3.2) и (3.3) заменить на следующую параболическую систему:

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} = \mu_1 \Delta v_0, \qquad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \mu_2 \Delta \vec{v}, \tag{3.8}$$

μ_1, μ_2 — некоторые параметры, характеризующие свойства среды. Эта система удовлетворяет принципу относительности Галилея, поскольку она инвариантна относительно 10-параметрической группы Галилея $G(3)$ [9, 11, 13].

Из приведенного следует, что линейное уравнение Ламе, на основе которого в настоящее время решаются многие динамические задачи теории упругости, должно быть модифицировано так, чтобы в теории упругости выполнялся какой-либо принцип относительности. Кроме указанных нами путей модификации уравнения Ламе наиболее реалистичен нелинейный. Подробное обсуждение этой возможности будет опубликовано в другом месте.

§ 4. О некоторых нерешенных задачах

В этом параграфе укажем задачи, которые представляются автору важными для развития и применения теоретико-алгебраических методов к линейным и нелинейным задачам математической и теоретической физики.

1. Исследовать симметричные свойства и найти частные решения следующих уравнений:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_0} = \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2 + m^2 \right\}^{1/2}, \tag{4.1}$$

$$-\frac{\partial u_2}{\partial x_0} = \left\{ \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2 + m^2 \right\}^{1/2}, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a} + \lambda_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a}\right)^2, \tag{4.3}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x^\mu}\right)^k = \lambda F(u), \qquad k = \frac{1}{2}, 1, 2, n. \tag{4.4}$$

Рассмотреть случаи $\lambda = 0$ и $\lambda \neq 0$, $m = 0$ и $m \neq 0$. Уравнения (4.1), (4.2) представляют собой “корень” из эйконального уравнения. Система (4.1), (4.2) инвариантна относительно дискретных преобразований $(t \to -t)$. Уравнение (4.3) можно рассматривать как нерелятивистское приближение уравнения (4.1). Если $\lambda_2 = 0$, то (4.3) совпадает с уравнением Гамильтона–Якоби.

2. Описать все уравнения

$$\lambda_1 \Box u + \lambda_2 \Box^k u = F_1\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_0}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right), \qquad k = \overline{2, n},$$

$$i\frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} = \Box u(\tau, x) + F_2\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_\mu}\right),$$

где $\Box^k = \Box \cdot \Box \cdots \Box$ — поливолновой оператор, инвариантные относительно групп $\tilde{P}(1,3)$ и $C(1,n)$. Найти частные решения при конкретных F_1 и F_2. Например, $F_1 = F_2 = \exp u$.

3. Найти максимальные алгебры инвариантности (МАИ) и построить в явном виде частные решения следующих уравнений:

$$\Box u + \lambda u + \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_\mu} \frac{\partial u}{\partial x^\mu} = 0,$$

$$\Box u + \lambda_1 \Delta\Delta u + \lambda_2 (\Delta u)^2 + \lambda_3 u^k = 0,$$

$$\Box u + \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_2 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = 0,$$

$$\Box u + \lambda_1 \sin(\Box u) + \lambda_2 \sin\frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

$$\Box u + \lambda_1 u + \lambda_2 \left(1 - \lambda_3 u^2\right) \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \lambda_1 \Delta(u^k) + \lambda_2 (\Delta u)^k = 0,$$

$$\Box u + \lambda_1 u + \lambda_2 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^3 = 0, \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial \tau} = \lambda_1 \Box u(\tau,x) + \lambda_2 \frac{\partial u(\tau,x)}{\partial x_\mu} \frac{\partial u(\tau,x)}{\partial x^\mu} u(\tau,x).$$

Если в уравнениях (4.5), (4.6) функция u зависит только от одной переменной t, то эти уравнения совпадают, соответственно, с классическими уравнениями Ван-дер-Поля и Дюффинга.

4. Построить теоретико-алгебраические основы квантовой механики в основу которой положены уравнения

$$\lambda_3 \left(p_0 + \lambda_1 p_a^2\right) \Psi + \lambda_4 \left(p_0 + \lambda_1 p_a^2\right)^k \Psi + V(x)\Psi = 0, \qquad k = 2,3,\ldots,n, \tag{4.7}$$

$$\left(p_0^2 + \lambda_2 p_a^2 p_a^2\right) \Psi + V(x)\Psi = 0, \tag{4.8}$$

$$\left\{p_0 + \sqrt{\lambda_1 (p_a^2)^2 + \lambda_2} + V(x)\right\} \Psi = 0. \tag{4.9}$$

Описать потенциалы V, при которых уравнения (4.7)–(4.9) инвариантны относительно группы Шредингера $Sch(1,3)$ и некоторых ее подгрупп.

Описать уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_a} \frac{\partial u}{\partial x_a} + \lambda_2 V(x) + \lambda_3 F(u), \tag{4.10}$$

инвариантные относительно группы Шредингера $Sch(1,3)$. Аналогичную задачу решить для уравнений (4.1), (4.2) с потенциалом.

5. Построить точные решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\lambda_1\left\{(\operatorname{grad}u)^2\right\}^{1/2}+\lambda_2\Delta\left\{(\operatorname{grad}u)^2\right\}^{1/2}=0. \tag{4.11}$$

Уравнение (4.11) можно рассматривать как многомерный аналог уравнения Кортвега-де-Фриза (КдФ), В том случав, когда u зависит от двух переменных (t,x) оно совпадает с уравнением КдФ.

6. Описать системы уравнений вида

$$\begin{aligned}&\left(p_0+\lambda_1p_a^2\right)\Psi_i=F_1\left(\Psi,\Psi^*,\frac{\partial\Psi}{\partial x_a},\frac{\partial\Psi^*}{\partial x_a}\right)\Psi_i, \qquad i=1,2,\dots,n,\\ &i\frac{\partial\Psi_i}{\partial\tau}+\lambda_2\Box\Psi_i(\tau,x)+F_2\left(\Psi,\Psi^*,\frac{\partial\Psi}{\partial x_\mu},\frac{\partial\Psi^*}{\partial x^\mu}\right), \qquad \mu=0,1,\dots,n,\end{aligned} \tag{4.12}$$

инвариантные относительно группы Шредингера $Sch(1,3)$ и $Sch(1,1+n)$. Ψ_i, Ψ_i^* — компоненты вектора-столбца $\Psi=(\Psi_1,\Psi_2,\dots,\Psi_n)$ и $\Psi^*=(\Psi_1^*,\Psi_2^*,\dots,\Psi_n^*)$.

$$\Box\Psi_i+F\left(\Psi,\frac{\partial\Psi}{\partial x_\mu}\right)\Psi_i=0.$$

7. Провести детальный теоретико-алгебраический анализ систем дифференциальных уравнений

$$\lambda_1\Box u_\mu+\lambda_2u_\nu\frac{\partial u_\mu}{\partial x^\nu}+\lambda_3\frac{\partial}{\partial x_\mu}(u_\nu u^\nu)+\lambda_4u_\mu=0, \tag{4.13}$$

$$\Box u_\mu=0, \qquad \Box u_\mu u^\mu=0, \tag{4.14}$$

$$K_\mu K^\mu\Psi=F(\Psi,\Psi^*)\Psi, \tag{4.15}$$

$K_\mu=2x_\mu D-x_\nu x^\nu p_\mu+2x^\nu S_{\mu\nu}$ — генератор конформной группы, $D=\frac{1}{2}(x_\nu p^\nu+p_\nu x^\nu)$, $S_{\mu\nu}$ — матрицы, реализующие представления группы Лоренца $O(1,3)$.

8. При каких условиях шесть эйкональных уравнений

$$\frac{\partial E_a}{\partial x_\mu}\frac{\partial E_a}{\partial x^\mu}=\lambda_1, \qquad \frac{\partial H_a}{\partial x_\mu}\frac{\partial H_a}{\partial x^\mu}=\lambda_2, \qquad a=1,2,3, \tag{4.16}$$

для векторов $\vec{E}(E_1,E_2,E_3)$, $\vec{H}(H_1,H_2,H_3)$, преобразующихся по векторному представлению группы Лоренца $D(1,0)$, $D(0,1)$, инвариантны относительно групп $P(1,3)$, $C(1,3)$. По повторяющемуся индексу “a” суммирование не подразумевается.

9. Предложить методы исследования теоретико-групповых свойств следующих интегро-дифференциальных уравнений:

$$(p_0+\lambda p_a)^2u(t,x)=\lambda_1\int d^3x\,F(u^*,u)V(x-y),$$

$$\Box u+\lambda\int d\tau\,d^3y\,F(u^*,u)V(\tau-t,x-y),$$

$$\gamma_\mu p^\mu\Psi=\lambda\int d\tau\,d^3y\,F(\Psi^*,\Psi)V(\tau-t,x-y),$$

$$\left(\frac{d^4}{dt^4}+\lambda\right)^{1/2}\chi(t)+\lambda_1\chi(t)=0,$$

γ_μ — матрицы Дирака. Указать класс функций F и V, при которых уравнения инвариантны относительно групп $\tilde{G}(1,n)$ или $Sch(1,n)$, $\tilde{P}(1,n)$ или $C(1,n)$.

Последнее одномерное интегральное уравнение при $\lambda = 0$ совпадает со стандартным уравнением для гармонического осциллятора. Об одном способе исследования симметрийных свойств таких интегральных уравнений см. [23].

10. Провести теоретико-алгебраический анализ следующих систем уравнений:

$$\begin{gathered}\lambda_1 \Box \vec{E} + \lambda_2 \Box\Box \vec{E}(t,\vec{x}) = 0, \qquad \lambda_1 \Box \vec{H} + \lambda_2 \Box\Box \vec{H}(t,\vec{x}) = 0,\\ \left(\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_a}\right)^2 = 0, \qquad \left(\frac{\partial w_2}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_a}\right)^2 = 0,\end{gathered} \tag{4.17}$$

w_1 и w_2 — инварианты электромагнитного поля;

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \lambda_1(\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} + \lambda_2(\vec{u}\vec{\nabla})\,\mathrm{rot}\,\vec{u} = 0, \qquad \mathrm{div}\,\vec{u} = 0, \tag{4.18}$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial u}{\partial x_0} - \lambda_0 A_0\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_a} - \lambda_1 A_a\right)^2 = \lambda_2,\\ \Box A_\mu = 0, \qquad \mu = \overline{0,3},\end{gathered} \tag{4.19}$$

$$\begin{gathered}i\frac{\partial u}{\partial x_0} - \lambda_0 A_0 + \lambda_1\left(\frac{\partial u}{\partial x_a} - \lambda_2 A_a\right)^2 = 0,\\ \left(p_0 - \lambda_3 p_a^2\right) A_\mu = 0,\end{gathered} \tag{4.20}$$

A_μ — векторный потенциал.

11. С помощью лиевского и нелиевского методов провести детальный теоретико-алгебраический анализ уравнений Максвелла

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,\vec{E}, \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = c\,\mathrm{rot}\,\vec{H} - \vec{j}, \qquad \mathrm{div}\,\vec{D} = 0,$$

со следующими уравнениями связи:

$$\vec{B} = \mu_1 \vec{H} + \mu_2\,\mathrm{rot}\,\vec{E} + \mu_3\,\mathrm{rot}\,\vec{H} + \mu_4\,\mathrm{rot}\left(\vec{E}^2 - \vec{H}^2\right)\vec{H} + \mu_5\,\mathrm{rot}\,(\vec{E}\vec{H})\vec{E},$$

$$\vec{D} = \varepsilon_1 \vec{H} + \varepsilon_2\,\mathrm{rot}\,\vec{E} + \varepsilon_3\,\mathrm{rot}\,\vec{H} + \varepsilon_4\,\mathrm{rot}\left(\vec{E}^2 - \vec{H}^2\right)\vec{E} + \varepsilon_5\,\mathrm{rot}\,(\vec{E}\vec{H})\vec{H},$$

$$B_i = \mu_{ik}^{(1)} E_k + \mu_{ikl}^{(2)} \nabla_k H_l + \mu_{ikl}^{(3)} \nabla_k E_l + \mu_{ikl}^{(4)} E_k E_l + \mu_{ikl}^{(5)} H_k H_l + \mu_{ikl}^{(6)} H_k E_l,$$

$$D_i = \varepsilon_{ik}^{(1)} E_k + \varepsilon_{ikl}^{(2)} \nabla_k E_l + \varepsilon_{ikl}^{(3)} \nabla_k H_l + \varepsilon_{ikl}^{(4)} E_k E_l + \varepsilon_{ikl}^{(5)} H_k H_l + \varepsilon_{ikl}^{(6)} H_k E_l,$$

где $\nabla_k \equiv \frac{\partial}{\partial x_k}$, ε, μ — величины, характеризующие свойство среды, в которой распространяется электромагнитное поле.

12. Описать все системы вида

$$A_{\mu\nu}\left(\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + B_\mu\left(\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)\frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} + C\left(\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = 0,$$

инвариантные относительно: $\tilde{E}(1,n)$, $\tilde{P}(1,n)$, $Sch(1,n)$, $C(1,n)$. Ψ — вектор-функция.

1. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
2. Фущич В.И., О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения, *Теор. и мат. физика*, 1971, **7**, № 1, 3–12.
3. Ибрагимов Н.Х., Группы Ли в некоторых вопросах математической физики, Новосибирск, госуниверситет, 1972, 200 с.
4. Ибрагимов Н.Х., Андерсон Р.Д., Группы касательных преобразований Ли–Беклунда, *ДАН СССР*, 1976, **227**, № 3, 539–542.
5. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных, В кн.: Теоретико-групповые методы в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1978, 5–44.
6. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики, *ДАН СССР*, 1979, **246**, № 4, 846–850.
7. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., "Наука", 1974, 500 с.
8. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И., Асимптотические решения уравнений в частных производных, Киев, Вища школа, 1976, 589 с.
9. Фущич В.И., Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе. I , *Теор. и мат. физ.*, 1970, **4**, № 3, 360–382.
10. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Reduction of the representation of the generalized Poincaré algebra by the Galilei algebra, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1980, **13**, № 11, 2319–2330.
11. Сокур Л.П., Фущич В.И., Об уравнениях движения, инвариантных относительно группы $P(1,n)$. II, *Теор. и мат. физ.*, 1971, **6**, № 3, 348–363.
12. Фущич В.И., Никитин А.Г., Пуанкаре-инвариантные уравнения движения частиц произвольного спина, *Физика элементарных частиц и атомного ядра*, 1978, **9**, вып. 3, 501–653.
13. Фущич В.И., Никитин А.Г., Нерелятивистские уравнения движения для частиц с произвольным спином, *Физика элементарных частиц и атомного ядра*, 1981, **12**, вып. 5, 1167–1219.
14. Фущич В.И., Серов Н.И., О некоторых точных решениях многомерных уравнений типа Лиувилля и эйконала, *Укр. мат. журн.*, 1981, **33**, № 4, 543–549.
15. Фущич В.И. Серов Н.И., О точных решениях уравнения Борна–Инфельда, *ДАН СССР*, 1982, **263**, № 3, 582–586.
16. Серов Н.И., Конформная инвариантность нелинейных волновых уравнений, В кн: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 59–63.
17. Фущич В.И., Серова М.М., Симметрия и точные решения одного класса нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1981, **33**, № 6, 780–784.
18. Fushchych W.I., Moskaliuck S.S., On some exact solutions of the nonlinear Schrödinger equation in three spatial dimension, *Lett. Nuovo Cim.*, 1981, **11**, № 16, 571–576.
19. Фущич В.И., Серов Н.И., Москалюк С.С., О точных решениях нелинейных многомерных волновых уравнений, В кн.: IX Международная конференция по нелинейным колебаниям (Киев, 30 августа – 6 сентября 1981 г.), Тез. докл., Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 338–339.
20. Фущич В.И., Серов Н.И., Точные решения нелинейного волнового уравнения, *Укр. мат. журн.*, 1981, **33**, № 5, 697–702.
21. Чиркунов В.А., Групповые свойства уравнений Ламе, В кн.: Динамика сплошной среды, 1978, вып. 14, 128–130.
22. Фущич В.И., Наконечный В.В., Теоретико-алгебраический анализ уравнений Ламе, *Укр. мат. журн.*, 1980, **32**, № 2, 267–272.
23. Фущич В.И., Об одном способе исследования симметрии свойств интегродифференциальных уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1981, **33**, № 6, 834–838.