Уравнения движения для частиц произвольного спина, инвариантные относительно группы Галилея

А.Г. НИКИТИН, В.И. ФУЩИЧ

The first and the second order differential equations are derived which are invariant under the Galilei group and describe the motion of a particle with arbitrary spin. These equations admit the Lagrangian formulation and describe the dipole, spin-orbital and Darwin couplings of a particle with external electromagnetic field which are considered traditionally as pure relativistic effects. The problem of the motion of spin 1/2 nonrelativistic particle in an external electromagnetic field is exactly solved.

Выведены системы дифференциальных уравнений первого и второго порядков, инвариантные относительно группы Галилея и описывающие движение частицы с произвольным спином. Эти уравнения допускают лагранжеву формулировку и описывают дипольное, спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействия частицы с внешним электромагнитным полем, которые традиционно считались чисто релятивистскими эффектами. Приведены примеры бесконечнокомпонентных уравнений, инвариантных относительно группы Галилея. Точно решена задача о движении нерелятивистской частицы со спином $s = 1/2$ в однородном магнитном поле.

Введение

Релятивистские уравнения движения для частиц с произвольным спином вызывают большой и устойчивый интерес физиков и математиков (см. [1] и цитируемую там литературу). И в то же время имеется удивительно мало публикаций, посвященных уравнениям, инвариантным относительно группы Галилея. Между тем еще в 1954 г. Баргман [2] показал, что с помощью центрального расширения группы Галилея понятие спина частицы может быть последовательно введено и в нерелятивистскую квантовую механику.

В [3, 4] получены галилеевски-инвариантные дифференциальные уравнения первого порядка, описывающие движение нерелятивистской частицы произвольного спина. Эти уравнения описывают дипольное взаимодействие частицы с внешним полем, но не учитывают такие хорошо известные физические эффекты, как спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействия.

В настоящей работе с использованием методики, разработанной в [1, 5, 6] для вывода пуанкаре-инвариантных уравнений, получены галилеевски-инвариантные уравнения движения для частицы с произвольным спином s, позволяющие описать указанные взаимодействия. Это достигнуто с помощью расширения группы Галилея G до группы G^*, включающей преобразование одновременного отражения координат и времени. Полученные уравнения имеют шредингерову форму

$$i\frac{\partial\Psi(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = H_s(\boldsymbol{p})\Psi(t,\boldsymbol{x}), \qquad p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a} \tag{0.1}$$

Теоретическая и математическая физика, 1980, **44**, № 1, С. 34–46.

(где $H_s(\boldsymbol{p})$ — некоторый дифференциальный оператор второго порядка, Ψ — $2(2s+1)$-компонентная волновая функция), допускают лагранжеву формулировку и описывают дипольное, спин-орбитальное, дарвиновское и квадрупольное взаимодействия частицы спина s с внешним электромагнитным полем. Это означает, в частности, что перечисленные взаимодействия, которые обычно вводятся как релятивистские поправки, могут последовательно рассматриваться в рамках нерелятивистской квантовой механики.

В работе получены также галилеевски-инвариантные дифференциальные уравнения первого порядка, описывающие движение частицы с произвольным спином. После минимальной замены $p_\mu \to \partial_\mu - eA_\mu$ эти уравнения также описывают спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействия частицы с полем. Приведен пример бесконечнокомпонентных уравнений, инвариантных относительно группы Галилея.

1. Основные определения и постановка задачи

Группой Галилея G называется совокупность преобразований координат x_a $(a = 1, 2, 3)$ и времени t следующего вида:

$$x_a \to x'_a = R_{ab}x_b + V_a t + b_a, \qquad t \to t' = t + b_0, \tag{1.1}$$

где R_{ab} — оператор трехмерного поворота, V_a и b_μ — произвольные действительные параметры.

Представление группы G однозначно определяется заданием явного вида инфинитезимальных операторов P_μ, J_a и G_a, соответствующих сдвигам, поворотам и собственно галилеевским преобразованиям координат.

Определение. *Будем говорить, что уравнение (0.1) инвариантно относительно группы Галилея, если гамильтониан $H_s = P_0$ и генераторы P_a, J_a, G_a удовлетворяют коммутационным соотношениям*

$$[P_a, P_b] = 0, \qquad [P_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}P_c, \tag{1.2а}$$

$$[G_a, G_b] = 0, \qquad [G_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}G_c, \tag{1.2б}$$

$$[P_a, G_b] = i\delta_{ab}M, \qquad [M, P_\mu] = [M, J_a] = [M, G_a] = 0, \tag{1.2в}$$

$$[H_s, P_a] = [H_s, J_a] = 0, \tag{1.2г}$$

$$[H_s, G_a] = iP_a, \qquad a, b = 1, 2, 3, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{1.2д}$$

Соотношения (1.2) определяют алгебру Ли группы Галилея. Алгебра (1.2) имеет три инвариантных оператора (оператора Казимира)

$$\begin{aligned} &2MC_1 = 2MP_0 - P_aP_a, \qquad C_2 = M, \\ &C_3 = (MJ_a - \varepsilon_{abc}P_bG_c)(MJ_a - \varepsilon_{ade}P_dG_e). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Собственные значения операторов C_1, C_2 и C_3 ассоциируются с внутренней энергией, спином и массой частицы, описываемой инвариантным уравнением (0.1).

Задачу нахождения всех возможных (с точностью до эквивалентности) галилеевски-инвариантных уравнений вида (0.1) мы решим в двух, вообще говоря, неэквивалентных подходах. В подходе I задача формулируется следующим образом: найти все такие гамильтонианы H_s^{I}, чтобы операторы

$$\begin{aligned} &P_0^{\mathrm{I}} = H_s^{\mathrm{I}}, \qquad P_a^{\mathrm{I}} = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \\ &J_a^{\mathrm{I}} = (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p})_a + S_a, \qquad G_a^{\mathrm{I}} = tp_a - mx_a + \lambda_a^{\mathrm{I}} \end{aligned} \tag{1.4}$$

удовлетворяли алгебре Ли расширенной группы Галилея (1.2). Здесь

$$S_c = \begin{pmatrix} s_c & 0 \\ 0 & s_c \end{pmatrix}, \qquad (a,b,c) \ \text{— цикл } (1,2,3); \tag{1.5}$$

s_c — генераторы неприводимого представления $D(s)$ группы $O(3)$, m — параметр, задающий массу частицы, λ_a^{I} — некоторые числовые матрицы, явный вид которых мы определим ниже.

Формулы (1.4) задают общий вид генераторов группы Галилея, соответствующих локальным преобразованиям $2(2s+1)$-компонентной волновой функции при переходе к новой системе координат (1.1),

$$\Psi(t,\boldsymbol{x}) \to \Psi'(t',\boldsymbol{x}') = \exp[if(t,\boldsymbol{x})]D^s(R_{ab},v_a)\Psi(t,\boldsymbol{x}), \tag{1.6}$$

где $D^s(R_{ab},v_a)$ — некоторая числовая матрица, зависящая от параметров преобразования (1.1), $f(t,\boldsymbol{x})$ — фазовый множитель [2]:

$$f(t,\boldsymbol{x}) = mv_aR_{ab}x_b + \frac{1}{2}mv_av_a. \tag{1.7}$$

Мы убедимся ниже, что операторы H_s^{I} всегда могут быть выбраны такими, чтобы уравнение (0.1) было инвариантно также относительно антиунитарного преобразования отражения координат и времени:

$$\Psi(t,\boldsymbol{x}) \to r_1\Psi^*(-t,-\boldsymbol{x}), \qquad r_1^2 = 1, \tag{1.8}$$

где r_1 — некоторая матрица.

В подходе II задача сводится к определению всех возможных дифференциальных операторов H_s^{II} таких, чтобы генераторы

$$\begin{aligned} &P_0^{\mathrm{II}} = H_s^{\mathrm{II}}, \qquad P_a^{\mathrm{II}} = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \\ &J_a^{\mathrm{II}} = (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p})_a + S_a, \qquad G_a^{\mathrm{II}} = tp_a - \sigma_3 mx_a + \lambda_a^{\mathrm{II}} \end{aligned} \tag{1.9}$$

удовлетворяли алгебре (1.2). Здесь σ_3 — одна из матриц Паули

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

I и 0 — $(2s+1)$-рядные квадратные единичная и нулевая матрицы, λ_a^{II} — некоторые операторы (в общем случае зависящие от p_a), которые нам также предстоит найти. Можно показать, что формулы (1.9) задают общий вид генераторов группы G, при котором уравнение (0.1) инвариантно относительно унитарного преобразования $\Psi(t,\boldsymbol{x}) \to r_2\Psi(-t,-\boldsymbol{x})$, $r_2 = \sigma_2$.

Потребуем, чтобы генераторы (1.9) были эрмитовы относительно обычного принятого в квантовой механике скалярного произведения

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x\ \Psi_1^\dagger \Psi_2. \tag{1.10}$$

Существенное отличие представления (1.4) от (1.9) состоит в том, что генераторы H_s^{I}, G_a^{I} неэрмитовы относительно (1.10), но эрмитовы в гильбертовом пространстве со скалярным произведением

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x\ \Psi_1^\dagger \hat{M} \Psi_2, \tag{1.11}$$

где $\hat{M}$ — некоторый положительно-определенный дифференциальный оператор, или относительно индефинитной метрики, когда $\hat{M}$ в (1.11) — некоторая числовая положительно-неопределенная матрица. Явный вид $\hat{M}$ будет найден ниже. Таким образом, усложнение метрики — это та цена, которую приходится платить за локальные преобразования (1.6) волновой функции. Аналогичная ситуация имеет место и для релятивистских уравнений [1].

Потребуем, чтобы H_s^{II} удовлетворял условию

$$\left(H_s^{\mathrm{II}}\right) = \left(m + p^2/2m\right)^2. \tag{1.12}$$

Это эквивалентно требованию, чтобы внутренняя энергия частицы совпадала с ее массой.

Таким образом, задача нахождения галилеевски-инвариантных уравнений вида (0.1) сводится к решению системы соотношений (1.2) для операторов (1.4) и (1.9).

2. Явный вид гамильтонианов H_s^{I}

Решение задачи I приведем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Все возможные (с точностью до эквивалентности) гамильтонианы H_s^{I}, удовлетворяющие совместно с генераторами (1.4) коммутационным соотношениям (1.2), (1.4), задаются формулами*

$$H_s^{\mathrm{I}} = \sigma_3 \eta m - 2i\eta k \sigma_1 \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} + \frac{1}{2m} C_{ab} p_a p_b, \qquad a, b = 1, 2, 3, \tag{2.1а}$$

$$\tilde{H}_s^{\mathrm{I}} = \sigma_1 \tilde{\eta} m + \frac{p^2}{2m} - 2\eta k (\sigma_2 - i\sigma_3)\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}, \tag{2.1б}$$

где $C_{ab} = \delta_{ab} - 2\eta k^2(\sigma_3 + i\sigma_2)(S_a S_b + S_b S_a)$, η, k и $\tilde{k}$ — произвольные параметры.

Доказательство. Определим сначала явный вид матриц λ_a^{I} из (1.4). Из (1.2б) получаем для λ_a^{I} следующие уравнения:

$$[\lambda_a^{\mathrm{I}}, \lambda_b^{\mathrm{I}}] = 0, \qquad [\lambda_a^{\mathrm{I}}, S_b] = i\varepsilon_{abc}\lambda_c^{\mathrm{I}}, \qquad [S_a, S_b] = i\varepsilon_{abc} S_c. \tag{2.2}$$

Из (1.5), (2.2) заключаем, что матрицы λ_a^{I}, не умаляя общности, можно представить в форме

$$\lambda_a^{\mathrm{I}} = k(\sigma_3 + i\sigma_2) S_a, \tag{2.3}$$

где k — произвольный коэффициент.

Найдем общий вид гамильтониана H_s^{I} в представлении, где $\lambda_a^{\mathrm{I}} = 0$. Переход к такому представлению осуществляется с помощью оператора [7]

$$V = \exp\left(i\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{p}/m\right) = 1 + i\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{p}/m. \tag{2.4}$$

Используя (2.4), получаем

$$\begin{aligned} &\left(H_s^{\mathrm{I}}\right)' = VH_s^{\mathrm{I}}V^{-1}, \qquad &&\left(P_a^{\mathrm{I}}\right) = VP_a^{\mathrm{I}}V^{-1} = p_a,\\ &J_a' = VJ_aV^{-1} = J_a, \qquad &&\left(G_a^{\mathrm{I}}\right) = VG_a^{\mathrm{I}}V^{-1} = tp_a - mx_a. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Из (2.5), (1.2) заключаем, что общий вид оператора $\left(H_s^{\mathrm{I}}\right)'$ задается формулой

$$\left(H_s^{\mathrm{I}}\right)' = p^2/2m + A, \qquad A = \sigma_\mu a^\mu m, \tag{2.6}$$

где a_μ — произвольные коэффициенты, причем, не умаляя общности, можно положить $a_0 = 0$.

Можно показать, что с помощью преобразований, не изменяющих общего вида λ_a^{I} (2.3), матрица A (2.6) сводится к одной из следующих форм:

$$A = \sigma_3\eta m \qquad \text{или} \qquad A = \sigma_1\tilde{\eta}m. \tag{2.7}$$

Подставив (2.7) в (2.6), с помощью преобразования, обратного (2.5), приходим к формулам (2.1). Теорема доказана.

Формулы (2.1) задают нерелятивистские гамильтонианы для частиц с произвольным спином. В случае $s = 1/2$, $k = -i$, $\eta = 1$ уравнение (0.1), (2.1a) может быть записано в компактной форме

$$\left(\gamma_\mu p^\mu - m\right)\Psi = \left(1 + \gamma_4 - \gamma_0\right)\frac{p^2}{2m}\Psi, \tag{2.8}$$

где $\gamma_0 = \sigma_3$, $\gamma_a = -2i\sigma_2 S_a$, $\gamma_4 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ — матрицы Дирака.

Отметим, что все гамильтонианы (2.1) принадлежат классу дифференциальных операторов второго порядка, что априори не требовалось. В рамках группы Пуанкаре гамильтонианы частицы с произвольным спином бывают, как правило, интегродифференциальными операторами [1, 5].

Параметры k, η и $\tilde{\eta}$ всегда можно выбрать такими, чтобы уравнения (0.1), (2.1) были инвариантны относительно антиунитарной операции отражения координат и времени (1.8). Необходимым и достаточным условием такой инвариантности является одновременное выполнение соотношений

$$\eta^* = \pm\eta, \qquad k^* = \pm k \qquad \text{или} \qquad \tilde{\eta}^* = \tilde{\eta}, \qquad k^* = k, \tag{2.9}$$

при этом $r_1 = \sigma_1\Delta$, если $\eta^* = -\eta$, $k^* = -k$ или $\tilde{\eta}^* = \eta$, $k^* = k$, $r_1 = \Delta$, если $\eta^* = \eta$, $k^* = k$, $\Delta = \begin{pmatrix} \Delta' & 0 \\ 0 & \Delta' \end{pmatrix}$, где Δ' — матрицы, определяемые с точностью до фазы соотношениями [8]

$$\Delta' s_a = -s_a^*\Delta', \qquad \left(\Delta'\right)^2 = (-1)^{2s}.$$

Таким образом, при ограничениях на параметры η, $\tilde{\eta}$ и k, задаваемых формулами (2.9), уравнения (0.1), (2.1) инвариантны относительно расширенной группы Галилея, включающей преобразования (1.8).

Гамильтонианы (2.1) и операторы (1.4), (2.3) неэрмитовы в скалярном произведении (1.10). Однако эти операторы эрмитовы в метрике (1.11), где $\hat{M}$ — положительно-определенный оператор

$$\hat{M} = \left(V^{-1}\right)^{+} V^{-1} = 1 + [i(k-k^*)\sigma_3 - (k+k^*)\sigma_2]\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}/m + \\ +2(k^*k)(1+\sigma_1)(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2/m^2. \tag{2.10}$$

Кроме того, если η, k и $\tilde{\eta}$ удовлетворяют условиям (2.9), гамильтонианы (2.1) эрмитовы в индефинитной метрике вида (1.11), когда

$$\hat{M} = \xi = \begin{cases} \sigma_3, & \text{если } \eta^* = \eta,\ k^* = k,\ \tilde{\eta}^* = -\eta, \\ \sigma_2, & \text{если } \eta^* = -\eta,\ k^* = -k,\ \tilde{\eta}^* = -\tilde{\eta}. \end{cases} \tag{2.11}$$

Если выполняется (2.11), то уравнения (0.1), (2.1) могут быть получены с помощью вариационного принципа. Соответствующие лагранжианы имеют вид

$$L(t,\boldsymbol{x}) = \frac{i}{2}\left(\bar{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial t}\Psi\right) - \eta m\bar{\Psi}\sigma_3\Psi - \\ -\eta k\left(\bar{\Psi}\sigma_1 S_a\frac{\partial\Psi}{\partial x_a} - \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_a}\sigma_1 S_a\Psi\right) - \frac{1}{2m}\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_a}C_{ab}\frac{\partial\Psi}{\partial x_b}, \tag{2.12а}$$

когда H_s^{I} задается формулой (2.1а), и

$$L(t,\boldsymbol{x}) = \frac{i}{2}\left\{\bar{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial t}\Psi - 2i\tilde{\eta}m\bar{\Psi}\sigma_1\Psi + \right. \\ \left. +2\tilde{\eta}k\left[\bar{\Psi}(\sigma_2 - i\sigma_3)S_a\frac{\partial\Psi}{\partial x_a} - \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_a}(\sigma_2 - i\sigma_3)S_a\Psi\right]\right\} - \frac{1}{2m}\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_a}\frac{\partial\Psi}{\partial x_b}, \tag{2.12б}$$

если гамильтониан имеет вид (2.16). Здесь $\bar{\Psi} = \Psi^{\dagger}\xi$.

Лагранжианы (2.12) являются скалярами относительно преобразований (1.1), (1.6), где

$$D^s(R_{ab}, V_a) = \left(1 + i\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{I}}\cdot\boldsymbol{v}\right)D^s(R_{ab}), \tag{2.13}$$

где $D^s(R_{ab})$ — матрицы, реализующие прямую сумму двух неприводимых представлений $D(s)\oplus D(s)$ группы $SO(3)$.

3. Явный вид гамильтонианов H_s^{II}

Решим задачу II, т. е. найдем дифференциальные операторы, удовлетворяющие совместно с (1.9) соотношениям (1.2), (1.12).

Теорема 2. *Все возможные (с точностью до преобразований эквивалентности) дифференциальные операторы H_s^{II}, которые эрмитовы в метрике (1.10) и удовлетворяют условиям (1.2), (1.9), (1.12), задаются формулами*

$$H_s^{\mathrm{II}} = \sigma_3\left[m + \frac{p^2}{m} - \frac{(S_aS_b + S_bS_a)p_ap_b}{2mS^2}\sin^2\theta_s\right] + \\ +\sigma_2\sqrt{2}\sin\theta_s\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{S} + \sigma_1\left[a_s\frac{p^2}{2m} + \frac{b_s}{4ms^2}(S_aS_b + S_bS_a)p_ap_b\right], \tag{3.1}$$

где

$$a_{1/2}=\sin 2\theta_{1/2},\qquad b_{1/2}=0,\qquad a_1=1,\qquad b_1=\sin 2\theta_1,$$
$$a_{3/2}=b_{3/2}-\frac{5}{4}\sin 2\theta_{3/2}=-\frac{1}{8}\sin 2\theta_{3/2}-\frac{3}{4}\sin\theta_{3/2}\left(1-\frac{1}{9}\sin^2\theta_{3/2}\right)^{1/2},$$
$$a_s=b_s=\theta_s=0,\qquad s>3/2,$$

а $\theta_{1/2}$, θ_1, $\theta_{3/2}$ *— произвольные действительные параметры.*

Доказательство. Прежде всего покажем, что операторы H_s^{II} могут включать производные не выше второго порядка. Действительно, пусть $H_s^{\mathrm{II}}=\sum\limits_{i=0}^{N}H_i$, где H_i содержит производные только i-го порядка, тогда из (1.12) получаем

$$H_NH_N=H_N^+H_N=0\qquad\text{или}\qquad H_N=0,\quad\text{если } N>2.\tag{3.2}$$

Представим искомые дифференциальные операторы H_s^{II} в виде разложения по спиновым матрицам и $2(2s+1)$-рядным матрицам Паули (1.9):

$$H_s^{\mathrm{II}}=\sum_{\mu=0}^{s}\left[a_\mu^s m+b_\mu^s\frac{p^2}{2m}+c_\mu^s\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}+d_\mu^s\frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2}{2m}\right]\sigma_\mu,\tag{3.3}$$

где a_μ^s, b_μ^s, c_μ^s, d_μ^s — произвольные действительные коэффициенты. Используя операторы ортогонального проектирования [1, 5]

$$\Lambda_r=\prod_{r'\neq r}\frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})p^{-1}-r'}{r-r'},\qquad r,r'=-s,-s+1,\ldots,s,$$

$$\Lambda_r\cdot\Lambda_{r'}=\delta_{rr'},\qquad\sum_r\Lambda_r=1,\qquad\sum_r r^l\Lambda_r=\left(\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{p}\right)^l,$$

H_s^{II} можно переписать в виде

$$H_s^{\mathrm{II}}=\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{r=-s}^{s}\left[a_\mu^s m+\left(b_\mu^s+r^2d_\mu^s\right)\frac{p^2}{2m}+rpc_\mu^2\right]\sigma_\mu\Lambda_r.\tag{3.4}$$

Операторы (3.4), очевидно, удовлетворяют условиям (1.2г), (1.10). Потребуем, чтобы выполнялось (1.12). Подставив (3.4) в (1.12), используя ортогональность операторов Λ_r и приравнивая независимые слагаемые, получаем, что a_μ^s, b_μ^s, c_μ^s, d_μ^s должны удовлетворять одной из следующих систем уравнений:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{3}(a_i^s)^2=0,\qquad\sum_{i=1}^{3}\left[r^2\left(c_i^s\right)^2+a_i^s\left(b_i^s+r^2d_i^s\right)\right]=1,\\ \sum_{i=1}^{r}rc_i^s\left(b_i^s+r^2d_i^s\right)=0,\qquad\sum_{i=1}^{3}rc_i^sa_i^s=0,\qquad\sum_{i=1}^{3}\left(b_i^s+r^2d_i^s\right)^2=1,\\ a_0^s=b_0^s=d_0^s=c_0^s=0\end{gathered}\tag{3.5}$$

или

$$a_0^s=b_0^s=1,\qquad d_0^s=c_0^s=a_i^s=c_i^s=d_i^s=0,\qquad i=1,2,3.\tag{3.6}$$

Общее решение уравнений (3.5), (3.4) (с точностью до преобразований эквивалентности, осуществляемых числовыми матрицами) и задается формулами (3.1). Можно показать, что решение (3.6) несовместно с (1.2а), (1.2б) и (1.2д).

Для завершения доказательства теоремы достаточно теперь указать явный вид операторов λ_a^{II}, при котором операторы (1.8) удовлетворяют соотношениям (1.2б), (1.2д). Нетрудно убедиться, что λ_a^{II} можно выбрать в форме

$$\lambda_a^{\mathrm{II}} = [U, \sigma_3 x_a] U^+, \tag{3.7}$$

где

$$U = \left(E + \sigma_3 H_s^{\mathrm{II}}\right) \Big/ \sqrt{2E\left(E + \frac{1}{2}H_s^{\mathrm{II}}\sigma_3 + \frac{1}{2}\sigma_3 H_s^{\mathrm{II}}\right)}, \quad E = m + p^2/2m, \tag{3.8}$$

— оператор, диагонализующий гамильтонианы (3.1) и генераторы (1.8):

$$U^\dagger H_s^{\mathrm{II}} U = \sigma_3 E, \qquad U^\dagger G_a U = t p_a - \sigma_3 m x_a. \tag{3.9}$$

Теорема доказана.

В случае $\theta_{1/2} = \pi/4$ уравнение (0.1), (3.1а) принимает особо простой вид (ср. 2.8):

$$(\gamma_\mu p^\mu + m)\,\Psi = i\gamma_4 \frac{p^2}{2m}\Psi. \tag{3.10}$$

Уравнение (3.10) отличается от релятивистского уравнения Дирака только наличием слагаемого в правой части, которое, очевидно, нарушает инвариантность относительно группы Пуанкаре, но сохраняет инвариантность относительно группы Галилея.

4. Нерелятивистская частица во внешнем электромагнитном поле

Для того, чтобы перейти к описанию движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле, сделаем в уравнении (0.1) обычную замену

$$p_\mu \to \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu, \tag{4.1}$$

где A_μ — четырехвектор-потенциал внешнего поля. В результате приходим к уравнениям

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t, \boldsymbol{x}) = H_s^\alpha(\boldsymbol{\pi}, A_0)\Psi(t, \boldsymbol{x}), \qquad \alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \tag{4.2}$$

где $H_s^\alpha(\boldsymbol{\pi}, A_0)$ — один из гамильтонианов, полученных из (2.1), (3.1) заменой (4.1):

$$\begin{gathered} H_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi}, A_0) = \sigma_3\eta m + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - 2i\eta k\sigma_1 \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi} + eA_0 - \\ -(\sigma_3 + i\sigma_2)\frac{\eta k^2}{m}\left[(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 + \frac{1}{2}e\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}\right], \end{gathered} \tag{4.3а}$$

$$\tilde{H}_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi}, A_0) = \sigma_3\tilde{\eta} m + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - 2\eta k(\sigma_2 - i\sigma_3)\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi} + eA_0, \tag{4.3б}$$

$$
\begin{aligned}
H_s^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\pi}, A_0) = \sigma_3 \left[m + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - \frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2}{ms^2}\sin^2\theta_s - e\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}}{2ms^2}\sin^2\theta_s \right] + \\
+\sigma_1 \left[a_s\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + b_s\frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2}{2ms^2} + eb_s\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}}{4ms^2}\right] + \sigma_2\sqrt{2}\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{s}\sin\theta_s + eA_0.
\end{aligned}
\tag{4.3в}
$$

В формулах (4.3) $H_a = -i\varepsilon_{abc}\pi_b\pi_c$ — напряженность магнитного поля.

Уравнения (4.2), (4.3), очевидно, инвариантны относительно калибровочных преобразований. Кроме того, как и до введения взаимодействия уравнения (4.3) с гамильтонианами (4.3а), (4.3б) инвариантны относительно преобразований из группы Галилея (1.6), (2.13), если вектор-потенциал преобразуется по закону [3]

$$
A_b \to A_b' = R_{bc}A_c, \qquad A_0 \to A_0' = A_0 + v_aA_a. \tag{4.4}
$$

Анализ уравнений (4.2) удобно производить в представлении, в котором операторы (4.3) квазидиагональны (т.е. коммутируют с одной из σ-матриц). Как и в случае уравнения Дирака, гамильтонианы (4.3) могут быть диагонализованы только приближенно. Ниже мы осуществим такую диагонализацию и представим гамильтониан частицы с произвольным спином в виде ряда по степеням $1/m$, удобном для вычислений с использованием теории возмущений.

Диагонализация гамильтонианов (4.3) с точностью до членов порядка $1/m^2$ осуществляется с помощью операторов

$$
\begin{aligned}
&V^\alpha = \exp\left(iC_s^\alpha + \sigma_3\frac{1}{2\eta^\alpha m}\frac{\partial B_s^\alpha}{\partial t}\right)\exp\left(iB_s^\alpha\right)\exp\left(iA_s^\alpha\right), \qquad \alpha = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\\
&\tilde{V}^\alpha = \exp\left(i\tilde{C}_s^\alpha\right)\exp\left(i\tilde{B}_s^\alpha\right)\exp\left(i\tilde{A}_s^\alpha\right),
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&A_s^{\mathrm{I}} = -i\sigma_2 k\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}, \qquad A_s^{\mathrm{II}} = -\sigma_1\frac{\sqrt{2}\sin\theta_s}{2ms}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}, \qquad \eta^{\mathrm{I}} = \eta, \quad \eta^{\mathrm{II}} = 1,\\
&B_s^{\mathrm{I}} = \sigma_1\frac{k}{2m^2}\left\{\frac{1}{2\eta}[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}^2] + ik[2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 + e\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}] + \frac{e}{\eta}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}\right\},\\
&C_s^{\mathrm{I}} = \sigma_2\frac{k^2}{m^2}\left\{-\frac{2ik}{3}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 + iek[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}]_+ + [(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2, eA_0]\right\},\\
&B_s^{\mathrm{II}} = \sigma_2\frac{1}{4m^2}\left\{a_s\boldsymbol{\pi}^2 + \frac{b_s}{2s^2}[2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 + e\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}] + \frac{e\sqrt{2}\sin\theta_s}{s}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}\right\},\\
&C_s^{\mathrm{II}} = \sigma_1\frac{1}{8m^3}\left\{\frac{\sqrt{2}\sin\theta_s}{s}\left[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}^2 - \frac{e\sin^2\theta_s}{s^2}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}\right]_+ - \right.\\
&\qquad \left. -\frac{4\sqrt{2}\sin^3\theta_s}{s^3}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^3 - iea_s[\boldsymbol{\pi}^2, A_0] - \frac{ieb_s}{s^2}[(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2, A_0]\right\},\\
&\tilde{A}_s^{\mathrm{I}} = -ik(\sigma_2 - i\sigma_3)\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}, \qquad \tilde{B}_s^{\mathrm{I}} = \frac{k}{2\eta m^2}(\sigma_2 - i\sigma_3)\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E},\\
&\tilde{C}_s^{\mathrm{I}} = -\frac{ik}{4\tilde{\eta}m^3}(\sigma_2 - i\sigma_3)[\boldsymbol{\pi}^2, \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}] - \frac{i}{2\tilde{\eta}m}\frac{\partial\tilde{B}_s^{\mathrm{I}}}{\partial t}.
\end{aligned}
$$

Непосредственным вычислением получаем

$$\begin{gathered}[H_s^\alpha(\boldsymbol{\pi},A_0)]'=V^\alpha H_s^\alpha(\boldsymbol{\pi},A_0)(V^\alpha)^{-1}=A^\alpha m+B^\alpha\left(\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m}+eA_0\right)+\\
+\sigma_3eC^\alpha\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}}{m}+\frac{e}{4m^2}D^\alpha\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\pi})+\frac{e}{6m^2}F^\alpha s(s+1)\operatorname{div}\boldsymbol{E}+\\
+\frac{1}{12m^2}G^\alpha Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b}+\frac{n^\alpha}{m^2}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi})+\frac{L^\alpha e}{m^2}Q_{ab}\frac{\partial H_a}{\partial x_b}+o\left(\frac{1}{m^3}\right),\\
\left[\tilde{H}_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi},A_0)\right]'=\tilde{V}^{\mathrm{I}}\tilde{H}_s^{\mathrm{I}}\left(\tilde{V}^{\mathrm{I}}\right)^{-1}=\sigma_3\tilde{\eta}m+\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m}+eA_0+o\left(\frac{1}{m^3}\right).\end{gathered}\tag{4.6}$$

где

$$\begin{gathered}A^{\mathrm{I}}=\sigma_3\eta,\qquad B^{\mathrm{I}}=1,\qquad C^{\mathrm{I}}=-\eta k^2,\\
-D^{\mathrm{I}}=F^{\mathrm{I}}=G^{\mathrm{I}}=k^2,\quad n^{\mathrm{I}}=-3L^{\mathrm{I}}=\eta k^3,\end{gathered}\tag{4.7а}$$

$$\begin{gathered}A^{\mathrm{II}}=B^{\mathrm{II}}=\sigma_3,\quad -C^{\mathrm{II}}=D^{\mathrm{II}}=-F^{\mathrm{II}}=-G^{\mathrm{II}}=\frac{\sin^2\theta_s}{2s^2},\\
n^{\mathrm{II}}=\frac{\sqrt{2}\sin\theta_s}{2s}\left(-a_s+\frac{b_s}{4s^2}\right),\qquad L^{\mathrm{II}}=\frac{\sqrt{2}b_s\sin\theta_s}{24s^2},\\
Q_{ab}=(e/2)\{3[S_a,S_b]_+-2\delta_{ab}s(s+1)\}.\end{gathered}\tag{4.7б}$$

Операторы (4.6), (4.7) содержат слагаемые, соответствующие дипольному ($\sim\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}$), спин-орбитальному ($\sim\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\pi})$), квадрупольному ($\sim Q_{ab}\partial E_a/\partial x_b$) и дарвиновскому ($\sim\operatorname{div}\boldsymbol{E}$) взаимодействиям частицы с полем. Два последних слагаемых в (4.6), (4.7) можно интерпретировать как магнитное спин-орбитальное и магнитное квадрупольное взаимодействия. Аналогичную структуру имеют приближенные гамильтонианы, полученные из релятивистских уравнений [5, 6]. В случае $s=1/2$, $\eta=1$, $k^2=-1$, $\theta_s=\pi/4$ семь первых слагаемых в (4.6), (4.7) совпадают с гамильтонианом Фолди–Вуйтхойзена [9], полученным при диагонализации уравнения Дирака. Таким образом, в приближении $1/m^2$ нерелятивистские уравнения (4.2), (4.6), (4.7) описывают движение частицы со спином $s=1/2$ во внешнем электромагнитном поле с той же точностью, что и релятивистское уравнение Дирака.

Отметим, что для некоторых классов внешних полей уравнения (4.2) могут быть решены точно. Приведем без доказательств собственные значения гамильтониана (4.3б) для частицы со спином, взаимодействующей с постоянным однородным магнитным полем [10]

$$\begin{gathered}H_{1/2}^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\pi},A_0)\Psi_{\varepsilon s_3np_3}=E_{\varepsilon s_3np_3}\Psi_{\varepsilon s_3np_3},\\
E_{\varepsilon s_3np_3}=\varepsilon\left\{m^2+\xi^2+p_3^2+\frac{\left(\xi^2+p_3^2\right)^2}{4m^2}+\left(\frac{eH_3}{2m}\right)^2+\right.\\
\left.+\varepsilon\frac{eH_3}{m}\left[m^2\cos^2 2\theta_{1/2}+\xi^2+\frac{\left(\xi^2+p_3^2\right)^2}{4m^2}\right]^{1/2}\right\}^{1/2},\end{gathered}$$

где $\xi^2=(2n+1)eH_3$, $H_1=H_2=0$, $n=0,1,2,\ldots$, $\varepsilon=\pm1$, $s_3=\pm1/2$.

5. Уравнения первого порядка

Остановимся вкратце на задаче описания галилеевски-инвариантных дифференциальных уравнений вида

$$F\Psi = 0, \qquad F = \beta_\mu p^\mu + \beta_5 m, \qquad p_\mu - i\partial/\partial x_\mu, \tag{5.1}$$

где β_μ, β_5 — некоторые числовые матрицы.

Уравнение (5.1) по определению инвариантно относительно группы Галилея, если выполняются соотношения

$$[F, Q_A] = f_A F, \qquad A = 1, 2, \ldots, 10, \tag{5.2}$$

где через Q_A обозначен произвольный генератор группы $G : \{Q_A\} = \{P_0, P_a, G_a, J_a\}$, а через f_A — некоторые операторы, определенные на множестве решений уравнения (5.1).

Полагая $f_A \equiv 0$ и выбирая генераторы P_μ, J_a, G_a в форме (1.4), где S_a и λ_a — произвольные матрицы (что соответствует локальным преобразованиям Галилея (1.6) для функции Ψ), получаем из (5.2) следующую систему перестановочных соотношений для матриц β_μ, β_4, λ_a, S_a:

$$\begin{aligned} &[S_a, \beta_5] = [S_a, \beta_0] = 0, \qquad [S_a, \beta_b] = i\varepsilon_{abc}\beta_c, \\ &[\lambda_a, \beta_5] = i\beta_a, \qquad [\lambda_a, \beta_b] = i\delta_{ab}\beta_0, \qquad [\lambda_a, \beta_0] = 0, \end{aligned} \tag{5.3}$$

где λ_a, S_a — матрицы, удовлетворяющие соотношениям (2.2).

Таким образом, задача описания галилеевски-инвариантных уравнений вида (5.1) сводится в нашей постановке к нахождению матриц S_a, λ_a, β_5, β_a, удовлетворяющих условиям (2.2), (5.3).

Приведем частное решение системы (2.2), (5.3), позволяющее получить уравнения вида (5.1) для нерелятивистских частиц произвольного спина. Обозначим через S_{kl}, $k, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, генераторы неприводимого представления группы $SO(6)$. Тогда матрицы

$$\begin{aligned} &S_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}S_{bc}, \qquad \lambda_a = \frac{1}{2}(iS_{6a} + S_{5a}), \qquad a = 1, 2, 3 \\ &\beta_a = 2S_{4a}, \qquad \beta_0 = iS_{46} + S_{45}, \qquad \beta_5 = 2(I + iS_{46} - S_{45}) \end{aligned} \tag{5.4}$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям (2.2), (5.3), т.е. формулы (5.4) дают решение поставленной задачи.

Полагая в (5.1), (5.4) $S_{kl} = (i/4)[\gamma_k, \gamma_l]$, $S_{6k} = \frac{1}{2}\gamma_k$, где γ_k — эрмитовы четырехрядные матрицы Дирака, получаем уравнение, эквивалентное уравнению Леви–Леблонда [3] для частицы со спином $s = 1/2$. Выбирая иные представления алгебры Ли группы $SO(6)$, получаем из (5.1), (5.4) уравнения для частиц с другими значениями спина.

Уравнения (5.1), (5.4), как и уравнения второго порядка, рассмотренные выше, позволяют описать спин-орбитальное взаимодействие частицы с внешним полем. Так, например, полагая $S_{kl} = i[\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_l]$, $S_{6k} = \hat{\beta}_k$, где $\hat{\beta}_k$ — десятирядные матрицы Кеммера–Деффина–Петье (которые могут быть выбраны, скажем, в форме, приведенной в монографии [12]), и делая в (5.1) замену $p_\mu \to \pi_\mu$, где $\pi_a = p_a$,

$\pi_0 = p_0 - eA_0$, мы получаем после несложных, но несколько громоздких вычислений, уравнение для трехкомпонентной волновой функции $\Psi^{(3)}$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi^{(3)} = H\Psi^{(3)}, \qquad H = m + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + eA_0 + e\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}}{4m}, \tag{5.5}$$

где S_a — спиновые матрицы для $s=1$. Посредством преобразования $H \to H' = VHV^{-1}$, где $V = \exp(i\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}/m)$, гамильтониан (5.5) приводится к форме, аналогичной (4.6),

$$\begin{gathered} H' = \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + eA_0 - \frac{1}{32m^2}\left[\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\pi}) - \right. \\ \left. -\frac{1}{3}Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b} - \frac{4}{3}\operatorname{div}\boldsymbol{E}\right] + o\left(\frac{1}{m^3}\right). \end{gathered} \tag{5.6}$$

Оператор (5.6), как и (4.6), (4.7), содержит слагаемые, описывающие дарвиновское, спин-орбитальное и квадрупольное взаимодействия частицы с внешним электрическим полем.

6. Заключительные замечания

1. Выше получены системы дифференциальных уравнений первого и второго порядков, которые инвариантны относительно преобразований Галилея и калибровочных преобразований и описывают дипольное, квадрупольное, спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействия частицы произвольного спина с внешним электромагнитным полем. Перечисленные взаимодействия, таким образом, не являются чисто релятивистскими эффектами и могут последовательно рассматриваться в рамках нерелятивистской квантовой механики (см. также [10, 11]).

2. Уравнения (2.8), (3.10) имеют такую структуру, что левая часть их совпадает с релятивистским уравнением Дирака, а в правой части содержатся члены, которые нарушают симметрию относительно группы Пуанкаре и обеспечивают инвариантность уравнения относительно группы Галилея. Такой способ нарушения пуанкаре-симметрии является одним из возможных подходов для получения галилеевски-инвариантных уравнений движения частиц с произвольным спином. Так, исходя из релятивистских уравнений без лишних компонент, выведенных в [1, 6], с помощью добавления членов, нарушающих пуанкаре-инвариантность, но сохраняющих симметрию относительно группы $E(3)$, можно получить уравнения (1.2), (2.1a).

3. Уравнения вида (0.1) и (5.1), конечно, не исчерпывают всех возможных линейных дифференциальных уравнений, инвариантных относительно группы Галилея. Так, например, для описания движения нерелятивистской частицы со спином $s=1$ можно использовать галилеевски-инвариантный аналог уравнений Прока

$$\begin{aligned} &\left(2mp_0 - p^2\right)\Psi_\nu = 0, \qquad \nu = 0,1,2,3, \\ &m\Psi_0 - p_a\Psi_a, \qquad a = 1,2,3. \end{aligned}$$

4. Неэрмитовость генераторов (1.4) относительно обычного скалярного произведения (1.10) обусловлена неэрмитовостью конечномерных представлений алгебры (2.2) (которая изоморфна алгебре Ли группы Евклида $E(3)$). Аналогичная ситуация имеет место и в релятивистской теории, где на решениях конечномерных по спиновым индексам уравнений движения всегда реализуются неунитарные представления однородной группы Лоренца, а требование унитарности этих представлений приводит к бесконечнокомпонентным уравнениям. Поэтому представляет интерес рассмотреть бесконечнокомпонентные уравнения, инвариантые относительно группы Галилея. Приведем пример таких уравнений.

Обозначим через $\tilde{S}_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ генераторы унитарного бесконечномерного представления группы $O(1,5)$. Тогда уравнение в форме (5.1), (5.4), где $S_{kl} = \tilde{S}_{kl}$ $(k, l = 1, 2, 3, 4, 5)$, $S_{6k} = i\tilde{S}_{0k}$, инвариантно относительно группы Галилея.

1. Фущич В.И., Никитин А.Г., *ЭЧАЯ*, 1978, **9**, 501.
2. Bargman V., *Ann. Math.*, 1954, **59**, 1;
   Hammermesh M., *Ann. Phys.*, 1960, **9**, 518.
3. Levi-Leblond J.-M., *Commun. Math. Phys.*, 1967, **6**, 286.
4. Hurley W.J., *Phys. Rev. D*, 1974, **7**, 1185.
5. Фущич В.И., Грищенко А.Л., Никитин А.Г., *ТМФ*, 1971, **8**, 192.
6. Никитин А.Г., Фущич В.И., *ТМФ*, 1978, **34**, 319.
7. Никитин А.Г., Салогуб В.А., *УФЖ*, 1975, **20**, 1730.
8. Foldy L.L., *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 568.
9. Foldy L.L., Wouthuysen S.A., *Phys. Rev.*, 1950, **68**, 29.
10. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Salogub V.A., *Lett. Nuovo Cim.*, 1975, **14**, 483;
    Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cim.*, 1976, **16**, 81.
11. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Salogub V.A., *Rep. Math. Phys.*, 1978, **13**, 175.
12. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б., Квантовая электродинамика, Наука, 1969, 176.