Инвариантные системы уравнений в обобщенной механике

В.И. ФУЩИЧ, Ю.Н. СЕГЕДА, Г.А. РЕДЧЕНКО

Введение. М.В. Остроградский [1] обобщил вариационный принцип Гамильтона на случай, когда лагранжиан L зависит от обобщенных координат q_i, обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ и высших производных $\ddot{q}_i, \dots, q_i^{(r)}$, и одновременно решил задачу о приведении соответствующей системы уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} - \dots + (-1)^r \frac{d^r}{dt^r}\frac{\partial L}{\partial q_i^{(r)}} = 0, \tag{1}$$

N — число степеней свободы, к каноническому виду.

Уравнения (1) в общем случае порядка $2r$.

В настоящее время механику материальных систем, описываемую уравнениями вида (1), принято называть обобщенной механикой Лагранжа–Остроградского (ЛО).

Уравнения вида (1) встречаются, например, в задаче о взаимодействии двух точечных зарядов в электродинамике [2, 3]. Это говорит о том, что механика ЛО является неформальным обобщением механики Лагранжа и может иметь различные физические приложения.

В работе [4] поставлена задача об исследовании теоретико-групповой структуры механики ЛО. В данной статье изучим групповые свойства уравнений вида (1) четвертого порядка, описывающих движение системы двух частиц.

Более точно задача формулируется следующим образом. Рассмотрим уравнения 4-го порядка

$$\frac{\partial L}{\partial q_i^\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^\alpha} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i^\alpha} = 0, \tag{1$'$}$$

q_i^α — обобщенные координаты частиц, $\alpha = 1, 2$; $i = 1, 2, \dots, N$.

Пусть система $(1')$ разрешена относительно старших производных. В качестве обобщенных координат системы выберем декартовы координаты. Обозначая координаты первой частицы символом x_i, а второй y_j, систему уравнений $(1')$ можно записать в виде

$$S: \begin{cases} x_i^{(4)} = f_i^I\left(t, \vec{x}, \vec{y}, \dot{\vec{x}}, \dot{\vec{y}}, \ddot{\vec{x}}, \ddot{\vec{y}}, \dddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{y}}\right), \\ y_i^{(4)} = f_i^{II}\left(t, \vec{x}, \vec{y}, \dot{\vec{x}}, \dot{\vec{y}}, \ddot{\vec{x}}, \ddot{\vec{y}}, \dddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{y}}\right). \end{cases} \tag{2}$$

Пусть заданы преобразования независимых и зависимых переменных

$$t \to t' = \varphi(t, \vec{x}, \vec{y}; a), \qquad \vec{x} \to \vec{x}\,' = \psi(t, \vec{x}, \vec{y}; a), \qquad \vec{y} \to \vec{y}\,' = \chi(t, \vec{x}, \vec{y}; a), \tag{3}$$

образующие некоторую однопараметрическую группу G.

Украинский математический журнал, 1980, **32**, № 4, С. 569–576.

Определение. *Уравнения (2) назовем инвариантными относительно преобразований (3), если выполняются соотношения*

$$x_i^{(4)'} = f_i^I\left(t', \vec{x}\,', \vec{y}\,', \dot{\vec{x}}\,', \dot{\vec{y}}\,', \ldots, \dddot{\vec{y}}\,'\right), \quad y_i^{(4)'} = f_i^{II}\left(t', \vec{x}\,', \vec{y}\,', \dot{\vec{x}}\,', \dot{\vec{y}}\,', \ldots, \dddot{\vec{y}}\,'\right). \quad (2')$$

Наша задача состоит в следующем: описать всевозможные функции f_i^I, f_i^{II}, при которых система (2) инвариантна относительно смещений координат и времени, масштабных и проективных преобразований, а также преобразований Галилея. Тот факт, что система (4) содержит уравнения четвертого порядка, позволяет найти новый класс преобразований, оставляющих уравнения (4) инвариантными, подобно тому, как уравнения второго порядка допускают преобразования Галилея. Эти новые преобразования соответствуют переходу к неинерциальным системам отсчета. Естественно поэтому назвать их обобщенными преобразованиями Галилея.

Для решений поставленной задачи воспользуемся понятием продолженного оператора группы [5]

$$\tilde{X} = \xi_t \frac{\partial}{\partial t} + \xi_{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \xi_{y_i}\frac{\partial}{\partial y_i} + \xi_{\dot{x}_i}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} + \cdots + \xi_{y_i^{(4)}}\frac{\partial}{\partial y_i^{(4)}}, \quad (4)$$

где

$$\xi_t = \frac{dt'}{da}\Big|_{a=0}, \qquad \xi_{x_i} = \frac{dx_i'}{da}\Big|_{a=0}, \quad \ldots, \quad \xi_{x_i}^{(r)} = \frac{dx_i^{(r)'}}{da}\Big|_{a=0}, \quad \ldots$$

Как показано в [5], необходимым и достаточным условием инвариантности уравнений (2) относительно группы преобразований (3) является выполнение равенства

$$\tilde{X}S|_S = 0, \qquad S \equiv \begin{cases} x_i^{(4)} - f_i^I = 0, \\ y_i^{(4)} - f_i^{II} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Условие (5) означает, что искомая система уравнений (2) образует инвариантное дифференциальное многообразие группы преобразований (3).

1. Инвариантность относительно сдвигов и масштабных преобразований. 1. Для простоты изложения, здесь и в последующих разделах ограничимся одной пространственной координатой, т.е. исследуем систему уравнений вида

$$\begin{aligned} x_1^{(4)} &= f_1\left(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dddot{x}_1, \dddot{x}_2\right), \\ x_2^{(4)} &= f_2\left(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dddot{x}_1, \dddot{x}_2\right), \end{aligned} \quad (2'')$$

где $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, и т.д. Обобщение на случай большего числа пространственных координат очевидно.

Рассмотрим преобразование смещения времени

$$t' = t + a, \qquad x_1' = x_1, \qquad x_2' = x_2. \quad (3')$$

В этом случае согласно (4) имеем $\xi_t = 1$, $\xi_{x_1} = \xi_{x_2} = 0$; $\xi_{\dot{x}_1} = \xi_{\dot{x}_2} = \cdots = \xi_{x_1^{(4)}} = \xi_{x_2^{(4)}} = 0$, и оператор $\tilde{X}$ имеет весьма простой вид: $\tilde{X} = \dfrac{\partial}{\partial t}$. Условие инвариантности (5) сводится к уравнениям: $\dfrac{\partial f_1}{\partial t} = 0$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial t} = 0$. Следовательно, уравнения (2″) инвариантны относительно временных трансляций, если функции f_1 и f_2 не зависят от времени:

$$f_\alpha \equiv f_\alpha\left(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dddot{x}_2\right), \qquad \alpha = 1, 2. \tag{6}$$

В случае пространственных трансляций $t' = t$, $x_1' = x_1 + a$, $x_2' = x_2 + a$, имеем

$$\xi_t = 0, \quad \xi_{x_1} = \xi_{x_2} = 1, \quad \xi_{\dot{x}_1} = \xi_{\dot{x}_2} = \cdots = \xi_{x_2^{(4)}} = 0, \tag{3″}$$

вследствие чего условие (5) сводится к системе уравнений

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_2} = 0, \qquad \alpha = 1, 2,$$

общее решение которой, очевидно, следующее:

$$f_\alpha \equiv f_\alpha\left(t, x_1 - x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dddot{x}_2\right), \qquad \alpha = 1, 2. \tag{7}$$

Таким образом, уравнения (2″) инвариантны относительно преобразования смещения координат в том и только том случае, если функции f_α зависят от разности координат.

2. Рассмотрим масштабные преобразования координат:

$$t' = t, \qquad x_1' = a x_1, \qquad x_2' = a x_2, \tag{3‴}$$

где a — вещественный параметр.

Коэффициенты оператора $\tilde{X}$ в этом случае равны:

$$\xi_t = 0, \quad \xi_{x_1} = x_1, \quad \xi_{x_2} = x_2, \quad \xi_{\dot{x}_1} = \dot{x}_1, \quad \xi_{\dot{x}_2} = \dot{x}_2, \quad \xi_{\ddot{x}_1} = \ddot{x}_1, \quad \xi_{\ddot{x}_2} = \ddot{x}_2,$$
$$\xi_{\dddot{x}_1} = \dddot{x}_1, \quad \xi_{\dddot{x}_2} = \dddot{x}_2, \quad \xi_{x_1^{(4)}} = x_1^{(4)}, \quad \xi_{x_2^{(4)}} = x_2^{(4)}.$$

Если подставить оператор $\tilde{X}$ с этими коэффициентами в уравнение (5), то в качестве условия инвариантности получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_2} + \dot{x}_1 \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_1} + \dot{x}_2 \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_2} + \ddot{x}_1 \frac{\partial f_\alpha}{\partial \ddot{x}_1} + \ddot{x}_2 \frac{\partial f_\alpha}{\partial \ddot{x}_2} + \\ &\quad + \dddot{x}_1 \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dddot{x}_1} + \dddot{x}_2 \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dddot{x}_2} = f_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, \end{aligned} \tag{8}$$

Общее решение системы (8) представляется в виде

$$F_\alpha\left(t, \frac{x_1}{x_2}, \frac{x_1}{\dot{x}_1}, \frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2}, \frac{x_1}{\ddot{x}_1}, \frac{x_2}{\ddot{x}_2}, \frac{x_1}{\dddot{x}_1}, \frac{x_2}{\dddot{x}_2}, \frac{x_1}{f_1}, \frac{x_2}{f_2}\right) = 0, \tag{9}$$

где F_α — произвольные дифференцируемые функции.

Если, в частности, систему (9) разрешить относительно f_1 и f_2, то получим такое представление для f_α: $f_\alpha = x_a \Phi_\alpha\left(t, \dfrac{x_1}{x_2}, \dfrac{x_1}{\dot{x}_1}, \dfrac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2}, \dfrac{x_1}{\ddot{x}_1}, \dfrac{x_2}{\ddot{x}_2}, \dfrac{x_1}{\dddot{x}_1}, \dfrac{x_2}{\dddot{x}_2}\right)$, где Φ_α — произвольные дифференцируемые функции.

Результат этого раздела сформулируем в виде утверждения.

Теорема 1. *Для того, чтобы уравнение (2″) было инвариантным относительно масштабного преобразования координат, необходимо и достаточно, чтобы правые части уравнений удовлетворяли условиям (9), где F_1 и F_2 — произвольные дифференцируемые функции.*

3. Пусть задано масштабное преобразование времени

$$t' = bt, \qquad x_1' = x_1, \qquad x_2' = x_2, \tag{3^{IV}}$$

b — вещественный параметр.

Согласно (4) для оператора $\tilde{X}$ имеем выражение

$$\tilde{X} = t\frac{\partial}{\partial t} - \dot{x}_1\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} - \dot{x}_2\frac{\partial}{\partial \dot{x}_2} - 2\ddot{x}_1\frac{\partial}{\partial \ddot{x}_1} - 2\ddot{x}_2\frac{\partial}{\partial \ddot{x}_2} - \\ -3\dddot{x}_1\frac{\partial}{\partial \dddot{x}_1} - 3\dddot{x}_2\frac{\partial}{\partial \dddot{x}_2} - 4x_1^{(4)}\frac{\partial}{\partial x_1^{(4)}} - 4x_2^{(4)}\frac{\partial}{\partial x_2^{(4)}},$$

а в качестве условия инвариантности (5) получим систему уравнений в частных производных первого порядка:

$$\tilde{X} = t\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} - \dot{x}_1\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_1} - \dot{x}_2\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_2} - 2\ddot{x}_1\frac{\partial f_\alpha}{\partial \ddot{x}_1} - 2\ddot{x}_2\frac{\partial f_\alpha}{\partial \ddot{x}_2} - \\ -3\dddot{x}_1\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dddot{x}_1} - 3\dddot{x}_2\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dddot{x}_2} = -4f_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, \tag{10}$$

общее решение которой имеет вид

$$\Phi_\alpha\left(x_1, x_2, \dot{x}_1 t, \dot{x}_2 t, \ddot{x}_1 t^2, \ddot{x}_2 t^2, \dddot{x}_1 t^3, \dddot{x}_2 t^3, f_1 t^4, f_2 t^4\right) = 0, \tag{11}$$

где Φ_α — произвольные дифференцируемые функции.

Итак, мы пришли к такому результату.

Теорема 2. *Для инвариантности уравнений (2″) относительно масштабного преобразования времени (3^{IV}) необходимо и достаточно, чтобы их правые части удовлетворяли уравнениям (11), где Φ_α — произвольные дифференцируемые функции.*

Если уравнения (11) разрешимы относительно f_1 и f_2, то

$$f_\alpha = t^{-4}\Psi_\alpha\left(x_1, x_2, \dot{x}_1 t, \dot{x}_2 t, \ddot{x}_1 t^2, \ddot{x}_2 t^2, \dddot{x}_1 t^3, \dddot{x}_2 t^3\right), \tag{11'}$$

т. е. уравнения (2″) инвариантны относительно масштабного преобразования времени, если правые части уравнений — однородные по t функции порядка $m = -4$ и имеют представление (11′), где Ψ_α — произвольные дифференцируемые функции.

2. Проективные и обобщенные масштабные преобразования. Рассмотрим проективные преобразования

$$t' = \frac{t}{1-\gamma t}, \qquad x_1' = \frac{x_1}{1-\gamma t}, \qquad x_2' = \frac{x_2}{1-\gamma t} \tag{3^{V}}$$

и обобщенные масштабные преобразования

$$t' = e^{2\lambda} t, \qquad x_1' = e^{\lambda} x_1, \qquad x_2' = e^{\lambda} x_2, \tag{3^{VI}}$$

γ, λ — вещественные параметры.

Преобразования (3^{V}), (3^{VI}) образуют двухпараметрическую некоммутативную группу Ли, которая вместе с 10-параметрической группой Галилея образует 12-параметрическую группу.

1. Выясним, при каких условиях уравнения ($2''$) инвариантны относительно преобразований (3^{V}), (3^{VI}). Сначала рассмотрим преобразования (3^{V}). Согласно (4), имеем $\xi_t = t^2$, $\xi_{x_1} = tx_1$, $\xi_{x_2} = tx_2$, для коэффициентов $\xi_{\dot{x}_1}, \xi_{\ddot{x}_1}, \ldots$, согласно [5], получаем выражения

$$\xi_{\dot{x}_1} = x_1 - \dot{x}_1 t, \quad \xi_{\dot{x}_2} = x_2 - \dot{x}_2 t, \quad \xi_{\ddot{x}_1} = -3\ddot{x}_1 t, \quad \xi_{\ddot{x}_2} = -3\ddot{x}_2 t,$$
$$\xi_{\dddot{x}_1} = -3\ddot{x}_1 - 5\dddot{x}_1 t, \quad \xi_{\dddot{x}_2} = -3\ddot{x}_2 - 5\dddot{x}_2 t,$$
$$\xi_{x_1^{(4)}} = -8\dddot{x}_1 - 7tx_1^{(4)}, \quad \xi_{x_2^{(4)}} = -8\dddot{x}_2 - 7tx_2^{(4)}.$$

Условие инвариантности (5) сводится к системе уравнений в частных производных

$$\begin{gathered} t^2\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + tx_1\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} + tx_2\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_2} + (x_1 - \dot{x}_1 t)\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_1} + (x_2 - \dot{x}_2 t)\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_2} - \\ -3\ddot{x}_1 t\frac{\partial f_\alpha}{\partial \ddot{x}_1} - 3\ddot{x}_2 t\frac{\partial f_\alpha}{\partial \ddot{x}_2} - (3\dot{x}_1 + 5t\dddot{x}_1)\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dddot{x}_1} - (3\dot{x}_2 + 5t\dddot{x}_2)\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dddot{x}_2} = \\ = -(8\dddot{x}_\alpha + 7tf_\alpha), \qquad \alpha = 1, 2, \end{gathered} \tag{12}$$

общее решение которой представимо в виде

$$F_\alpha(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{10}) = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \tag{13}$$

где F_α — произвольные дифференцируемые функции, а ее аргументы — первые интегралы характеристической системы уравнений (12):

$$\begin{gathered} \omega_1(t, x_1, x_2, \ldots, f_1, f_2) = \frac{x_1}{t} = C_1, \quad \omega_2 = \frac{x_2}{t} = C_2, \quad \omega_3 = x_1 x_1 - \frac{x_1^2}{t} = C_3, \\ \omega_4 = x_1^3\ddot{x}_1 = C_4, \quad \omega_5 = x_2^3\ddot{x}_2 = C_5, \quad \omega_6 = \dddot{x}_1 t^5 + 3x_1^3\ddot{x}_1 t = C_6, \\ \omega_7 = \dddot{x}_2 t^5 + 3x_2^3\ddot{x}_2 t = C_7, \quad \omega_8 = \dddot{x}_2 + \frac{3}{\ddot{x}_2 t} = C_8, \\ \omega_9 = f_1 t^7 - 12x_1^3\ddot{x}_1 t^2 - \frac{4}{3}\dddot{x}_1 x_1^5 t - 4x_1^8\ddot{x}_1 t^3 = C_9, \\ \omega_{10} = f_2 t^7 - 12x_2^3\ddot{x}_2 t^2 - \frac{4}{3}\dddot{x}_2 x_2^5 t - 4x_2^8\ddot{x}_2 t^3 = C_{10}, \end{gathered} \tag{14}$$

$C_1, \ldots, C_{10}$ — произвольные постоянные.

Сформулируем результат.

Теорема 3. *Для того чтобы, уравнения ($2''$) были инвариантными относительно проективных преобразований (3^V), необходимо и достаточно, чтобы функции f_1 и f_2 удовлетворяли уравнениям (13), где F_α дифференцируемые функции, зависящие от переменных, определяемых соотношениями (14).*

2. В случае обобщенных масштабных преобразований (3^{VI}) $\xi_t = 2t$, $\xi_{x_1} = x_1$, $\xi_{x_2} = x_2$. Вычисляя по известным правилам [5] коэффициенты $\xi_{\dot{x}_1}, \xi_{\dot{x}_2}, \ldots$

оператора $\tilde{X}$ и подставляя в (5), получаем следующее условие инвариантности системы ($2''$) относительно (3^{VI}):

$$\begin{gathered}2t\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}+x_1\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1}-\dot{x}_1\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_1}-3\ddot{x}_1\frac{\partial f_\alpha}{\partial \ddot{x}_1}-5\dddot{x}_1\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dddot{x}_1}+x_2\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_2}-\\ -\dot{x}_2\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_2}-3\ddot{x}_2\frac{\partial f_\alpha}{\partial \ddot{x}_2}-5\dddot{x}_2\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dddot{x}_2}=-7f_\alpha, \qquad \alpha=1,2.\end{gathered} \tag{15}$$

Общее решение системы (15) представимо в виде

$$\Phi_\alpha(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{10})=0, \qquad \alpha=1,2, \tag{16}$$

где переменные $\omega_1,\ldots,\omega_{10}$ определяются соотношениями

$$\begin{gathered}\omega_1=\frac{x_1^2}{t}=C_1, \quad \omega_2=x_1\dot{x}_1=C_2, \quad \omega_3=x_1^3\ddot{x}_1=C_3, \quad \omega_4=x_1^5\dddot{x}_1=C_4,\\ \omega_5=f_1t^{7/2}=C_5, \quad \omega_6=\frac{x_2^2}{t}=C_6, \quad \omega_7=x_2\dot{x}_2=C_7, \quad \omega_8=x_2^3\ddot{x}_2=C_8,\\ \omega_9=x_2^5\dddot{x}_2=C_9, \quad \omega_{10}=f_2t^{7/2}=C_{10},\end{gathered} \tag{17}$$

а Φ_1, Φ_2 как обычно, предполагаются дифференцируемыми функциями.

Если уравнения (16) удается разрешить относительно f_1 и f_2, то уравнения ($2''$) принимают вид

$$f_\alpha=t^{-7/2}\Psi_\alpha\left(\frac{x_1^2}{t},x_1\dot{x}_1,x_1^3\ddot{x}_1,x_1^5\dddot{x}_1,\frac{x_2^2}{t},x_2\dot{x}_2,x_2^3\ddot{x}_2,x_2^5\dddot{x}_2\right),$$

где Ψ_α — произвольные дифференцируемые функции.

Подытожим сказанное.

Теорема 4. *Для того чтобы уравнения ($2''$) были инвариантными относительно масштабных преобразований (3^{VI}), необходимо и достаточно, чтобы функции f_1 и f_2 удовлетворяли уравнениям (16) с произвольными дифференцируемыми функциями Φ_α.*

3. *Обобщенные галилеевские преобразования.* Известно, что если в какой-либо инерциальной системе отсчета выполняется равенство

$$\ddot{x}_i'=\ddot{x}_i, \tag{18}$$

то оно выполняется и во всех других инерциальных системах. Это утверждение составляет содержание принципа относительности Галилея.

Совокупность преобразований, удовлетворяющих условию (18), очевидно, задается равенствами

$$x_i'=x_i+v_it+a_i, \tag{19}$$

где a_i, v_i — вещественные параметры, и называются преобразованиями Галилея.

В случае системы уравнений четвертого порядка ($2''$) естественно рассматривать преобразования, удовлетворяющие условиям

$$x^{(4)'}=x^{(4)}. \tag{20}$$

Интегрируя (20), получаем

$$x' = x + a^{(1)}t + a^{(2)}t^2 + a^{(3)}t^3 + a^{(0)}. \tag{21}$$

Преобразования (21) в случае одной пространственной координаты образуют 4-параметрическую коммутативную группу Ли, а в случае 3-пространственных координат — 12-параметрическую группу. Они содержат, очевидно, преобразования (19) как подгруппу. Параметры $a^{(2)}$ и $a^{(3)}$ задают преобразования к неинерциальным системам отсчета, движущимся относительно исходной с ускорениями $a^{(2)}$ и $a^{(3)}$.

Опишем уравнения ($2''$), инвариантные относительно преобразований

$$\begin{aligned} &t' = t, \qquad x_1' = x_1 + a^{(1)}t + a^{(2)}t^2 + a^{(3)}t^3 + a^{(0)},\\ &x_2' = x_2 + a^{(1)}t + a^{(2)}t^2 + a^{(3)}t^3 + a^{(0)}. \end{aligned} \tag{3^{VII}}$$

Найдем операторы $\tilde{X}$, соответствующие каждому параметру $a^{(0)}$, $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ в отдельности. Из (4) имеем соответственно

$$\begin{aligned} &\tilde{X}^{(0)} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad \tilde{X}^{(1)} = t\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2},\\ &\tilde{X}^{(2)} = t^2\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right) + 2t\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\right) + 2\left(\frac{\partial}{\partial \ddot{x}_1} + \frac{\partial}{\partial \ddot{x}_2}\right),\\ &\tilde{X}^{(3)} = t^3\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right) + 3t^2\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\right) + 6t\left(\frac{\partial}{\partial \ddot{x}_1} + \frac{\partial}{\partial \ddot{x}_2}\right) +\\ &\qquad + 6\left(\frac{\partial}{\partial \dddot{x}_1} + \frac{\partial}{\partial \dddot{x}_2}\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Учитывая (5) и (22), получаем уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_2} = 0, \qquad t\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_2} = 0,\\ &t^2\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_2}\right) + 2t\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_2}\right) + 2\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \ddot{x}_1} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \ddot{x}_2}\right) = 0,\\ &t^3\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_2}\right) + 3t^2\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_2}\right) + 6t\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \ddot{x}_1} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \ddot{x}_2}\right) +\\ &\qquad +6\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dddot{x}_1} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dddot{x}_2}\right) = 0, \qquad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \tag{23}$$

Нетрудно проверить, что общие решения уравнений (23) задаются соотношениями

$$\begin{aligned} &f_\alpha \equiv f_\alpha^0\left(t, x_1 - x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \dddot{x}_1, \dddot{x}_2\right),\\ &f_\alpha \equiv f_\alpha^1\left(t, x_1 - x_2, \dot{x}_1 - \dot{x}_2, x_\alpha - \dot{x}_\alpha t, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \dddot{x}_1, \dddot{x}_2\right),\\ &f_\alpha \equiv f_\alpha^2\left(t, x_1 - x_2, \dot{x}_1 - \dot{x}_2, \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2, 2x_\alpha - \dot{x}_\alpha t, 2x_\alpha - \ddot{x}_\alpha t^2, \dddot{x}_1, \dddot{x}_2\right),\\ &f_\alpha \equiv f_\alpha^3\Big(t, x_1 - x_2, \dot{x}_1 - \dot{x}_2, \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2, \dddot{x}_1 - \dddot{x}_2, 3x_\alpha - \dot{x}_\alpha t, 6x_\alpha - \ddot{x}_\alpha t^2,\\ &\qquad 6x_\alpha - \dddot{x}_\alpha t^3\Big), \qquad \alpha = 1, 2, \end{aligned} \tag{24}$$

причем $f_\alpha^0, \dots, f_\alpha^3$ предполагаются произвольными дифференцируемыми функциями.

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 5. *Для инвариантности системы (2″) относительно однопараметрических преобразований (3^{VII}) необходимо и достаточно, чтобы функции f_1 и f_2 были дифференцируемыми и представлялись в виде (24).*

1. Остроградский М.В., Мемуар о дифференциальных уравнениях, относящихся к изопериметрическим задачам, Полн. собр. соч., Киев, Изд-во АН УССР, 1961, Т. 2, 359 с.
2. Kerner E.H., Hamiltonian Formulation of Action-at-a-Distance in Electrodynamics, *J. Math. Phys.*, 1962, **3**, № 1, 35–42.
3. Kennedy F.J., Hamiltonian formulation of classical two-charge problem in straight-line approximation, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 9, 1844–1856.
4. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных, В кн.: Теоретико-групповые методы в математической физике, Киев, Ин-т. мат. АН УССР, 1978, 5–44.
5. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.