Теоретико-алгебраический анализ уравнений Ламе

В.И. ФУЩИЧ, В.В. НАКОНЕЧНЫЙ

1. Постановка задачи. Система уравнений Ламе

$$\hat{L}(\hat{p})\vec{u}(t,\vec{x}) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \operatorname{grad}\operatorname{div} - \alpha\Delta\right)\vec{u}(t,\vec{x}) = 0, \qquad \alpha = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \tag{1}$$

$\vec{u}(t,\vec{x}) = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор смещения, α — параметр, $\vec{x} \in R^3$, — основной математический объект классической теории упругости. В [1] поставлена задача об отыскании алгебр инвариантности системы (1) с помощью нелиевского метода. В настоящей работе эта задача решена, т.е. найдены 4-, 10- и 15-мерные алгебры инвариантности уравнения Ламе. Базисные элементы этих алгебр инвариантности — интегро-дифференциальные операторы. Это означает, что с помощью классического метода Ли [2] такие алгебры инвариантности не могут быть найдены.

В рамках лиевского метода, где базисные элементы алгебр Ли — операторы первого порядка, максимальной алгеброй инвариантности уравнения (1) является 8-мерная алгебра [3]

$$\begin{gathered}
X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad a = 1,2,3, \\
J_{ab} = x_a\frac{\partial}{\partial x_b} - x_b\frac{\partial}{\partial x_a} + u_b\frac{\partial}{\partial u_a} - u_a\frac{\partial}{\partial u_b}, \\
D = x_a\frac{\partial}{x_a} + t\frac{\partial}{\partial t}, \qquad a = 1,2,3.
\end{gathered} \tag{2}$$

Для решения поставленной задачи представим уравнение (1) в матричном виде

$$\hat{p}_0^2 u(t,\vec{x}) = H(\hat{p}_a, s_a)u(t,\vec{x}), \tag{3}$$

$$H(\hat{p}_a, s_a) = (1+\alpha)\hat{p}^2 - (s_a\hat{p}_a)^2, \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered}
\hat{p}_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad \hat{p}_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad x_0 \equiv t, \qquad a = 1,2,3, \\
s_a\hat{p}_a = s_1\hat{p}_1 + s_2\hat{p}_2 + s_3\hat{p}_3, \qquad \hat{p}^2 = \hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2 \equiv -\Delta.
\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь и дальше буквами со шляпкой обозначены операторы. Там, где это не может вызвать недоразумений, будем опускать шляпку. Матрицы s_a, удовлетворяющие коммутационным соотношениям алгебры Ли группы $SU(2)$

$$[s_a, s_b]_- = i\varepsilon_{abc}s_c, \qquad a,b,c = 1,2,3, \tag{6}$$

Украинский математический журнал, 1980, **32**, № 2, С. 267–272.

имеют явную структуру

$$s_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad s_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$s_3 = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

и реализуют трехмерное представление $D(1)$ алгебры Ли (6). Вектор-столбец $u(t, \vec{x})$ имеет три компоненты: (u_1, u_2, u_3).

Уравнение Ламе в форме (3), в отличие от (1), допускает различные обобщения. Действительно, если в уравнении (3) матрицы s_a реализуют любое представление коммутационных соотношений (6), то получаем целое семейство уравнений типа Ламе. И только в том случае, когда матрицы s_a реализуют трехмерное представление (7), уравнение (3) совпадает с уравнением Ламе (1).

Задача об отыскании алгебр инвариантности уравнения (3) состоит в явном построении некоторого множества операторов $\{\hat{Q}_A\}$, образующих алгебру Ли и удовлетворяющих условиям инвариантности

$$\hat{L}(\hat{p}_a, s_a)\hat{Q}_A u(t, \vec{x}) = 0, \qquad A = 1, 2, \ldots, n \tag{8}$$

или

$$[\hat{L}, \hat{Q}_A]_- u(t, \vec{x}) = 0. \tag{9}$$

Применить нелиевский алгоритм к уравнению (3) для вычисления алгебр инвариантности означает следующее [1, 4]: 1) систему (3) с помощью невырожденного преобразования расщепить (провести декомпозицию) на максимально возможные независимые системы; 2) найти алгебру инвариантности образованного уравнения; 3) посредством обратного преобразования найти явный вид базисных элементов алгебры инвариантности для исходного уравнения.

Все утверждения, приведенные ниже, будут доказаны с помощью этого алгоритма.

2. Конформная алгебра. Докажем, что уравнение Ламе (3) инвариантно относительно 15-мерной алгебры Ли.

Теорема 1. *Уравнение (3) инвариантно относительно 15-мерной конформной алгебры Ли $C(15)$, базисные элементы которой задаются интегро-дифференциальными операторами*

$$P_0 = \left\{1 + \alpha - \left(\frac{s_a p_a}{p}\right)^2\right\}^{1/2} p_0, \qquad P_a = p_a, \quad a = 1, 2, 3,$$
$$J_{ab} = \tilde{x}_a p_b - \tilde{x}_b p_a, \qquad D = \tilde{x}_\mu p^\mu + i,$$
$$J_{0a} = \left\{1 + \alpha - \left(\frac{s_a p_a}{p}\right)^2\right\}^{-1/2} \left\{\left(1 + \alpha - \left(\frac{s_a p_a}{p}\right)^2\right) \tilde{x}_0 p_a - \tilde{x}_a p_0\right\}, \tag{10}$$

$$K_0 = -\left\{ \tilde{x}_0^2 - \left(1+\alpha-\left(\frac{s_a p_a}{p}\right)^2\right)^{-1/2} \right\} p_0 + 2\left(1+\alpha-\left(\frac{s_a p_a}{p}\right)^2\right)^{1/2} \tilde{x}_0 D,$$

$$K_a = -\left\{ \left(1+\alpha-\left(\frac{s_a p_a}{p}\right)^2\right) \tilde{x}_0^2 - \tilde{x}_a^2 \right\} p_a + 2\tilde{x}_a D,$$

где $\tilde{x}_a^2 \equiv \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2$, *а операторы* $\tilde{x}_a$ *определяются выражениями:*

$$\begin{aligned} &\tilde{x}_a = W^{-1} x_a W = x_a - \frac{1}{m}\left(\frac{s_{3a}}{p} - \frac{p_0}{p} - \frac{s_{3b} p_b}{m^2}\right) + \frac{s_{ab} p_b}{p(p+p_3)}, \quad a = 1,2, \\ &\tilde{x}_0 = W^{-1} x_0 W = x_0, \qquad \tilde{x}_3 = W^{-1} x_3 W = x_3, \qquad mu \neq 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Доказательство. Следуя нелиевскому алгоритму, преобразуем уравнение (3) с помощью такого унитарного интегрального преобразования

$$\begin{aligned} &W = \exp\left(i\frac{s_{3a} p_a}{m}\theta\right) \equiv 1 + i\frac{s_{3a} p_a}{p} - \frac{(s_{3a} p_a)^2}{p(p+p_3)}, \quad a = 1,2, \\ &\theta = \operatorname{arctg}\frac{m}{p_3}, \qquad m = \left(p_1^2 + p_2^2\right)^{1/2}, \qquad s_{ab} = \varepsilon_{abc} s_c. \end{aligned} \tag{12}$$

Действуя слева оператором W на уравнение (3) и используя тождество Хаусдорфа–Кемпбелла

$$\begin{aligned} &(\exp A) B \exp(-A) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\{A,B\}^m}{m!}, \\ &\{A,B\}^{(m)} = [A, \{A,B\}^{(m-1)}]_-, \qquad \{A,B\}^{(0)} = B, \end{aligned} \tag{13}$$

получаем

$$p_0^2 v(t,\vec{x}) = H^c v(t,\vec{x}), \qquad v = Wu, \tag{14}$$

$$H^c = WHW^{-1} = \left(1+\alpha - s_3^2\right) p^2. \tag{15}$$

Поскольку s_3^2 — диагональная матрица, то система (14) расщепляется на три независимых уравнения второго порядка.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что множество операторов $\{Q'_A\}$, удовлетворяющих условию инвариантности

$$[L', Q'_A]_- v = 0, \tag{8$'$}$$

где

$$L' = p_0^2 - H^c = \hat{p}_0^2 - \left(1+\alpha - s_3^2\right)\hat{p}^2, \tag{16}$$

имеет следующую явную структуру

$$\begin{aligned} &P'_0 = \left(1+\alpha - s_3^2\right)^{1/2} p_0, \qquad P'_a = p_a, \quad a = 1,2,3, \\ &J'_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, \qquad D' = x_\mu p^\mu + i, \\ &J'_{0a} = \left(1+\alpha - s_3^2\right)^{-1/2} \left\{ \left(1+\alpha - s_3^2\right) x_0 p_a - x_a p_0 \right\}, \\ &K'_0 = -\left\{ x_0^2 - \left(1+\alpha - s_3^2\right)^{-1/2} x_a^2 \right\} p_0 + 2\left(1+\alpha - s_3^2\right)^{1/2} x_0 D', \\ &K'_a = -\left\{ \left(1+\alpha - s_3^2\right) x_0^2 - x_a^2 \right\} p_a + 2 x_a D', \end{aligned} \tag{17}$$

где $x_a^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Операторы (17) — дифференциальные операторы первого порядка и удовлетворяют коммутационным соотношениям 15-мерной конформной алгебры $C(15)$ (см., например, [5])

$$\begin{aligned}
&[P'_\mu, P'_\nu]_- = 0, \qquad [J'_{\mu\nu}, P'_\lambda]_- = i(g_{\nu\lambda}P'_\mu - g_{\mu\lambda}P'_\nu),\\
&[J'_{\mu\nu}, J'_{\lambda\sigma}]_- = i(g_{\nu\lambda}J'_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}J'_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}J'_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}J'_{\mu\lambda}),\\
&[J'_{\mu\nu}, K'_\lambda]_- = i(g_{\nu\lambda}K'_\mu - g_{\mu\lambda}K'_\nu), \qquad [K'_\mu, K'_\nu]_- = 0,\\
&[K'_\mu, P'_\nu]_- = 2i(g_{\mu\nu}D' - J'_{\mu\nu}), \qquad [J'_{\mu\nu}, D']_- = 0,\\
&[D', P'_\mu]_- = iP'_\mu, \qquad [D', K'_\mu]_- = -iK'_\mu, \qquad \mu, \nu, \lambda, \sigma = 0, 1, 2, 3,
\end{aligned} \tag{18}$$

где $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ — метрический тензор псевдоевклидова пространства $E(1, 3)$.

Явный вид операторов конформной алгебры для исходного уравнения (3) получается с помощью обратного преобразования

$$Q_A = W^{-1}Q'_A W, \qquad A = 1, 2, \ldots, 15. \tag{19}$$

По формулам (19) находим базисные элементы алгебры инвариантности уравнения Ламе, которые, в отличие от (2), — интегро-дифференциальные операторы.

Замечание 1. Инвариантность уравнения (3) относительно конформной алгебры $C(15)$ вовсе не означает, что это уравнение инвариантно относительно собственно конформных, локальных преобразований

$$x'_\mu = \frac{x_\mu - \alpha_\mu x_\nu x^\nu}{1 - 2\alpha_\nu x^\nu + \alpha_\lambda \alpha^\lambda x_\nu x^\nu}, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{20}$$

α_μ — параметры преобразования. Теорема 1 утверждает лишь то, что на множестве решений уравнения (3) реализуется представление конформной алгебры, заданное формулами (10). Операторы порождают нелокальные преобразования для координат и вектор-функции $\vec{u}(t, \vec{x})$.

Замечание 2. Преобразованное уравнение (14) — система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, поэтому оно может быть исследовано методом Ли–Овсянникова. На этом пути возможен синтез классического метода Ли с нелиевским методом [4]. Действительно, изучив групповые свойства уравнения Ламе в канонической форме с помощью метода Ли–Овсянникова, используя оператор преобразования (12), по найденной алгебре Ли группы инвариантности уравнения (14) найдем нелиевскую алгебру инвариантности исходного уравнения (3).

3. Алгебра Галилея. Докажем, что уравнение Ламе инвариантно относительно 10-мерной алгебры Галилея.

Теорема 2. *Уравнение Ламе инвариантно относительно алгебры Галилея $G(10)$, базисные элементы которой задаются интегро-дифференциальными операторами*

$$\begin{aligned}
&P_0 = \frac{p^2}{2\varkappa}, \quad \varkappa \neq 0, \qquad P_a = p_a, \quad a = 1, 2, 3, \quad J_{ab} = \tilde{x}_a p_b - \tilde{x}_b p_a,\\
&G_a = \frac{\varkappa}{2}\left[\frac{1}{p}, J_{0a}\right]_+ = \left\{1 + \alpha - \left(\frac{s_a p_a}{p}\right)^2\right\}^{1/2} \tilde{x}_0 \frac{\varkappa p_a}{p} - \varkappa \tilde{x}_a,
\end{aligned} \tag{21}$$

где $\varkappa$ — произвольное число, а $\tilde{x}_a$, $\tilde{x}_0$ определяются формулами (11).

Доказательство. Так же как и при доказательстве теоремы 1 используем уравнение Ламе в диагональной форме (14). Для того, чтобы доказать теорему, достаточно явно указать набор операторов $\{Q''_A\}$, образующих алгебру Ли группы Галилея и удовлетворяющих условию

$$[L', Q''_A]_- v = 0, \qquad A = 1, 2, \ldots, 10. \tag{8''}$$

Нетрудно убедиться, что операторы

$$\begin{gathered} P''_0 = \frac{p^2}{2\varkappa}, \quad \varkappa \neq 0, \qquad P''_a = p_a, \quad a = 1, 2, 3, \quad J''_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, \\ G''_a = \frac{\varkappa}{2}\left[\frac{1}{p}, J'_{0a}\right]_+ = \left\{1 + \alpha - s_3^2\right\}^{1/2} x_0 \frac{\varkappa p_a}{p} - \varkappa x_a, \end{gathered} \tag{22}$$

где J'_{0a} определяются формулами (17), образуют алгебру Галилея

$$\begin{gathered} [J''_{ab}, J''_{cd}]_- = i(\delta_{ac}J''_{bd} + \delta_{bd}J''_{ac} - \delta_{bc}J''_{ad} - \delta_{ad}J''_{bc}), \qquad [J''_{ab}, P''_0]_- = 0, \\ [J''_{ab}, P''_c]_- = i(\delta_{ac}P''_b - \delta_{bc}P''_a), \qquad [P''_a, P''_b]_- = 0, \qquad [G''_a, P''_0]_- = 0, \\ [J''_{ab}, G''_c]_- = i(\delta_{ac}G''_b - \delta_{bc}G''_a), \qquad [P''_a, G''_b]_- = i\varkappa\delta_{ab}, \qquad [G''_a, G''_b]_- = 0 \end{gathered} \tag{23}$$

и удовлетворяют условию (8′′). Явный вид базисных элементов алгебры Галилея (21), удовлетворяющих условию инвариантности (8), получен с помощью оператора преобразования (12).

Замечание 3. Так же, как и в теореме 1, инвариантность уравнения (3) относительно алгебры Галилея $G(10)$ не означает, что оно инвариантно относительно локальных преобразований Галилея

$$x'_a = R_{ab}x_b + v_a t + b_a, \qquad R_{ab}R_{bc} = \delta_{ac}, \qquad t' = t + b_0, \tag{24}$$

R_{ab}, v_a, b_a, b_0 — параметры, задающие преобразование Галилея.

4. Негеометрическая алгебра инвариантности. Найденная нами в предыдущих пунктах алгебра инвариантности уравнения Ламе порождает нелокальные преобразования независимых $(t, \vec{x}) = (t, x_1, x_2, x_3)$ и зависимых переменных $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$. В некотором смысле такую симметрию уравнения (1) можно назвать геометрической [1], поскольку она возникла из-за наличия симметрии относительно пространственных координат (x_1, x_2, x_3) в уравнении (1).

Оказывается, что уравнение Ламе обладает алгеброй инвариантности, обусловленной симметрией только зависимых переменных (u_1, u_2, u_3). Эту последнюю алгебру инвариантности естественно назвать негеометрической алгеброй инвариантности.

Теорема 3. *Уравнение Ламе (3) инвариантно относительно четырехмерной алгебры Ли группы $GL(2)$, базисные элементы которой имеют вид*

$$\Sigma_0 = I, \qquad \Sigma_1 = -\tilde{\Lambda}_{12}, \qquad \Sigma_2 = \frac{1}{2}(\tilde{\Lambda}_{22} - \tilde{\Lambda}_{11}), \qquad \Sigma_3 = \frac{s_a p_a}{p}, \tag{25}$$

где

$$\begin{gathered} \tilde{\Lambda}_{ab} = W^{-1}\Lambda_{ab}W = \tilde{s}_a\tilde{s}_b + \tilde{s}_b\tilde{s}_a - \delta_{ab}, \qquad \tilde{s}_3 = W^{-1}s_3W = \frac{s_a p_a}{p}, \\ \tilde{s}_a = W^{-1}s_aW = s_a - \frac{p_a}{p}s_3 + \frac{p_a}{m^2}\left(\frac{p_3}{p} - 1\right)(s_b p_b), \qquad a = 1, 2. \end{gathered} \tag{26}$$

Доказательство. Оператор L^c уравнения Ламе в диагональном представлении имеет вид

$$L^c u = \begin{pmatrix} p_0^2 - \alpha p_a^2 & 0 & 0 \\ 0 & p_0^2 - \alpha p_a^2 & 0 \\ 0 & 0 & p_0^2 - (1+\alpha) p_a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0. \tag{27}$$

Из (27) следует, что множество всех невырожденных 3×3 матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix} \tag{28}$$

коммутирует с оператором L^c. В пространстве матриц размерности 3×3 выберем базис, состоящий из матриц

$$I, \quad s_a, \quad \Lambda_{ab} = s_a s_b + s_b s_a - \delta_{ab}, \quad a, b = 1, 2, 3, \tag{29}$$

где s_a определены формулами (7), I — единичная матрица, причем

$$\Lambda_{11} + \Lambda_{22} + \Lambda_{33} = I. \tag{30}$$

Используя этот базис, в множестве матриц (28) выбираем базисные алгебры $GL(2)$ в виде

$$\Sigma'_0 = I, \qquad \Sigma'_1 = -\Lambda_{12}, \qquad \Sigma'_2 = \frac{1}{2}(\Lambda_{22} - \Lambda_{11}), \qquad \Sigma'_3 = s_3. \tag{31}$$

Матрицы (31) реализуют представление $D\left(\frac{1}{2}\right) \oplus D(0)$ алгебры $GL(2)$ и удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\Sigma'_a, \Sigma'_b]_- = 2i\varepsilon_{abc}\Sigma'_c, \qquad [\Sigma'_0, \Sigma'_a]_- = 0, \qquad a, b, c = 1, 2, 3. \tag{32}$$

Осуществив над матрицами $\{\Sigma'_0, \Sigma'_a\}$ обратное преобразование W^{-1}, найдем явный вид операторов (26), удовлетворяющих условию инвариантности (8).

Следствие. *Уравнение Ламе (1) инвариантно относительно преобразований из группы $SU(2) \subset GL(2)$*

$$u' = \exp(i\Sigma_a \theta_a) u = \left\{ 1 + \frac{1}{2}\tilde{\Lambda}_{11}(\cos\theta_a - 1) + i\Sigma_a \sin\theta_a \right\} u, \tag{33}$$

$a = 1, 2, 3$*; по a нет суммирования, где Σ_a, $\tilde{\Lambda}_{11}$ определены формулами (25), (26).*

В заключение приведем теорему о негеометрической симметрии уравнения типа (3) (обобщенного уравнения Ламе), когда $(2s+1) \times (2s+1)$ матрицы s_a реализуют конечномерное представление $D(s)$ алгебры Ли группы $SU(2)$. Число s, характеризующее неприводимое представление $SU(2)$, может быть целым или полуцелым.

Теорема 4. *Алгеброй инвариантности уравнения типа Ламе (3) является алгебра $GL(2) \oplus GL(2) \oplus \cdots \oplus GL(2)$, где число слагаемых в прямой сумме равно целой части числа $\frac{1}{2}(2s+1)$, $s > 1$.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

1. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных, В кн.: Теоретико-групповые методы в математической физике, Киев, 1978, 5–44.
2. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М.: Наука, 1978, 400 с.
3. Чиркунов Ю.А., Групповое свойство уравнений Ламе, В сб.: Динамика сплошной среды, вып. 14, Новосибирск, 1973, 128–130.
4. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики, *ДАН СССР*, 1979, **246**, № 4, 846–850.
5. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Conformal invariance of relativistic equations for arbitrary spin particles, *Lett. Math. Phys.*, 1978, **2**, № 2, 471–475.