О подгруппах обобщенной группы Пуанкаре

В.М. ФЕДОРЧУК, В.И. ФУЩИЧ

Для решения многих задач современной теоретической и математической физики важно знать не только группу симметрии рассматриваемой системы, но и подгрупповую структуру этой группы. Действительно, описание всех подгрупп однородной группы Лоренца позволило П. Винтерницу и И. Фришу [1] с теоретико-групповой точки зрения подойти к задаче о разделении переменных в уравнении Лапласа. Ими доказана теорема, что каждому разбиению группы Лоренца на подгруппы, обладающие инвариантами, соответствует одна координатная система, допускающая разделение переменных.

Среди всех уравнений математики, уравнения математической физики имеют ту особенность, что все они обладают, как правило, нетривиальной симметрией. Знание группы симметрии физической системы позволяет определить многие ее свойства. Взаимодействия обычно нарушают исходную симметрию системы, но иногда сохраняется симметрия относительно одной из подгрупп исходной группы. Таким образом, описание всех подгрупп группы симметрии позволяет дать групповую классификацию граничных условий и взаимодействий.

Существует прямая связь между теорией представлений группы и ее подгрупповой структурой. Эта связь используется в теории индуцированных представлений, где различные подгруппы могут быть применены для индуцирования представлений группы.

В последнее время возрос интерес к использованию пятимерных псевдоевклидовых пространств и соответствующих групп. В работе В.И. Фущича [2] предложено в качестве группы симметрии физических систем использовать обобщенную группу Пуанкаре $P(1,4)$. Неприводимому представлению группы $P(1,4)$ модно поставить в соответствие физическую систему с переменной массой и переменным спином. Помимо этого обобщенные группы $P(1,4)$, $P(2,3)$ и т.д. могут иметь прямое отношение к задаче о расширении S-матрицы за массовую оболочку и для описания частиц с внутренней структурой.

Нами изучена подгрупповая структура обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$, т.е. найдены представители всех сопряженных классов непрерывных подалгебр алгебры Ли этой группы. Сопряжение рассматривалось относительно группы внутренних автоморфизмов.

Группа $P(1,4)$ представляет собой совокупность линейных неоднородных преобразований пятимерного пространства $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$x'_\mu = \sum_{\nu=0}^{4} \Lambda_{\mu\nu} x_\nu + a_\mu, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3, 4, \tag{1}$$

Труды международного семинара "Теоретико-групповые методы в физике", Звенигород, 28–30 ноября 1979 г., Москва, Наука, 1980, Т.1, С. 61–66.

где $\Lambda_{\mu\nu}$ и a_μ — числа, которые оставляют инвариантной следующую квадратичную форму:

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2. \tag{2}$$

Базисные элементы алгебры Ли группы $P(1,4)$ $\{P'_\mu, M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}\}$ $(\mu, \nu = 0,1,2,3,4)$ удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[P'_\mu, P'_\nu] = 0, \qquad [M_{\mu\nu}, P'_\sigma] = g_{\mu\sigma}P'_\nu - g_{\nu\sigma}P'_\mu, \tag{3}$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}, \tag{4}$$

где $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0,1,2,3,4)$ — метрический тензор с компонентами $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$, $g_{\mu\nu} = 0$, если $\mu \neq \nu$.

Для удобства перейдем от $M_{\mu\nu}$ и P'_μ к следующим линейным комбинациям:

$$\begin{gathered} C = M_{40}, \quad L_1 = M_{32}, \quad L_2 = -M_{31}, \quad L_3 = M_{21}, \quad P_a = M_{4a} - M_{a0}, \\ C_a = M_{4a} + M_{a0}\ (a = 1,2,3), \quad X_0 = \frac{1}{2}(P'_0 - P'_4), \quad X_k = P'_k\ (k = 1,2,3), \\ X_4 = \frac{1}{2}(P'_0 + P'_4). \end{gathered} \tag{5}$$

Для решения задачи мы использовали метод, предложенный Ж. Патерой, П. Винтерницом и Г. Цассенхаузом [3]. Этот метод сводит задачу описания представителей всех сопряженных классов непрерывных подалгебр алгебры Ли L конечной размерности $d(L)$ с нетривиальным абелевым идеалом N (сопряжение рассматривается относительно некоторой группы автоморфизмов A) к нахождению всех подалгебр идеала N и фактор-алгебры $F = L/N$ относительно соответствующих групп автоморфизмов.

В нашем случае: L — алгебра Ли группы $P(1,4)$, N — алгебра трансляций в пятимерном пространстве, A — группа внутренних автоморфизмов рассматриваемой алгебры L.

Представители F_i всех сопряженных классов непрерывных подалгебр фактор-алгебры $F = L/N$ найдены в работах Ж. Патеры и др. [4, 5]. Основной результат работы можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема. *Алгебра Ли группы $P(1,4)$ содержит 278 представителей $P_{i,a}$ сопряженных классов непрерывных расщепляющихся подалгебр, т.е. подалгебр, которые могут быть записаны в виде*

$$P_{i,a} = F_i \overset{\circ}{+} N_{i,a}, \qquad F_i \subseteq F, \qquad N_{i,a} \subseteq N \tag{6}$$

и 378 представителей $\tilde{P}_{j,k}$ сопряженных классов непрерывных нерасщепляющихся подалгебр, т.е. подалгебр, для которых базис может быть выбран в виде

$$\tilde{B}_k = B_k \sum_i c_{ki}X_i, \qquad \sum_j d_{rj}X_j. \tag{7}$$

В теореме c_{ki} и d_{rj} — константы (не равны нулю одновременно), которые не могут быть преобразованы одновременно в нуль элементом из A; B_i $(i =$

$1,\ldots,d(F))$ *и* X_k $(k=1,\ldots,d(N))$ *— базисы, выбранные в* F *и* N *соответственно.* $N_{i,a}$ *— представители сопряженных классов непрерывных подалгебр идеала* N *(сопряжение рассматривается относительно нормализатора* $\mathrm{Nor}_A F_i$*).*

Отметим, что нормализатор $\mathrm{Nor}_A F_i$ является подгруппой группы A, которая оставляет подалгебру F_i инвариантной.

Доказательство этой теоремы ввиду его громоздкости неприводим. Полный список всех подалгебр алгебры Ли группы $P(1,4)$ приведен в [6]. Здесь мы укажем только на несколько подалгебр, которые могут иметь физические приложения.

Полученные результаты, в частности, дают возможность сделать вывод, что группа $P(1,4)$ содержит в качестве подгруппы расширенную группу Галилея. Ее алгебра Ли задается базисными элементами:

$$\begin{gathered}-L_1=M_{23},\quad -L_2=-M_{13},\quad -L_3=M_{12},\quad G_a=-(M_{a4}+M_{a0}),\\ P'_a\ (a=1,2,3),\quad H=-\frac{1}{2}(P'_4-P'_0),\quad M=P'_0+P'_4,\end{gathered}\tag{8}$$

которые удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$\begin{gathered}[L_i,L_j]=+\varepsilon_{ijk}L_k,\qquad [L_i,P'_j]=+\varepsilon_{ijk}P'_k,\qquad [L_i,G_j]=+\varepsilon_{ijk}G_k,\\ [G_i,H]=P'_i,\qquad [G_i,P'_j]=+\delta_{ij}M,\qquad [G_i,G_j]=0,\\ [L_i,H]=[P'_i,P'_j]=[P'_i,H]=0,\\ [L_i,M]=[G_i,M]=[P'_i,M]=[H,M]=0,\quad (i,j=1,2,3).\end{gathered}\tag{9}$$

Кроме того, группа $P(1,4)$ содержит другие важные группы: $P(1,3)$, $O(1,3)$, $E(3)$, $O(3)$ и т.д. Подгрупповая структура этих групп изучена раньше.

Таким образом, обобщенная группа Пуанкаре $P(1,4)$ естественным образом объединяет группы движений нерелятивистской ($G(3)$) и релятивистской ($P(1,3)$ квантовых механик. Из этого факта, в частности, следует, что произвольное уравнение, инвариантное относительно группы $P(1,4)$, инвариантно также относительно группы Галилея $G(3)$. При этом, конечно, такое уравнение описывает частицы с нефиксированной массой и дискретным спином, поскольку оператор массы $M=P'_0+P'_4$ имеет непрерывный спектр, а оператор спина $S^2=\left(\vec{L}+\dfrac{\vec{G}\times\vec{P}'}{M}\right)^2$ имеет дискретный спектр. Это означает, что неприводимые представления группы $P(1,4)$ разлагаются в прямой интеграл (по массовой переменной) и в прямую сумму (по спину) неприводимых представлений группы $G(3)$.

В заключение выпишем несколько подалгебр высокой размерности ($\dim L\geq 10$) алгебры Ли группы $P(1,4)$. Имеется только одна 12-мерная подалгебра. Она задается базисными элементами

$$G,\ L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4.\tag{10}$$

Они удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{gathered}[G,L_i]=0,\qquad [L_i,L_j]=\varepsilon_{ijk}L_k,\qquad [P_i,P_j]=0,\qquad [G,P_i]=-P_i,\\ [L_i,P_j]=\varepsilon_{ijk}P_k,\qquad [P_i,X_0]=X_i,\qquad [G,X_0]=X_0,\qquad [L_i,X_0]=0,\\ [P_i,X_j]=2\delta_{ij}X_4,\qquad [G,X_i]=0,\qquad [L_i,X_j]=\varepsilon_{ijk}X_k,\qquad [P_i,X_4]=0,\\ [G,X_4]=-X_4,\qquad [L_i,X_4]=0,\qquad [X_0,X_j]=0,\qquad [X_0,X_4]=0,\\ [X_i,X_j]=0,\qquad [X_i,X_4]=0,\qquad (i,j=1,2,3).\end{gathered}\tag{11}$$

Алгебра Ли группы $P(1,4)$ содержит 4 одиннадцатимерные подалгебры $A_{11,l}$ ($l = 1,\ldots,4$). Выпишем их базисные элементы и коммутационные соотношения между ними. Подалгебра $A_{11,1}$ задается базисными элементами

$$G,\ L_1, L_2,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 \tag{12}$$

и базисные элементы удовлетворяют соотношениям (11).

Подалгебра $A_{11,2}$ задается базисными элементами

$$L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1+C_1,\ P_2+C_2,\ P_3+C_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 \tag{13}$$

и коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned}
&[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k, \qquad [L_i, P_j + C_j] = \varepsilon_{ijk}(P_k + C_k), \qquad [L_i, X_0] = 0,\\
&[L_i, X_j] = \varepsilon_{ijk} X_k, \qquad [L_i, X_4] = 0, \qquad [P_i + C_i, X_0] = X_i,\\
&[P_i + C_i, X_j] = 2\delta_{ij}(X_4 - X_0), \qquad [P_i + C_i, X_4] = -X_i, \qquad [X_0, X_i] = 0,\\
&[X_i, X_j] = 0, \qquad [X_i, X_4] = 0, \qquad [P_i + C_i, P_j + C_j] = 4\varepsilon_{ijk} L_k,\\
&[X_0, X_4] = 0, \qquad (i, j = 1, 2, 3).
\end{aligned} \tag{14}$$

Подалгебра $A_{11,3}$ задается базисными элементами

$$L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_i - C_i\ (i = 1,2,3),\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
&[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k, \qquad [L_i, P_j - C_j] = \varepsilon_{ijk}(P_k - C_k), \qquad [L_i, X_0] = 0,\\
&[L_i, X_j] = \varepsilon_{ijk} X_k, \qquad [L_i, X_4] = 0, \qquad [P_i - C_i, P_j - C_j] = -4\varepsilon_{ijk} L_k,\\
&[P_i - C_i, X_0] = X_i, \qquad [P_i - C_i, X_j] = 2\delta_{ij}(X_0 + X_4), \qquad [X_0, X_i] = 0,\\
&[P_i - C_i, X_4] = X_i, \qquad [X_0, X_4] = 0, \qquad [X_i, X_4] = 0, \qquad (i, j = 1, 2, 3).
\end{aligned} \tag{16}$$

Базисные элементы подалгебры $A_{11,4}$ и коммутационные соотношения между ними даются формулами (8) и (9).

Алгебра Ли группы $P(1,4)$ содержит 4 десятимерные подалгебры $A_{10,l}$ ($l = 1,\ldots.4$). Подалгебра $A_{10,1}$ задается базисными элементами

$$L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4, \tag{17}$$

удовлетворяющими соотношениям (11).

Базисные элементы

$$G,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 \tag{18}$$

подалгебры $A_{10,2}$ удовлетворяют соотношениям (11).

Базисные элементы

$$L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1+C_1,\ P_2+C_2,\ P_3+C_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 - X_0 \tag{19}$$

подалгебры $A_{10,3}$ удовлетворяют соотношениям (14). Подалгебра $A_{10,4}$ задается базисными элементами

$$L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1-C_1,\ P_2-C_2,\ P_3-C_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 + X_0 \tag{20}$$

Они удовлетворяют соотношениям (16).

1. Винтерниц П., Фриш И., *ЯФ*, 1965, **1**, 889.
2. Фущич В.И., *ТМФ*, 1970, **4**, 360.
3. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, 1597.
4. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., *J. Math. Phys.*, 1976, **17**, 717.
5. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H., *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, 2259.
6. Федорчук В.М., Непрерывные подгруппы неоднородной группы де Ситтера $P(1,4)$, Препринт 78.18, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1978.