

О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физике

В.И. ФУЩИЧ

Среди всех уравнений, встречающихся в математике, уравнения математической физики выделяются тем, что они обладают, как правило, высокой симметрией. Первопричиной этих важнейших свойств уравнений является симметрия реальных физических процессов.

Почти 100 лет назад С. Ли создал принципиальные основы математического метода исследования симметричных (групповых) свойств дифференциальных уравнений. За последние двадцать лет это направление получило существенное развитие в работах Л.В. Овсянникова и его учеников, которое подытожено в монографии [1].

В работах [2, 3] показано, что уравнения Дирака, Максвелла, Клейна–Гордона обладают симметрией, которая в принципе не может быть обнаружена лиевским методом. В настоящей статье сформулирован нелиевский метод исследования групповых свойств дифференциальных и интегродифференциальных уравнений.

1. Рассмотрим уравнение

$$\hat{L}(x, \hat{p})\Psi(x) = 0, \quad (1)$$

где $\hat{L}(x, \hat{p})$ — некоторый линейный оператор, $x \in R_x^n$, $\hat{p}$ — вектор-оператор с компонентами $\hat{p}_\mu = ig_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}$, $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор, ненулевые компоненты которого $g_{00} = g_{11} = \dots = g_{kk} = -g_{k+1, k+1} = \dots = -g_{nn} = 1$, $\Psi(x)$ — вектор-функция. Через $L(x, p)$ обозначим символ оператора $\hat{L}(x, \hat{p})$, $p \in R_p^n$.

Будем говорить, что уравнение (1) инвариантно относительно некоторого множества операторов $\hat{Q} = \{\hat{Q}_A\} = \{\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \dots, \hat{Q}_N\}$, если выполняются условия

$$\hat{L}(x, \hat{p})\hat{Q}_A\Psi(x) = 0, \quad A = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

Если операторы $\{\hat{Q}_A\}$ (или их линейные комбинации) удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\hat{Q}_A, \hat{Q}_B]_- = f_{ABC}\hat{Q}_C, \quad (3)$$

то будем говорить, что уравнение (1) инвариантно относительно алгебры Ли. Здесь f_{ABC} — структурные константы алгебры Ли.

В отличие от подхода С. Ли, мы будем делать акцент не на группы инвариантности, а на алгебры инвариантности уравнений. Задача отыскания алгебры инвариантности уравнения (1) формулируется очень просто: требуется конструктивно описать (по возможности наиболее широкий) класс операторов $\hat{Q}$, удовлетворяющих условиям (2) и (3).

Из приведенного видна ограниченность постановки и метода С. Ли и, главное, видны новые пути решения и обобщения лиевской задачи об исследовании алгебраических свойств уравнений. Такое обобщение возможно, по меньшей мере,

в двух направлениях: во-первых, искать алгебру инвариантности уравнения (1) в классе интегродифференциальных операторов (в подходе Ли, как известно, операторы $\hat{Q}_A$ — операторы первого порядка); во-вторых, отказаться от условия (3), т.е. от требования, чтобы операторы $\hat{Q}$ принадлежали алгебре Ли: операторы $\hat{Q}_A$ могут образовывать супералгебру, алгебру Йордана и т.д.

Именно в первом направлении, которое назовем нелиевским подходом, и были получены новые алгебры инвариантности для многих уравнений движения квантовой механики [4] (см. также [5], посвященную этому направлению). Главный и самый трудный вопрос, возникающий в связи с нелиевским подходом к исследованию алгебраических свойств уравнений, состоит в следующем: каким способом конструктивно описать (вычислить) операторы $\hat{Q}_A$, т.е. указать метод нахождения интегродифференциальных операторов. Очевидно, что лиевский алгоритм для этих целей непригоден.

Обобщая результаты конкретных способов вычисления алгебр инвариантности [2–4], можно сформулировать такой метод построения операторов $\hat{Q}_A$: 1) система дифференциальных уравнений (д.у.) посредством обратимого (вообще говоря, неоднозначного) преобразования приводится к каноническому (жордановому или диагональному) виду, т.е. проводится максимальное расщепление системы д.у. на независимые (автономные) подсистемы; 2) находится алгебра инвариантности (а.и.) преобразованного уравнения; 3) если операторы $\{\hat{Q}_A\}$ а.и. удовлетворяют соотношениям (3), то устанавливается, какое представление алгебры Ли реализуют эти операторы в пространстве решений; 4) с помощью обратного преобразования находится а.и. исходного уравнения; 5) по а.и. вычисляется группа инвариантности д.у. согласно формулам

$$\begin{aligned} x'_\mu &= \exp\{i\hat{Q}_A\theta_A\}x_\mu \exp\{-i\hat{Q}_B\theta_B\}, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, n, \\ \Psi'(x) &= \exp\{i\hat{Q}_A\theta_A\}\Psi(x), \end{aligned} \quad (4)$$

где θ_A — параметры группы инвариантности.

2. Проиллюстрируем нелиевский алгоритм отыскания а.и. на примере двух систем уравнений. Рассмотрим систему восьми уравнений в частных производных второго порядка:

$$\hat{p}_0^2 \Psi(t, \mathbf{x}) = \hat{\mathcal{H}}^2(\hat{p}) \Psi(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^3; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}^2(\hat{p}) &= \Gamma_0 \Gamma_4 \hat{p}_a^2 + \sqrt{2} m \Gamma_0 \Gamma_a \hat{p}_a + \Gamma_0 \Gamma_5 m^2; \\ \hat{p}_0 &= i \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \hat{p}_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad x_0 \equiv t, \end{aligned} \quad (6)$$

$\Gamma_0, \Gamma_k, k = 1, 2, \dots, 6$, — (8×8) -матрицы, удовлетворяющие алгебре Клиффорда–Дирака, $\Psi(t, \mathbf{x})$ — вектор-функция с компонентами $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_8)$, m — постоянная величина.

Теорема 1. Система (5) инвариантна относительно 26-мерной алгебры Ли группы $P(1, 3) \otimes E(4) \otimes GL(4) \otimes GL(4)$, где $P(1, 3)$ — группа Пуанкаре, $E(4)$ — группа Евклида в четырехмерном пространстве, $GL(4)$ — группа всех невырожденных действительных (4×4) -матриц.

Доказательство. Символ $\mathcal{H}^2(p)$ оператора (6) является симметрической (8×8) -матрицей, поэтому его можно привести к диагональному виду. Это означает, что

и оператор $\hat{\mathcal{H}}^2(\hat{p})$, рассматриваемый как матрица, приводится к диагональному оператору. Такое приведение осуществляется с помощью унитарного оператора [2]

$$U = \exp \left\{ \frac{\pi}{4} \Gamma_0 \frac{\hat{\mathcal{H}}^2(\hat{p})}{\hat{E}^2(\hat{p})} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \Gamma_0 \frac{\hat{\mathcal{H}}^2(\hat{p})}{\hat{E}^2(\hat{p})} \right\}; \quad (7)$$

$$\hat{E}^2(\hat{p}) = \sqrt{\hat{\mathcal{H}}^2(\hat{p})} = \hat{p}_a^2 + m^2. \quad (8)$$

Осуществив над уравнением преобразование (7), приходим к системе

$$\hat{p}_0^2 \Phi(t, \mathbf{x}) = \Gamma_0 \hat{E}^2(p) \Phi(t, \mathbf{x}); \quad (9)$$

$$\Phi = U\Psi, \quad \Gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$ — единичная и нулевая (4×4) -матрицы.

Систему (9) можно записать в виде восьми незацепленных уравнений

$$(\hat{p}_0^2 - \hat{p}_a^2) \Phi_\mu(t, \mathbf{x}) = m^2 \Phi_\mu(t, \mathbf{x}), \quad \mu = 0, 1, 2, 3; \quad (11)$$

$$(\hat{p}_0^2 + \hat{p}_a^2) \Phi_{\mu+4}(t, \mathbf{x}) = -m^2 \Phi_{\mu+4}(t, \mathbf{x}), \quad (12)$$

где Φ_μ , $\Phi_{\mu+4}$ — компоненты вектор-функции Φ .

Из (10) ясно, что уравнение (9) инвариантно относительно 16 матриц:

$$S_{kl} = \frac{i}{4} (\Gamma_k \Gamma_l - \Gamma_l \Gamma_k), \quad \Gamma_0; \quad k, l = 1, 2, \dots, 6. \quad (13)$$

Кроме того, из (11) и (12) видно, что эта же система инвариантна относительно 10-мерной алгебры Ли группы $P(1, 3) \otimes E(4)$, базисные элементы которой имеют вид

$$J_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} J_{\mu\nu}^I \cdot \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{\mu\nu}^{II} \cdot \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad P_\mu = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \quad (14)$$

$$J_{\mu\nu}^I = x_\mu \hat{p}_\nu - x_\nu \hat{p}_\mu, \quad J_{ab}^{II} = x_a \hat{p}_b - x_b \hat{p}_a, \quad J_{0a}^{II} = i x_0 \hat{p}_a - x_a \hat{p}_0.$$

Алгебры инвариантности для исходного уравнения (5), т.е. операторы $\hat{Q}_A$ строятся по операторам (13) и (14) известным образом:

$$\hat{Q}_A = U^{-1} \hat{Q}_A^\Phi U, \quad A = 1, 2, \dots, 26, \quad (15)$$

где через $\hat{Q}_A^\Phi$ обозначены любой из операторов (13) и (14). Важно подчеркнуть, что все операторы

$$S'_{kl} = U^{-1} S_{kl} U, \quad \Gamma'_0 = U^{-1} \Gamma_0 U \quad (16)$$

являются интегральными, ограниченными операторами. Теорема доказана.

Замечание 1. Если после реализации первого шага алгоритма мы приходим к расщепленной системе дифференциальных уравнений, то к такой системе можно применить лиевскую методику.

3. Второй пример. Рассмотрим интегродифференциальную (псевдодифференциальную) систему шести уравнений:

$$\begin{aligned}\hat{p}_0 \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) &= |\hat{\mathbf{p}}| \mathbf{H}(t, \mathbf{x}), \\ \hat{p}_0 \mathbf{H}(t, \mathbf{x}) &= |\hat{\mathbf{p}}| \mathbf{E}(t, \mathbf{x}), \quad |\hat{\mathbf{p}}| = (\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2)^{1/2},\end{aligned}\tag{17}$$

где $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$, $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$ — вектор-функции.

Теорема 2. *Алгебрами инвариантности системы (17) является 9-мерная алгебра Ли группы $GL(3) \otimes GL(3)$ и 10-мерная алгебра Ли группы Пуанкаре.*

Доказательство. Система (17) с помощью матричного преобразования

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix},\tag{18}$$

где $\mathbf{1}$ — (3×3) -единичная матрица, приводится к распадающейся системе шести интегродифференциальных уравнений

$$\hat{p}_0 \Phi(t, \mathbf{x}) = Q_0 |\hat{\mathbf{p}}| \Phi(t, \mathbf{x}), \quad Q_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}.\tag{19}$$

Из (19) следует, что уравнение (17) инвариантно относительно 9-мерной алгебры Ли группы $GL(3) \otimes GL(3)$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что уравнение (19) инвариантно относительно следующих двух наборов десяти операторов, образующих алгебру Пуанкаре:

$$P_{\mu}^{\text{III}} = \hat{p}_{\mu} = ig_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}, \quad J_{\mu\nu}^{\text{III}} = x_{\mu} \hat{p}_{\nu} - x_{\nu} \hat{p}_{\mu},\tag{20}$$

$$\begin{aligned}P_0^{\text{IV}} &= |\hat{\mathbf{p}}| = (\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2)^{1/2}, \quad P_a^{\text{IV}} = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad a = 1, 2, 3, \\ J_{ab}^{\text{IV}} &= x_a \hat{p}_b - x_b \hat{p}_a, \quad J_{0a}^{\text{IV}} = x_0 \hat{p}_a - \frac{1}{2} (x_a |\hat{\mathbf{p}}| + |\hat{\mathbf{p}}| x_a).\end{aligned}\tag{21}$$

Замечание 2. Алгебра Пуанкаре, заданная интегродифференциальными операторами (21), порождает нелоренцовские преобразования для координат и времени. Действительно,

$$t' = \exp(iJ_{0a}^{\text{IV}} \theta_a) t \exp(-iJ_{0a}^{\text{IV}} \theta_a) = t,$$

т.е. время не меняется при переходе от одной инерциальной системы к другой. Это означает, что релятивистские уравнения движения допускают, помимо лоренцовских преобразований, при которых время изменяется, еще и преобразование с абсолютным временем, т.е. релятивистские уравнения допускают двойственную инвариантность. Более подробно см. [3, 5].

Замечание 3. Нетривиальная а.и. уравнения (1) может быть установлена с помощью диагонализации и в том случае, когда $\hat{L}(x, \mathbf{p})$ — абстрактный самосопряженный оператор, обладающий кратным (непростым) спектром. Чем больше кратность спектра оператора $\hat{L}(x, \mathbf{p})$, тем шире а.и. уравнения (1).

1. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978.
2. Фушич В.И., *Теор. и мат. физ.*, 1971, **7**, № 1, 3; препринт Ин-та теоретич. физики АН УССР, № 70-32, Киев, 1970.
3. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **11**, № 10, 508;
Фушич В.И., *ДАН*, 1976, **230**, № 3, 570.
4. Фушич В.И., Сергедя Ю.Н., *Укр. мат. журн.*, 1976, **26**, № 6, 836;
Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Math. Phys.*, 1978, **2**, 471.
5. Фушич В.И., В кн.: Теоретико-групповые методы в математической физике, Киев, 1978.