Пуанкаре-инвариантные дифференциальные уравнения для частиц произвольного спина

А.Г. НИКИТИН, В.И. ФУЩИЧ

The first and the second order differential equations have been deduced which describe the motion of relativistic particle with arbitrary spin. On the basis of these equations, the problem of the motion of the arbitrary spin particle in the homogeneous magnetic field has been solved exactly. The covariant position and spin operators have been obtained which are distinct from the Newton–Wigner and the Foldy–Wouthuysen operators. The approximate diagonalization of the Hamiltonian of the particle interacting with the external electromagnetic field has been carried out.

Выведены дифференциальные уравнения первого и второго порядка, описывающие движение релятивистской частицы с произвольным спином. На основе этих уравнений точно решена задача о движении частицы произвольного спина в однородном магнитном поле. Найдены ковариантные операторы координаты и спина частицы, отличные от известных операторов Ньютона–Вигнера и Фолди–Ваутхойзена. Осуществлена приближенная диагонализация гамильтониана частицы, взаимодействующей с внешним электромагнитным полем.

Введение

Во всех явно ковариантных релятивистских уравнениях первого порядка, описывающих движение частиц со спином $s > 1/2$, волновая функция имеет больше компонент, чем число возможных $2(2s+1)$ состояний свободной системы частица–античастица. Это "излишество" является, видимо, одной из причин появления в уравнениях Кеммера–Дэффина [1] ($s = 1$), Рариты–Швингера [2] ($s = 3/2$), описывающих поведение частиц во внешних электромагнитных полях, решений, соответствующих движению частиц с ненулевой массой со скоростью большей, чем скорость света в вакууме. К настоящему времени только уравнение Дирака, не имеющее лишних компонент, не приводит к указанным нефизический следствиям.

Такое исключительное положение уравнения Дирака послужило стимулом для построения уравнений движения вида

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,\boldsymbol{x}) = H(\boldsymbol{p},s)\Psi(t,\boldsymbol{x}), \qquad p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a} \tag{0.1}$$

для частицы с произвольным спином, где волновая функция Ψ имеет только $2(2s+1)$ компонент [3, 4]. Особенность уравнений (0.1) состоит в том, что гамильтониан $H(\boldsymbol{p},s)$ при $s > 1/2$ является интегродифференциальным оператором. Требование отсутствия лишних компонент у волновой функции и условие эрмитовости гамильтониана и других генераторов группы Пуанкаре относительно обычного скалярного произведения

$$(\Psi_1,\Psi_2) = \int d^3x\ \Psi_1^\dagger(t,\boldsymbol{x})\Psi_2(t,\boldsymbol{x}) \tag{0.2}$$

Теоретическая и математическая физика, 1978, **34**, № 3, С. 319–333.

приводят к нелокальным уравнениям движения (0.1) в конфигурационном пространстве. Это обстоятельство (нелокальность соответствующих гамильтонианов) сильно затрудняет применение уравнений вида (0.1) для описания поведения частиц со спином $s > 1/2$ во внешних электромагнитных полях. В [4] на основании уравнений (0.1) решена задача о взаимодействии частицы произвольного спина с внешним полем в предположении, что импульс частицы мал по сравнению с ее массой покоя, т.е. получено квазирелятивистское описание частицы во внешнем поле.

К аналогичным трудностям приводят уравнения, полученные Вивером, Хаммером, Гудом [6] и Мэтьюзом с сотрудниками [7]. Основное отличие этих уравнений от уравнений, полученных в [3, 4], состоит в том, что уравнения [6, 7] определены в пространстве со скалярным произведением

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x \Psi_1^\dagger(t, \boldsymbol{x}) M \Psi_2(t, \boldsymbol{x}), \tag{0.3}$$

где M — некоторый интегродифференциальный метрический оператор, зависящий от импульса и спиновых матриц.

Гуертин [8], развивая подход [3, 4], вывел уравнения вида (0.1), используя индефинитную метрику. Эти уравнения для $s > 1$ также являются интегродифференциальными.

Настоящая работа является продолжением статей [3, 4]. Исходя из требования, чтобы гамильтониан $H(\boldsymbol{p}, s)$ в (0.1) был дифференциальным оператором первого или второго порядка, найдены все возможные (с точностью до преобразований эквивалентности) пуанкаре-инвариантные уравнения для релятивистской частицы произвольного спина, допускающие, как и уравнение Дирака, стандартное введение взаимодействия с внешним полем. Волновая функция в дифференциальных уравнениях второго порядка имеет только $2(2s+1)$ компонент. Для нижайших целых спинов ($s = 0, 1$) эти уравнения совпадают с известными уравнениями Тамма–Сакаты–Такетани (ТСТ) [9]. При этом, как и в формализме ТСТ, гамильтониан $H(\boldsymbol{p}, s)$ не эрмитов относительно (0.2), но эрмитов в пространстве с индефинитной метрикой. Таким образом, индефинитность метрики — это цена, которую приходится платить за то, что гамильтониан $H(\boldsymbol{p}, s)$ в уравнении (0.1) является дифференциальным оператором, а волновая функция $\Psi(t, \boldsymbol{x})$ не имеет лишних компонент.

С использованием полученных уравнений точно решена задача о движении релятивистской частицы произвольного спина в однородном магнитном поле. Показано, что найденные уравнения не приводят к парадоксу нарушения причинности, свойственному, например, уравнению Рариты–Швингера [2].

1. Постановка задачи

Дифференциальные уравнения движения частицы произвольного спина мы получим, исходя из следующего представления генераторов P_μ, $J_{\mu\nu}$ группы $P(1,3)$ [5]:

$$\begin{aligned} &P_0 = H_s, \qquad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \\ &J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \qquad J_{0a} = x_0 p_a - \frac{1}{2}[x_a, H_s]_+ + \lambda_a, \qquad x_0 = t, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $[A,B]_+ = AB + BA$, H_s — неизвестный пока дифференциальный оператор, включающий производные по $\partial/\partial x_a$ не выше второго порядка,

$$S_{ab} = S_c = \begin{pmatrix} \hat{S}_c & 0 \\ 0 & \hat{S}_c \end{pmatrix}, \qquad (a,b,c) \text{ цикл } (1,2,3), \tag{1.2}$$

$\hat{S}_c$ — генераторы неприводимого представления $D(s)$ группы $O(3)$, λ_α — некоторые операторы, явный вид которых определяется требованием, чтобы генераторы (1.1) удовлетворяли алгебре Пуанкаре $P(1,3)$.

Формулы (1.1) задают самый общий вид генераторов группы Пуанкаре, соответствующих локальным преобразованиям $2(2s+1)$-компонентной волновой функции системы “частица + античастица” при повороте системы координат. Представления вида (1.1), где H_s при $s > 1$ принадлежит классу интегродифференциальных операторов, рассматривались ранее в [8].

Определение. *Будем, говорить, что уравнение (0.1) пуанкаре-инвариантно и описывает свободное движение частицы с массой m и спином s, если операторы P_a, $J_{\mu\nu}$ (1.1) и гамильтониан H_s удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры $P(1,3)$:*

$$[P_\mu, P_\nu]_- = 0, \qquad [P_\mu, J_{\mu\nu}]_- = i(g_{\mu\nu}P_\lambda - g_{\mu\lambda}P_\nu), \tag{1.3а}$$

$$[J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}]_- = i(g_{\mu\sigma}J_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}J_{\mu\sigma} - g_{\mu\lambda}J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\lambda}), \tag{1.3б}$$

$$P_\mu P^\mu \equiv H_s^2 - p_a^2 = m^2, \tag{1.3в}$$

$$W_\mu W^\mu \Psi = m^2 s(s+1)\Psi, \tag{1.3г}$$

где $[A,B]_- = AB - BA$, $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор, $g_{\nu\nu} = (-1,1,1,1)$, W_μ — вектор Любанского–Паули

$$W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\sigma\lambda}J_{\nu\sigma}P_\lambda. \tag{1.4}$$

Из сказанного следует, что если мы найдем все такие операторы H_s и λ_a, для которых будут удовлетворяться соотношения (1.3), то тем самым будет решена задача о построении пуанкаре-инвариантных уравнений вида (0.1). Действительно, если удовлетворяются соотношения (1.3), то выполняются условия инвариантности уравнения (0.1) относительно алгебры Пуанкаре $P(1,3)$

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - H_s, Q_A\right]_- \Psi = 0, \tag{1.5}$$

где Q_A — произвольный генератор группы $P(1,3)$.

2. Дифференциальные операторы H_s второго порядка

Решение нашей задачи приведем в виде следующей теоремы.

Теорема. *Все возможные (с точностью до преобразований эквивалентности, осуществляемых числовыми матрицами) дифференциальные операторы второго порядка H_s, удовлетворяющие алгебре $P(1,3)$ (1.3), задаются формулами*

$$H_s = \sigma_1 m + \sigma_3 k_1 \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} + \frac{1}{2m}(\sigma_1 - i\sigma_2)\left[p^2 - (k_1\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2\right], \tag{2.1}$$

$$H_1 = \sigma_1\left(m + \frac{p^2}{2m}\right) - \frac{i}{2m}\sigma_2[p^2 + 2k_2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2] + \frac{1}{m}\sigma_3\sqrt{k_2(k_2-1)}\,(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2,$$
$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, \tag{2.2}$$

$$H_1 = \sigma_1\left[m + \frac{p^2}{2m} - \frac{(k_3\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2}{2m}\right] + \sigma_3 k_3\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} - \frac{i}{2m}\sigma_2\left[p^2 + (k_3-2)(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2\right], \tag{2.3}$$

$$H_{3/2} = \sigma_1\left(m + \frac{p^2}{2m}\right) + \frac{ik_4}{2m}\sigma_2\left[(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2 - \frac{5}{4}p^2\right] + \frac{1}{2m}\sqrt{k_4^2-1}\,\sigma_3 p^2, \tag{2.4}$$

$$H_{3/2} = \sigma_1\left[m + \frac{p^2}{2m} - \frac{(k_5\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2}{2m}\right] + \sigma_3 k_5\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} - \\ - \frac{i}{8m}\sigma_2\left[\left(5k_5^2-4\right)(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2 - \left(9k_5^2-5\right)p^2\right], \tag{2.5}$$

где σ_a — $2(2s+1)$-рядные матрицы Паули, коммутирующие с S_a, k_l ($l = 1, 2, \ldots, 5$) — произвольные комплексные параметры.

Доказательство может быть проведено по схеме, подробно описанной в [3–5]. Ради краткости мы его опускаем. Приведем только явный вид операторов λ_a, при которых генераторы (1.1), (2.1)–(2.5) удовлетворяют соотношениям (1.3) (в чем можно убедиться непосредственной проверкой).

В случае, когда гамильтониан H_s имеет вид (2.1),

$$\lambda_a = \left(1 - \frac{k_1}{2}\right)\left[i\sigma_3 S_a - \frac{1}{2m}(\sigma_1 - i\sigma_2)(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{S})_a\right]. \tag{2.6}$$

В случае, когда H_s задается одной из формул (2.2)–(2.5),

$$\lambda_a = \frac{i}{2EB_s}\left\{p_a\left(2 + \left[\frac{H_s}{E}, \sigma_1\right]_-\right) - 2\dot{x}_a H_s - E[\dot{x}_a, \sigma_1]_-\right\} + \\ + \frac{H_s}{E(E+m)}\left[S_{ab}p_b - \frac{i}{EB_s}S_{ab}p_b(\sigma_1 E + H_s)\right], \tag{2.7}$$

где $B_s = 2E + [H_s, \sigma_1]_+$, $E = \left(p^2 + m^2\right)^{1/2}$, $p = \left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right)^{1/2}$, $\dot{A} = i[H_s, A]_-$.

Замечание 1. Из формул (2.1)–(2.5) видно, что соотношения (1.3) определяют гамильтонианы релятивистской частицы с точностью до постоянных комплексных чисел k_l ($l = 1, 2, \ldots, 5$). Уравнение (0.1) с такими гамильтонианами инвариантно относительно преобразования “сильного отражения” $\Theta = CPT$, но, вообще говоря, не инвариантно относительно P-, C-, и T-преобразований. Инвариантность уравнения (0.1) относительно любого из этих преобразований может быть обеспечена специальным выбором чисел k_i. Так, например, если в формуле (2.1) для спина $s = 1/2$ положить $k_1 = 1/s$, в формулах (2.2)–(2.5) положить $k_2 = 1$, $k_3 = 0$, $k_4 = 1$, $k_5 = 0$, то получим P-, C-, T-инвариантные гамильтонианы вида

$$H_0 = \sigma_1\left(m + \frac{p^2}{2m}\right) - i\sigma_2\frac{p^2}{2m}, \tag{2.8}$$

$$H_{1/2} = \sigma_1 m + 2\sigma_3\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}, \tag{2.9}$$

$$H_1 = \sigma_1\left(m + \frac{p^2}{2m}\right) + i\sigma_2\left(\frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2}{m} - \frac{p^2}{2m}\right), \tag{2.10}$$

$$H_{3/2} = \sigma_1\left(m + \frac{p^2}{2m}\right) + i\sigma_2\left[\frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2}{2m} - \frac{5p^2}{8m}\right]. \tag{2.11}$$

Оператор (2.9) совпадает с гамильтонианом Дирака, а операторы (2.8), (2.10) — с гамильтонианами ТСТ [9] для частиц со спином $s = 0, 1$. Оператор (2.1) для спина $s = 1/2$ рассматривался ранее в [10].

Замечание 2. Все генераторы группы $P(1,3)$, определяемые формулами (1.1), (2.1), (2.6), принадлежат классу дифференциальных операторов. При $k_1 = 2$ генераторы J_{0a} (1.1), (2.6) принимают особо простой вид [3, 4]

$$J_{0a} = x_0 p_a - \frac{1}{2}[x_a, H_s]_+. \tag{2.12}$$

Замечание 3. Гамильтонианы (2.1)–(2.5) и остальные генераторы (1.1), (1.2), (2.6), (2.7) группы $P(1,3)$ могут быть приведены к канонической форме Фолди–Широкова [11, 12] и [3, 4]. Это достигается посредством изометрического преобразования

$$\begin{aligned}
&P_0 \to P_0^k = VP_0V^{-1} = \sigma_1 E, \qquad P_a \to P_a^k = VP_aV^{-1} = p_a,\\
&J_{ab} \to J_{ab}^k = VJ_{ab}V^{-1} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab},\\
&J_{0a} \to J_{0a}^k = VJ_{0a}V^{-1} = x_0 p_a - \frac{1}{2}[x_a, P_0^k]_+ - \sigma_1\frac{S_{ab}p_b}{E+m},\\
&E = (m^2 + p^2)^{1/2},
\end{aligned} \tag{2.13}$$

где операторы V имеют вид

$$\begin{aligned}
&V = V_1V_2V_3, \qquad V_1 = \exp\left(\sigma_1\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{p}\operatorname{arth}\frac{p}{E}\right),\\
&V_2 = \frac{1}{2m}[E\lambda^+ + m\lambda^- - 2\sigma_1\lambda^-\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}],\\
&V_3 = \exp\left[\frac{1}{2m}\sigma_1\lambda^+(k_1 - 2)\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}\right], \qquad \lambda^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \sigma_3),
\end{aligned}$$

для гамильтонианов (2.1) и

$$V = (E + \sigma_1 H_s)\left(2E^2 + E(H_s, \sigma_1]_+\right)^{1/2}$$

для гамильтонианов (2.2)–(2.5).

3. Дифференциальные гамильтоновы уравнения первого порядка

По аналогии с теорией Дирака для электрона постулируем, что в уравнении (0.1) гамильтониан $\hat{H}_s$ релятивистской частицы с произвольным спином является дифференциальным оператором, включающим производные по пространственным переменным не выше первого порядка

$$\hat{H}_s = \hat{\Gamma}_a^{(s)}p_a + \hat{\Gamma}_0^{(s)}m, \tag{3.1}$$

где $\hat{\Gamma}_\mu^{(s)}$ — некоторые числовые матрицы.

Генераторы представления группы Пуанкаре, которое реализуется на решениях уравнения (0.1) с гамильтонианом (2.1), выберем в виде

$$P_0 = \hat{H}_s, \qquad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \tag{3.2}$$

где $S_{\mu\nu}$ — матрицы, образующие конечномерное представление (в общем случае приводимое) алгебры $O(1,3)$. Формулы (3.2) задают самый общий вид генераторов группы $P(1,3)$, соответствующий локальным преобразованиям волновой функции.

Определить все возможные гамильтонианы вида (3.1) означает найти все такие матрицы $\hat{\Gamma}_\mu^{(s)}$ и $S_{\mu\nu}$, что операторы (3.1), (3.2) удовлетворяют алгебре Пуанкаре (1.3).

Покажем, что искомые уравнения движения частицы со спином s и массой m имеют вид

$$\hat{H}_s\Psi = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi, \qquad \hat{H}_s = \Gamma_0^{(s)}\Gamma_a^{(s)}p_a + \Gamma_0^{(s)}m, \tag{3.3а}$$

$$\hat{P}_s\Psi = 0, \qquad \hat{P}_s = P_s + \frac{1}{2m}\left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right)\left[\Gamma_\mu^{(s)}p^\mu, P_s\right]_-, \tag{3.3б}$$

$$P_s = \frac{1}{4s}\left[S_{ab}^2 - 2s(s-1)\right], \qquad S_{ab}^2 = \sum_{a,b} S_{ab}S_{ab}, \tag{3.3в}$$

где $\Gamma_\mu^{(s)}$, S_{ab} — $8s$-рядные матрицы, задаваемые соотношениями

$$\begin{gathered}
[\Gamma_\mu^{(s)}, \Gamma_\nu^{(s)}]_+ = 2g_{\mu\nu}, \qquad \Gamma_4^{(s)} = i\Gamma_0^{(s)}\Gamma_1^{(s)}\Gamma_2^{(s)}\Gamma_3^{(s)}, \qquad S_{\mu\nu} = \tau_{\mu\nu} + j_{\mu\nu}, \\
[\tau_{\mu\nu}, j_{\lambda\sigma}]_- = 0, \qquad \tau_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\Gamma_\mu^{(s)}\Gamma_\nu^{(s)}, \qquad j_{ab} = j_c, \qquad j_{0a} = ij_a, \\
[j_a, j_b]_- = ij_c, \qquad \sum_a j_a^2 = j(j+1) = s(s-1),
\end{gathered} \tag{3.4}$$

т.е. матрицы $\Gamma_\mu^{(s)}$, как и в случае уравнения Дирака, удовлетворяют алгебре Клиффорда, а матрицы $S_{\mu\nu}$ являются генераторами представления $\left[D\left(\frac{1}{2},0\right) \oplus D\left(0,\frac{1}{2}\right)\right] \oplus D\left(s-\frac{1}{2},0\right)$ группы $O(1,3)$. Действительно, используя (3.4), нетрудно убедиться, что гамильтониан (3.3а) и генераторы (3.2) удовлетворяют условиям (1.3а), (1.3б). Что же касается условия (1.3г), то согласно (1.4), (3.2)–(3.4) его можно записать в виде (3.3б)

$$\frac{1}{2s}\left[\frac{1}{m^2}W_\mu W^\mu - s(s-1)\right]\Psi \equiv \hat{P}_s\Psi = \Psi,$$

где $\hat{P}_s$ — оператор проектирования на подпространство, соответствующее фиксированному спину s [5].

Используя тождество

$$\left(1 + \Gamma_4^{(s)}\right)P_s = \frac{1}{8s}\left[S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - 4s(s-1)\right]\left(1 + \Gamma_4^{(s)}\right),$$

уравнения (2.3) можно записать в явно ковариантной форме

$$\left(\Gamma_\mu^{(s)}p^\mu - m\right)\Psi = 0, \tag{3.5а}$$

$$\left(\Gamma_\mu^{(s)} p^\mu + m\right)\left(1+\Gamma_4^{(s)}\right)[S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - 4s(s-1)]\Psi = 16ms\Psi. \tag{3.5б}$$

В силу изложенного выше уравнения (3.5) пуанкаре-инвариантны и описывают свободное движение частицы с фиксированным спином s и массой m.

Замечание 1. Уравнения (2.5) определены и для случая $m = 0$. Налагая при этом на волновую функцию Ψ пуанкаре-инвариантное дополнительное условие $\left(1-\Gamma_4^{(s)}\right)\Psi = 0$, получаем из (3.5) уравнения движения для безмассовых частиц произвольного спина, которые при $s = 1/2$ эквивалентны уравнению Вейля для нейтрино, а при $s = 1$ — уравнениям Максвелла для электромагнитного поля в вакууме [13].

Замечание 2. Посредством преобразования $\Psi \to \Phi = W\Psi$, где

$$W = \exp\left(\frac{\Gamma_a^{(s)} p_a}{p}\,\mathrm{arctg}\,\frac{p}{m}\right)\exp\left(\Gamma_0^{(s)}\frac{j_a p_a}{p}\,\mathrm{arth}\,\frac{p}{E}\right),$$

уравнения (2.3), (3.5) могут быть приведены к диагональной форме

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi = \Gamma_0^{(s)} E\Phi, \qquad P_s\Phi = \Phi.$$

На решениях уравнений (3.6) генераторы группы $P(1,3)$ имеют каноническую форму (2.1).

Отметим, что в [14] также предлагались $8s$-компонентные дифференциальные уравнения первого порядка, описывающие движение свободной частицы с произвольным спином s. Эти уравнения, в отличие от (5.1), (5.2), становятся несовместными при учете взаимодействия частицы с внешним полем.

4. Ковариантные операторы координаты и спина

При переходе к новой инерциальной системе отсчета операторы физических величин N_i (координаты, спина и т.д.) преобразуются следующим образом:

$$N_i \to N_i' = \exp(iQ_l\theta_l)N_i\exp(-iQ_l\theta_l),$$

где Q_l $(l = 1, 2, \ldots, 10)$ — генераторы группы Пуанкаре, θ_l — параметры преобразования.

Одна из трудностей, с которой приходится сталкиваться в представлениях типа (1.1) (когда генераторы J_{0a} нельзя записать в виде суммы коммутирующих "спиновой" и "орбитальной" частей), состоит в том, что оператор x_μ имеет нековариантный закон преобразования, при котором не сохраняется величина интервала, $x_0^2 - x_a^2 \neq (x_0')^2 - (x_a')^2$. Следовательно, x_μ нельзя интерпретировать как ковариантный оператор координаты.

Ниже мы определим ковариантный оператор координаты в представлении (1.1), (2.1). Тем самым в принципе будет решена задача для произвольного представления (1.1), (2.6), поскольку генераторы J_{0a} (2.12) и (1.1), (2.6) связаны преобразованием эквивалентности $J_{0a} \to VJ_{0a}V^{-1}$, где

$$V = \exp\left[(\sigma_1 - i\sigma_2)(2-k_1)\frac{1}{2m}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}\right].$$

Перейдем к представлению, в котором генераторы J_{0a} (2.12) имеют локально-ковариантную форму

$$\hat{J}_{0a} = x_0 p_a - x_a p_0 + S_{0a}, \qquad S_{0a} = i\sigma_3 S_a, \qquad p_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}. \tag{4.1}$$

Это достигается посредством преобразования

$$\hat{J}_{0a} = V J_{0a} V^{-1}, \qquad V = \exp\left[-\frac{i}{2m}(\sigma_2 + i\sigma_2)(2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} - p_0)\right]. \tag{4.2}$$

В представлении (4.1) ковариантный оператор координаты $\hat{X}_\mu$ можно выбрать в виде $\hat{X}_\mu = x_\mu$. С помощью преобразования, обратного (3.2), получаем явный вид этих операторов в исходном представлении (2.12)

$$\hat{X}_\mu = \hat{V}^{-1} X_\mu \hat{V} = x_\mu + \frac{1}{m}(i\sigma_1 + \sigma_2)\xi_\mu, \qquad \xi_a = S_a, \qquad \xi_0 = \frac{1}{2}\sigma_3. \tag{4.3}$$

При переходе к новой инерциальной системе координат операторы X_μ преобразуются как компоненты четырехвектора и удовлетворяют каноническим перестановочным соотношениям

$$[p_\mu, X_\nu]_- = ig_{\mu\nu}, \qquad [X_\mu, X_\nu]_- = 0. \tag{4.4}$$

Все это позволяет сделать вывод, что X_μ (4.3) можно интерпретировать как ковариантный оператор координаты частицы.

В случае $s = 1/2$ операторы (4.3) принимают явно ковариантную форму

$$X_\mu = x_\mu + \frac{i}{2m}(1 + \gamma_4)\gamma_\mu, \tag{4.5}$$

где $\gamma_4 = \sigma_3$, $\gamma_0 = \sigma_1$, $\gamma_a = -2i\sigma_2 S_a$ — матрицы Дирака. В силу изложенного выше оператор (4.5) может быть выбран в качестве ковариантного оператора координаты дираковской частицы. Интересно отметить, что при таком определении координаты оператор скорости

$$\dot{X}_a = -i[H_{1/2}, X_a]_- = (1 + \gamma_4)\gamma_0 \frac{p_a}{m}$$

(где $H_{1/2}$ — гамильтониан Дирака (2.9)) имеет сплошной спектр и удовлетворяет соотношению $[\dot{X}_a, \dot{X}_b] = 0$. При этом, однако, $[H_{1/2}, \dot{X}_a]_- \neq 0$.

Подчеркнем, что оператор (4.5) существенно отличается от операторов координаты, предложенных ранее Ньютоном и Вигнером [15], Фолди и Ваутхойзеном [16] и многими другими [17]. Это отличие состоит в том, что оператор (4.5) локален и преобразуется как ковариантный четырехвектор, в то время как операторы координаты, предложенные в [15–17], принадлежат классу нелокальных интегродифференциальных операторов с нековариантным законом преобразования.

Приведем явный вид ковариантного оператора спина $\Sigma_{\mu\nu}$ частицы, описываемой уравнением (0.1) с гамильтонианом (2.1):

$$\Sigma_{ab} = S_{ab} + \frac{1}{2m}(i\sigma_1 + \sigma_2)S_{cd}p_d, \qquad (a, b, c) = (1, 2, 3),$$

$$\Sigma_{0a} = i\sigma_3 S_{bc} - \frac{1}{m}(i\sigma_1 + \sigma_2)[2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} - p_0, S_{bc}]_+.$$

По аналогии с (4.1)–(4.3) можно показать, что операторы $\Sigma_{\mu\nu}$ преобразуются как ковариантный тензор второго ранга, а оператор Σ_{ab} коммутирует с гамильтонианом и является интегралом движения.

Отметим еще, что оператор координаты частицы, описываемой уравнениями (3.5), может быть получен из (4.5) с помощью замены $\gamma_k \to \Gamma_k^{(s)}$.

5. Уравнение для заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле

Можно показать, что введение минимального электромагнитного взаимодействия непосредственно в уравнения (3.3) или (3.5) приводит к тому, что как уравнения (3.3), так и уравнения (3.5) становятся несовместными. Чтобы преодолеть эту трудность, запишем (3.3) в виде одного уравнения

$$\left[\hat{P}_s\left(i\frac{\partial}{\partial t}-\hat{H}_s\right)+\varkappa\left(1-\hat{P}_s\right)\right]\Psi=0, \tag{5.1}$$

где $\varkappa$ — произвольный параметр. Эквивалентность (5.1) и (3.3) следует из соотношений

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t}-\hat{H}_s,\hat{P}_s\right]_-=0, \qquad \hat{P}_s\hat{P}_s=\hat{P}_s.$$

Явно ковариантная система (3.5), в свою очередь, может быть записана в виде

$$\begin{gathered}\left[B_s\left(\Gamma_\mu^{(s)}p^\mu-m\right)-\varkappa(1-B_s)\right]\Psi=0,\\ B_s=\frac{1}{16ms}\left(\Gamma_\mu^{(s)}p^\mu+m\right)\left(1+\Gamma_4^{(s)}\right)[S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}-2s(s-1)],\end{gathered} \tag{5.2}$$

поскольку

$$\left[B_s,\Gamma_\mu^{(s)}p^\mu-m\right]_-\Psi=0, \qquad B_sB_s=B_s.$$

Сделаем в (5.1), (5.2) замену $p_\mu\to\pi_\mu=p_\mu-eA_\mu$, где A_μ — вектор-потенциал электромагнитного поля, и покажем, что в результате (5.1) и (5.2) сводятся к системе явно ковариантных дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих причинное движение заряженной частицы произвольного спина во внешнем поле. Поскольку уравнения (5.1) и (5.2) в конечном итоге приводят к одинаковым результатам, мы рассмотрим только уравнение (5.1), которое принимает вид

$$\left\{\hat{P}_s(\boldsymbol{\pi})[\pi_0-\hat{H}_s(\boldsymbol{\pi})]+\varkappa[1-\hat{P}_s(\boldsymbol{\pi})]\right\}\Psi=0, \tag{5.3}$$

$$\hat{H}_s(\boldsymbol{\pi})=\Gamma_0^{(s)}\Gamma_a^{(s)}\pi_a+\Gamma_0^{(s)}m, \quad \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi})=P_s+\frac{1}{2m}\left(1-\Gamma_4^{(s)}\right)\left[\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu,P_s\right]_-. \tag{5.4}$$

Умножив (5.3) на $\hat{P}_s(\boldsymbol{\pi})$ и $\left[1-\hat{P}_s(\boldsymbol{\pi})\right]$ и используя тождества

$$\begin{gathered}\left[\pi_0-\hat{H}_s(\boldsymbol{\pi}),\hat{P}_s(\boldsymbol{\pi})\right]_-\hat{P}_s(\boldsymbol{\pi})\equiv\frac{1}{4m}\Gamma_0^{(s)}\left(1-\Gamma_4^{(s)}\right)\left(\frac{1}{s}S_{\mu\nu}-i\Gamma_\mu^{(s)}\Gamma_\nu^{(s)}\right)F_{\mu\nu}\hat{P}_s(\boldsymbol{\pi}),\\ \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi})\hat{P}_s(\boldsymbol{\pi})=\hat{P}_s(\boldsymbol{\pi}), \qquad F_{\mu\nu}=-[\pi_\mu,\pi_\nu]_-.\end{gathered}$$

приходим к системе уравнений

$$
\begin{aligned}
&i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,\boldsymbol{x}) = \hat{H}_s(\boldsymbol{\pi},A_0)\Psi(t,\boldsymbol{x}),\\
&\hat{H}_s(\boldsymbol{\pi},A_0) = \Gamma_0^{(s)}\Gamma_a^{(s)}\pi_a + \Gamma_0^{(s)}m + eA_0 + \\
&\qquad + \frac{1}{4m}\Gamma_0^{(s)}\left(1-\Gamma_4^{(s)}\right)\left[\frac{1}{s}S_{\mu\nu} - i\Gamma_\mu^{(s)}\Gamma_\mu^{(s)}\right]F_{\mu\nu},
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

$$
\left\{P_s + \frac{1}{2m}\left(1-\Gamma_4^{(s)}\right)\left[\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu, P_s\right]_-\right\}\Psi = 0,
\tag{5.6}
$$

которая, как и (3.3), может быть записана в явно ковариантной форме

$$
\left[\left(\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu - m\right) + \frac{1}{4m}\left(1-\Gamma_4^{(s)}\right)\left(\frac{1}{s}S_{\mu\nu} - i\Gamma_\mu^{(s)}\Gamma_\nu^{(s)}\right)F_{\mu\nu}\right]\Psi = 0,
\tag{5.7}
$$

$$
\left(m + \Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu\right)\left(1-\Gamma_4^{(s)}\right)\left[S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - 4s(s-1)\right]\Psi = 16ms\Psi.
\tag{5.8}
$$

Покажем, что уравнения (5.7), (5.8) не приводят к нарушению причинности. Для этого сделаем замену

$$
\Psi(t,\boldsymbol{x}) = V\Psi(t,\boldsymbol{x}), \qquad V = \exp\left[\left(1-\Gamma_4^{(s)}\right)\frac{1}{2m}\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu\right].
\tag{5.9}
$$

Подставив (5.9) в (5.7) и умножив результат слева на оператор

$$
F = m + \frac{1}{2}\left(\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu - \frac{1}{sm}\tilde{S}_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{m^2}\pi_\mu\pi^\mu\right)\left(1-\Gamma_4^{(s)}\right),
$$

где $\tilde{S}_{ab} = S_{ab}$, $\tilde{S}_{0a} = iS_{bc}$, приходим к уравнению

$$
\left(\pi_\mu\pi^\mu - m^2 - \frac{1}{2s}\tilde{S}_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)\Phi(t,\boldsymbol{x}) = 0.
\tag{5.10}
$$

Из (5.8), (5.9) получаем дополнительное условие для Φ в виде

$$
P_s\Phi = \Phi \qquad \text{или} \qquad \frac{1}{2}S_{ab}^2\Phi = s(s+1)\Phi.
\tag{5.11}
$$

Формулы (5.10)–(5.11) обобщают уравнение Зайцева–Фейнмана–Гелл-Манна [18] для $s = 1/2$ на случай частицы произвольного спина. Решения $\Phi(t,\boldsymbol{x})$ этого уравнения, как известно [19], описывают причинное распространение волн (с досветовой скоростью). Таковы же, очевидно, и свойства решений $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ уравнений (5.7), (5.8), связанных с $\Phi(t,\boldsymbol{x})$ преобразованием эквивалентности (5.9).

Таким образом, мы показали, что уравнения (5.7), (5.8) описывают движение заряженной релятивистской частицы с произвольным спином во внешнем электромагнитном поле и не приводят к нарушению принципа причинности. Отметим еще, что уравнения (5.7), (5.8) допускают лагранжеву формулировку. Действительно, выберем плотность лагранжиана $L(x)$ в виде

$$
\begin{aligned}
L(x) = &\left(m\bar{\Psi}' + i\frac{\partial\bar{\Psi}'}{\partial x_\mu}\check{\Gamma}_\mu^{(s)}\right)\left(1+\check{\Gamma}_4^{(s)}\right)\times\\
&\times\left[S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\Psi - 4s(s-1)\right]\bar{\Psi}i\check{\Gamma}_\lambda^{(s)}\frac{\partial\Psi'}{\partial x_\lambda} + 16ms\bar{\Psi}'\Psi',
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

где

$$\Psi' = \begin{pmatrix} \Psi \\ \chi \end{pmatrix}, \qquad \bar{\Psi}' = \Psi'^{\dagger}\check{\Gamma}_0^{(s)}\check{\Gamma}_5^{(s)},$$

Ψ и χ — $8s$-компонентные функции, а $\check{\Gamma}_\mu^{(s)}$, $\check{S}_{\mu\nu}$ — матрицы размерности $16s \times 16s$

$$\check{\Gamma}_k^{(s)} = \begin{pmatrix} \Gamma_k^{(s)} & 0 \\ 0 & \Gamma_k^{(s)} \end{pmatrix}, \qquad \check{\Gamma}_0^{(s)} = \begin{pmatrix} \Gamma_0^{(s)} & 0 \\ 0 & -\Gamma_0^{(s)} \end{pmatrix},$$

$$\check{\Gamma}_5^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_0^{(s)} \\ \Gamma_0^{(s)} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \check{S}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} S_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & S_{\mu\nu} \end{pmatrix},$$

Используя принцип минимального действия, получаем из (5.12) уравнения (3.5) для функции Ψ и уравнения, комплексно-сопряженные (3.5) для функции χ. Сделав в (5.12) минимальную замену $\dfrac{\partial}{\partial x_\mu} \to \dfrac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA_\mu$, приходим к уравнениям (5.7), (5.8).

6. Разложение по степеням $1/m$

Гамильтониан (5.5) может иметь как положительные, так и отрицательные собственные значения. С помощью серии последовательных преобразований мы получим из (5.5) уравнение для состояний с положительной энергией подобно тому, как это было сделано Фолди и Ваутхойзеном [16] для уравнения Дирака. При этом оператор $\hat{H}_s(\pi, A_0)$ будет представлен в виде ряда по степеням $1/m$, удобном для вычислений по теории возмущений.

Основная трудность при диагонализации уравнений (5.5), (5.6) состоит в том, что необходимо найти преобразования, одновременно приводящие к диагональной форме два различных уравнения. Мы диагонализируем сначала дополнительное условие (5.6), а затем, используя операторы, коммутирующие с преобразованным уравнением (5.6), приведем к диагональной форме уравнение (5.7).

Подвергнем волновую функцию $\Psi(t, \boldsymbol{x})$ преобразованию $\Psi \to \widetilde{\Psi} = V\Psi$, где

$$V = \exp\left[\frac{1}{2m}\left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right)\left(\Gamma_a^{(s)}\pi_a - k_1\Gamma_0^{(s)}S_a\pi_a\right)\right]. \tag{6.1}$$

Подействовав оператором (6.1) слева на (5.5), (5.6), получаем уравнение для $\widetilde{\Psi}$

$$\begin{gathered} H_s(\boldsymbol{\pi}, A_0)\widetilde{\Psi} = i\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\Psi}, \\ H_s(\boldsymbol{\pi}, A_0) = \Gamma_0^{(s)}m + k_1\Gamma_4^{(s)}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi} + \\ + \frac{1}{2m}\Gamma_0^{(s)}\left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right)\left[\pi^2 - (k_1\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2 + \frac{1}{s}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{H} - i\boldsymbol{E} + ik_1\boldsymbol{E})\right], \end{gathered} \tag{6.2}$$

$$P_s\widetilde{\Psi} = \widetilde{\Psi} \qquad \text{или} \qquad \frac{1}{2}S_{ab}\widetilde{\Psi} = s(s+1)\widetilde{\Psi}, \tag{6.3}$$

где $H_a = -i[\pi_b, \pi_c]_-$ и $E_a = -[\pi_0, \pi_a]_-$ — напряженности магнитного и электрического полей, P_s — проектор (3.3c).

Из (6.3), (3.4) заключаем, что волновая функция $\widetilde{\Psi}$ имеет $2(2s+1)$ отличных от нуля компонент. Матрицы S_{ab} и коммутирующие с ними матрицы $\Gamma_0^{(s)}$, $\Gamma_4^{(s)}$ на множестве таких функций можно представить в виде

$$S_{ab} \sim S_c = \begin{pmatrix} s_c & 0 \\ 0 & s_c \end{pmatrix}, \ \Gamma_0^{(s)} \sim \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \ \Gamma_4^{(s)} \sim \sigma_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

где s_c — генераторы представления $D(s)$ группы $O(3)$, I и 0 — $(2s+1)$-рядные единичная и нулевая матрицы. Подставив (6.4) в (6.2), получаем гамильтониан $H_s(\boldsymbol{\pi}, A_0)$ в форме

$$\begin{aligned} &H_s(\boldsymbol{\pi}, A_0) = \sigma_1 m + k_1 \sigma_3 \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi} + \\ &\quad + \frac{1}{2m}(\sigma_1 - i\sigma_2)\left\{\pi^2 - (k_1\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 + \frac{e}{s}\boldsymbol{S}[\boldsymbol{H} - i(1-k_1 s)\boldsymbol{E}]\right\} + eA_0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Формула (6.5) обобщает гамильтониан свободной частицы произвольного спина (2.1) на случай взаимодействия с внешним электромагнитным полем. Таким образом, исходя из явно ковариантных уравнений (5.7), (5.8), мы получили рецепт введения взаимодействия в пуанкаре-инвариантные уравнения без лишних компонент, найденные в разделе 1.

Преобразуем (6.5) к диагональной форме. Как и в случае уравнения Дирака [16], это можно осуществить только приближенно для $\pi_\mu \ll m$. Совершая серию последовательных преобразований

$$\begin{aligned} &H_s(\boldsymbol{\pi}, A_0) \to V_3 V_2 V_1 H_s(\boldsymbol{\pi}, A_0) V_1^{-1} V_2^{-1} V_3^{-1} = H_s'(\boldsymbol{\pi}, A_0), \\ &V_1 = \exp\left(-i\sigma_2 \frac{k_1 \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}\right), \\ &V_2 = \exp\left\{\frac{1}{4m^2}\sigma_3\left[\pi^2 - (k_1\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - \frac{e}{s}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H} + ie\left(\frac{1}{s} - k_1\right)\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}\right]\right\}, \\ &V_3 = \exp\left\{-\frac{i}{m^3}\left[\frac{1}{12}(k_1\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^3 + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \frac{1}{8}\left[\pi^2 - (k_1\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - \frac{e}{s}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H} + \frac{ie}{s}(1 - sk_1)\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}, \pi_0\right]_-\right]\right\} \end{aligned} \quad (6.6)$$

и пренебрегая членами порядка $1/m^3$, получаем

$$\begin{aligned} &H_s'(\boldsymbol{\pi}, A_0) = \sigma_1\left(m + \frac{\pi^2}{2m} - \frac{e\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}}{2sm}\right) + eA_0 - \frac{e}{16m^2s^2}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{E}) - \\ &\quad - \frac{e}{24m^2s^2}\left[\frac{1}{2}Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b} + s(s+1)\operatorname{div}\boldsymbol{E}\right] + \\ &\quad + \frac{ie(2s-1)}{8m^2s^2}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H} - \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi}) + \frac{e}{24m^2s^2}Q_{ab}\frac{\partial H_a}{\partial x_b}, \\ &Q_{ab} = 3[S_a, S_b]_+ - 2\delta_{ab}s(s+1). \end{aligned} \quad (6.7)$$

На множестве функций, удовлетворяющих дополнительному условию $\sigma_1\Phi = \Phi$, гамильтониан (6.7) положительно-определен и содержит слагаемые соответствующие дипольному $\left(-\dfrac{e}{2sm}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}\right)$, квадрупольному $\left(-\dfrac{e}{48s^2m^2}Q_{ab}\dfrac{\partial E_a}{\partial x_b}\right)$, спин-орбитальному $\left(-\dfrac{e}{16m^2s^2}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\pi}-\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{E})\right)$, дарвиновскому $\left(-\dfrac{e(s+1)}{24sm^2}\operatorname{div}\boldsymbol{E}\right)$ взаимодействиям частицы с полем. Два последних члена в (6.7) можно интерпретировать как магнитное спин-орбитальное и магнитное квадрупольное взаимодействия.

Приближенный гамильтониан (6.6) совпадает с полученным в работе [20], в которой в качестве исходного использовалось уравнение Зайцева–Фейнмана–Гелл-Манна (5.10). В случае $s=1/2$ (6.7) совпадает с гамильтонианом Фолди иВаутхойзена [16], полученным из уравнения Дирака.

7. Точное решение уравнений движения частиц произвольного спина в однородном магнитном поле

Рассмотрим систему уравнений (5.5), (5.6) для случая частицы в однородном магнитном поле. Не умаляя общности, можно считать, что вектор напряженности этого поля $\boldsymbol{H}$ параллелен третьей проекции импульса частицы p_3. Тогда компоненты тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ равны

$$F_{0a}=E_a=0,\qquad F_{23}=H_1=0,\qquad F_{31}=H_2=0,\qquad F_{12}=H_3=H. \tag{7.1}$$

Из (7.1) следует, что π_μ можно выбрать в виде

$$\pi_1=p_1-eHx_2,\qquad \pi_2=p_2,\qquad \pi_3=p_3,\qquad \pi_0=i\frac{\partial}{\partial t}. \tag{7.2}$$

Подставив (7.1), (7.2) в (5.8), получаем $H_s(\boldsymbol{\pi})$ в форме

$$H_s(\boldsymbol{\pi})=\Gamma_0^{(s)}\Gamma_a^{(s)}\pi_a+\Gamma_0^{(s)}m+\frac{H}{2m}\Gamma_0^{(s)}\left(1-\Gamma_4^{(s)}\right)\left(i\Gamma_1^{(s)}\Gamma_2^{(s)}-\frac{1}{s}S_{12}\right). \tag{7.3}$$

Преобразуем $H_s(\boldsymbol{\pi})$ к такому виду, чтобы он содержал только коммутирующие величины. Это позволит нам, не решая уравнений движения (5.5), (5.6), определить спектр собственных значений гамильтониана (7.3). Действительно, в результате преобразования

$$H_s(\boldsymbol{\pi})\to H_s'(\boldsymbol{\pi})=VH_sV^{-1},\qquad \hat P_s(\boldsymbol{\pi})\to \hat P_s(\boldsymbol{\pi})=V\hat P_s(\boldsymbol{\pi})V^{-1}, \tag{7.4}$$

где

$$V=\lambda^++\mathcal{E}^{-1}\lambda^{-1}\Gamma_0^{(s)}H_s(\boldsymbol{\pi}),\qquad \mathcal{E}=\left(\pi^2-\frac{1}{s}S_{12}H+m^2\right)^{1/2},$$

$$V^{-1}=\frac{1}{m}\left(\lambda^-\mathcal{E}+H_s(\boldsymbol{\pi})\lambda^-\Gamma_0^{(s)}\right),\qquad \lambda^\pm=\frac12\left(1\pm\Gamma_4^{(s)}\right),$$

получаем

$$H_s'(\boldsymbol{\pi})=\Gamma_0^{(s)}\left(m^2+\pi^2-\frac{1}{s}S_{12}H\right)^{1/2}, \tag{7.5}$$

$$P_s\Phi=\Phi\qquad \text{или}\qquad \frac12 S_{ab}^2\Phi=s(s+1)\Phi,\qquad \Phi=V\Psi. \tag{7.6}$$

Операторы $\Gamma_0^{(s)}$, S_{12} и π^2 коммутируют друг с другом и имеют следующие собственные значения:

$$\Gamma_0^{(s)}\Phi = \varepsilon\Phi, \qquad \varepsilon = \pm 1, \qquad S_{12}\Phi = s_3\Phi, \qquad s_3 = -s, -s+1, \ldots, s, \tag{7.7}$$

$$\pi^2\Phi = \left[(2n+1)H + p_3^2\right]\Phi, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{7.8}$$

Формулы (7.7) следуют непосредственно из (3.4), (7.6), а соотношение (7.8) приведено, например, в [21].

Квадрат гамильтониана (7.5) и операторы (7.7), (7.8) имеют общую систему собственных функций $\Phi_{\varepsilon n s_3 p_3}$. Отсюда и из (7.7), (7.8) заключаем, что собственные значения гамильтониана (7.5) равны

$$E_{\varepsilon n s_3 p_3} = \varepsilon\left[m^2 + (2n + 1 - s_3/s)eH + p_3^2\right]^{1/2}. \tag{7.9}$$

Соотношение (7.9) обобщает известную формулу [21] для уровней энергии электрона в однородном магнитном поле на случай частицы с произвольным спином s. Как видно из (7.9), значения энергии такой частицы действительны при любых s, в то время как уравнения Рариты–Швингера для $s = 3/2$ при решении аналогичной задачи приводят к комплексным значениям энергии [2].

Приведем для полноты вид собственных функций $\Phi_{\varepsilon n s_3 p_3}$

$$\Phi_{\varepsilon n s_3 p_3} = \Phi_\varepsilon \Phi_{s_3} \Phi_{n p_3}, \tag{7.10}$$

где Φ_{np_3} — собственные функции оператора π^2 [21]

$$\Phi_{np_3} = \exp(ip_1x_1 + ip_3x_3)\exp\left[-\frac{H}{2}\left(x_2 + \frac{p_1}{H}\right)\right] H_n\left[\sqrt{H}\left(x_2 + \frac{p_1}{H}\right)\right], \tag{7.11}$$

H_n — полиномы Эрмита, а Φ_ε, Φ_{s_3} — собственные функции операторов $\Gamma_0^{(s)}$ и S_{12}, явный вид которых может быть легко найден для любого конкретного представления матриц $\Gamma_0^{(s)}$ и S_{12}.

1. Tsai W., Yildis A., *Phys. Rev. D*, 1971, **4**, 3643.
2. Velo G., Zwanzinger D., *Phys. Rev.*, 1969, **186**, 2218;
   Seetharaman M., Prabhakaran I., Mathews P.M., *Phys. Rev. D*, 1975, **12**, 458.
3. Фущич В.И., Грищенко А.Л., Никитин А.Г., *ТМФ*, 1971, **8**, 192; Preprint ITF-70-89E, Kiev, 1970.
4. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Rep. Math. Phys.*, 1975, **8**, 33;
   Никитин А.Г., *УФЖ*, 1973, **18**, 1605; 1974, **19**, 1000.
5. Фущич В.И., Никитин А.Г., Дифференциальные уравнения движения первого и второго порядка для частиц с произвольным спином, Препринт ИМ-77-3, Институт математики АН УССР, Киев, 1977, 48 с.
6. Weaver D.L., Hammer C.L., Good R.H., *Phys. Rev. B*, 1964, **135**, 241.
7. Mathews P.M., *Phys. Rev.*, 1966, **143**, 978;
   Jayaraman I., *Nuovo Cim. A*, 1973, **13**, 877; 1973, **14**, 343.
8. Guertin R.F., *Ann. Phys.*, 1974, **88**, 504; 1975, **91**, 386.
9. Тамм И.Е., *ДАН СССР*, 1940, **29**, 551;
   Taketani M., Sakata S., *Proc. Phys. Math. Soc. (Japan)*, 1940, **22**, 757.
10. Guertin R.F., Preprint Rice University, Houston, 1975.
11. Foldy L.L., *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 568.

12. Широков Ю.М., *ЖЭТФ*, 1957, **33**, 1196.
13. Lomont I.S., *Phys. Rev.*, 1958, **111**, 1710;
Moses H.E., *Nuovo Cim. Suppl.*, 1958, **7**, 1.
14. Lomont I.S., Moses H.E., *Phys. Rev.*, 1960, **118**, 337;
Dowker I.S., *Proc. Roy. Soc. A*, 1967, **293**, 351.
15. Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, 1963, С. 69.
16. Foldy L.L., Wouthuysen S.A., *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 29.
17. Durand B., *Phys. Rev. D*, 1976, **14**, 1554.
18. Зайцев Г.А., *ЖЭТФ*, 1955, **28**, 524; *ДАН СССР*, 1957, **113**, 1248;
Feynman R.P., Gell-Mann M., *Phys. Rev.*, 1958, **109**, 193.
19. Hurley W.I., *Phys. Rev. D*, 1971, **4**, 3605.
20. James K.R., *Proc. Phys. Soc. (London)*, 1968, **1**, 334.
21. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б., Квантовая электродинамика, Наука, 1969, С. 142.