Групповые свойства уравнений Максвелла

В.И. ФУЩИЧ, А.Г. НИКИТИН

A theorem on the invariance of the system of Maxwell's equations under the 23-dimensional Lie algebra, containing as subalgebras 15-dimensional conformal algebra and 8-dimensional Lie algebra of the group $U(2)\otimes U(2)$ has been proved. An 8-parameter family of transformations acting on E and H which generate group $U(2)\otimes U(2)$ is found in explicite form. It is established that every Poincaré-invariant equation of motion for mass-zero particle is invariant under the conformal group.

Введение

В работе [1] сформулированы основные идеи нелиевского метода исследования групповых свойств дифференциальных уравнений. В данной статье мы применяем этот метод для нахождения новых групп инвариантности уравнений Максвелла.

Исследование симметрии уравнений Максвелла имеет долгую и славную историю (см. [1]). В связи с этим важно отметить, что нелиевский подход позволяет получить новые результаты даже для таких хорошо изученных уравнений.

Структура статьи такова. В первом параграфе обсуждается конформная инвариантность уравнений Максвелла и приводится в явном виде закон преобразований векторов напряженности электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей под действием конформной группы. Во втором и третьем параграфах дано простое доказательство того, что такие преобразования являются унитарными в соответствующем гильбертовом пространстве. Доказан аналогичный результат и для произвольного пуанкаре-инвариантного уравнения, описывающего свободное движение частицы с нулевой массой и дискретным спином.

Основной результат статьи содержится в параграфах 4, 5 и 6, где установлена инвариантность уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме относительно восьмипараметрических непрерывных преобразований:

$$\begin{aligned}
\vec{E}\to\vec{E}' &= \vec{f}\left(\vec{E},\vec{H},\frac{\partial\vec{E}}{\partial x_a},\frac{\partial\vec{H}}{\partial x_a},\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x_a\partial x_b},\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial x_a\partial x_b},\dots\right),\\
\vec{H}\to\vec{H}' &= \vec{g}\left(\vec{E},\vec{H},\frac{\partial\vec{E}}{\partial x_a},\frac{\partial\vec{H}}{\partial x_a},\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x_a\partial x_b},\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial x_a\partial x_b},\dots\right),
\end{aligned}\tag{0}$$

где вектор-функции $\vec{f}$ и $\vec{g}$ зависят в общем случае как от $\vec{E}$, $\vec{H}$, так и от бесконечного числа производных от векторов напряженности полей. Это означает, что преобразования (0), вообще говоря, нелокальны. Совокупность найденных преобразований вида (0) образует компактную группу, содержащую, в частности, однопараметрическую подгруппу локальных преобразований Хевисайда–Лармора–Райнича (ХЛР) (см. [4–6]).

В § 6 доказана инвариантность уравнений Максвелла относительно 23-мерной алгебры Ли, содержащей в качестве подалгебр 15-мерную конформную алгебру и

Теоретико-групповые методы в математической физике, Сб. науч. тр., Отв. ред. Ю.А. Митропольский, В.И. Фущич, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1978, С. 45–80.

8-мерную алгебру Ли группы $U(2) \otimes U(2)$. Этот результат можно рассматривать как объединение результатов [2–6] и [17].

В последнем параграфе установлена инвариантность уравнений Максвелла относительно 10-параметрических преобразований, при которых изменяются пространственные координаты x_1, x_2, x_3, но временная координата x_0 остается инвариантной. При этом не сохраняется квадратичная форма

$$S\left(x^2\right) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2,$$

хотя решения уравнения преобразуются по представлению группы Пуанкаре.

§ 1. Инвариантность уравнений Максвелла относительно конформной группы

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме имеют вид

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \tag{1а}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{H} = 0, \tag{1б}$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — векторы напряженности соответственно электрического и магнитного полей.

Уравнения (1) инвариантны относительно конформной группы. Конформную группу образуют преобразования координат x_a, $a = 1,2,3$, и времени $x_0 = t$ следующего вида:

$$\begin{aligned} &\vec{x} \to \vec{x}' = \vec{x} + \frac{\vec{\theta}(\vec{\theta}\cdot\vec{x})}{\theta^2}(\cos\theta - 1) + \frac{\vec{\theta}\cdot\vec{x}}{\theta}\sin\theta - \vec{a}, \\ &x_0 \to x_0' = x_0 - b, \end{aligned} \tag{2а}$$

$$\begin{aligned} &\vec{x} \to \vec{x}'' = \vec{x} + \frac{\vec{\lambda}(\vec{\lambda}\cdot\vec{x})}{\lambda^2}(\operatorname{ch}\lambda - 1) + \frac{\lambda_a}{\lambda}x_0\operatorname{sh}\lambda - \vec{a}, \\ &x_0 \to x_0'' = x_0\operatorname{ch}\lambda + \frac{\vec{x}\cdot\vec{\lambda}}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda - b, \end{aligned} \tag{2б}$$

$$x_\mu \to x_\mu''' = e^c x_\mu, \qquad \mu = 0,1,2,3, \tag{2в}$$

$$x_\mu \to x_\mu^{IV} = \frac{x_\mu - d_\mu x_\nu x^\nu}{1 - 2d_\nu x^\nu + d_\lambda d^\lambda x_\nu x^\nu}, \tag{2г}$$

где

$$\begin{aligned} &\theta = \left(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2\right)^{1/2}, \qquad \lambda = \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2\right)^{1/2}, \\ &x_\nu x^\nu = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, \qquad d_\lambda d^\lambda = d_0^2 - d_1^2 - d_2^2 - d_3^2, \end{aligned}$$

θ_a, λ_a, a_a, b, c, d_a — произвольные действительные параметры, $a = 1,2,3$.

Преобразования (2а), (2б) оставляют инвариантной квадратичную форму

$$\begin{aligned} &(x_{1\mu} - x_{2\mu})(x_1^\mu - x_2^\mu) = (x_{1\mu}' - x_{2\mu}')(x_1'^{\mu} - x_2'^{\mu}) = \\ &\qquad = (x_{1\mu}'' - x_{2\mu}'')(x_1''^{\mu} - x_2''^{\mu}) = inv \end{aligned} \tag{3}$$

и называются неоднородными преобразованиями Лоренца. Формулы (2в), (2г) задают собственно конформные преобразования.

Инвариантность уравнений (1) относительно конформной группы означает, что преобразованиям (2) можно однозначно сопоставить такие преобразования векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$

$$\vec{E} \to \vec{E}', \qquad \vec{H} \to \vec{H}', \tag{4}$$

которые образуют представление конформной группы; при этом $\vec{E}'$ и $\vec{H}'$ удовлетворяют исходному уравнению (1).

Проблеме конформной симметрии уравнений Максвелла посвящено большое количество работ. Однако насколько нам известно явный вид всех преобразований (4), образующих конформную группу, нигде не приведен. Мы покажем ниже, что эти преобразования могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
&\vec{E}(x) \to \vec{E}'(x) = \vec{E}(x') + \frac{\vec{\theta}(\vec{\theta}\cdot\vec{E}(x'))}{\theta^2}(\cos\theta - 1) - \frac{\vec{\theta}\times\vec{E}(x')}{\theta}\sin\theta,\\
&\vec{H}(x) \to \vec{H}'(x) = \vec{H}(x') + \frac{\vec{\theta}(\vec{\theta}\cdot\vec{H}(x'))}{\theta^2}(\cos\theta - 1) - \frac{\vec{\theta}\times\vec{H}(x')}{\theta}\sin\theta,
\end{aligned} \tag{5а}$$

$$\begin{aligned}
&\vec{E}(x) \to \vec{E}''(x) = \vec{E}(x'') + \frac{\vec{\lambda}(\vec{\lambda}\cdot\vec{E}(x''))}{\lambda^2}(1 - \operatorname{ch}\lambda) - \frac{\vec{\lambda}\times\vec{H}(x'')}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda,\\
&\vec{H}(x) \to \vec{H}''(x) = \vec{H}(x'') + \frac{\vec{\lambda}(\vec{\lambda}\cdot\vec{H}(x''))}{\lambda^2}(1 - \operatorname{ch}\lambda) + \frac{\vec{\lambda}\times\vec{E}(x'')}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda,
\end{aligned} \tag{5б}$$

$$\vec{E}(x) \to \vec{E}'''(x) = \vec{E}(x'''), \qquad \vec{H}(x) \to \vec{H}'''(x) = \vec{H}(x'''), \tag{5в}$$

$$\begin{aligned}
&\vec{E}(x) \to \vec{E}^{IV}(x) = \vec{E}(x^{IV})(1 + \exp(-4d_\mu x^\mu)) +\\
&\quad + \frac{\vec{\eta}\{\vec{\eta}\cdot[-i\vec{H}(x^{IV}) + \vec{E}(x^{IV})]\}}{\eta^2}(1 - \cos\eta) - \frac{\vec{\eta}\times[\vec{E}(x^{IV}) - i\vec{H}(x^{IV})]}{\eta}\sin\eta +\\
&\quad + \frac{\vec{\xi}\{\vec{\xi}\cdot[\vec{E}(x^{IV}) - i\vec{H}(x^{IV})]\}}{\xi^2}(1 - \cos\xi) - \frac{\vec{\xi}\times[\vec{E}(x^{IV}) - i\vec{H}(x^{IV})]}{\xi}\sin\xi,\\
&\vec{H}(x) \to \vec{H}^{IV}(x) = \vec{H}(x^{IV})(1 + \exp(-4d_\mu x^\mu)) +\\
&\quad + \frac{\vec{\eta}\{\vec{\eta}\cdot[\vec{H}(x^{IV}) + i\vec{E}(x^{IV})]\}}{\eta^2}(1 - \cos\eta) - \frac{\vec{\eta}\times[\vec{H}(x^{IV}) + i\vec{E}(x^{IV})]}{\eta}\sin\eta +\\
&\quad + \frac{\vec{\xi}\{\vec{\xi}\cdot[\vec{H}(x^{IV}) - i\vec{E}(x^{IV})]\}}{\xi^2}(1 - \cos\xi) - \frac{\vec{\xi}\times[\vec{H}(x^{IV}) - i\vec{E}(x^{IV})]}{\xi}\sin\xi,
\end{aligned} \tag{5г}$$

где

$$\begin{aligned}
&x = (x_0, x_1, x_2, x_3), \qquad x' = (x_0', x_1', x_2', x_3'),\\
&\eta = \left(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2\right)^{1/2}, \qquad \xi = \left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2\right)^{1/2},\\
&\eta_a = \frac{1}{2}\left(a_0 x_a + \frac{i}{2}\varepsilon_{abc} a_b x_c\right), \qquad \xi_a = \frac{1}{2}\left(a_0 x_a - \frac{i}{2}\varepsilon_{abc} a_b x_c\right),
\end{aligned}$$

а x'_μ, x''_μ, x'''_μ и x^{IV}_μ задаются формулами (2).

В работе [8] показано, что конформные преобразования множества решений уравнений Максвелла образуют унитарное представление конформной группы. В следующих параграфах приведем простое доказательство этого факта и обобщим результаты работы [8] на случай произвольного пуанкаре-инвариантного уравнения движения безмассовой частицы.

§ 2. Матричная форма уравнения Максвелла

Для дальнейшего нам будет удобно использовать запись уравнений Максвелла в следующей эквивалентной форме (см. [9–11])[1]

$$L_1\Psi = 0, \qquad L_1 = i\frac{\partial}{pt} - \vec{\alpha}\cdot\vec{p}, \tag{6а}$$

$$L_2\Psi = 0, \qquad L_2 = S_{4a}p_a, \tag{6б}$$

где Ψ — восьмикомпонентная функция,

$$\Psi \quad \text{— столбец } (H_1, H_2, H_3, \varphi_1, E_1, E_2, E_3, \varphi_2), \tag{7}$$

а α_a и S_{4a} — матрицы следующего вида:

$$\begin{gathered}
\alpha_a = 2i\begin{pmatrix} \hat{0} & -\tau_a \\ \tau_a & \hat{0}\end{pmatrix}, \quad S_{4a} = \begin{pmatrix} \hat{S}_{4a} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{S}_{4a}\end{pmatrix},\\
\tau_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad \tau_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0\end{pmatrix},\\
\tau_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0\end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{41} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\\
\hat{S}_{42} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad \hat{S}_{43} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0\end{pmatrix},
\end{gathered} \tag{8}$$

$\hat{0}$ — четырехрядные квадратные нулевые матрицы. Матрицы $\hat{S}_{4a}$ и

$$\hat{S}_{ab} = \varepsilon_{abc}(2\tau_c - \hat{S}_{4c})$$

образуют представление $D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ алгебры $O(4)$. Расписав (6) покомпонентно, приходим к обычной форме уравнений Максвелла (1) и условиям для φ_1 и φ_2:

$$\varphi_1 = C_1, \qquad \varphi_2 = C_2,$$

где C_1 и C_2 — константы, которые, не умаляя общности, можно положить равными нулю.

[1]Подобная формулировка уравнений Максвелла (но с использованием четырехкомпонентной волновой функции и отличного от (6б) дополнительного условия) была предложена ранее в работах [12–13].

Покажем, что уравнения (6) инвариантны относительно неоднородных преобразования Лоренца (5а), (5б). Условие инвариантности этих уравнений может быть записано в виде (см. [1])

$$\begin{aligned} &[L_1, Q_A]_- = f_A^1 L_1 + f_A^2 L_2, \\ &[L_2, Q_A]_- = \tilde{f}_A^1 L_1 + \tilde{f}_A^2 L_2, \end{aligned} \tag{9}$$

где Q_A — генераторы группы инвариантности, f_A^α и $\tilde{f}_A^\alpha$ — некоторые операторы, определенные в пространстве решений уравнений (6).

Генераторы (инфинитезимальные операторы) преобразований (5а), (5б) для функции Ψ (см. (7)) имеют вид

$$P_\mu = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} = p_\mu, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \tag{10}$$

где

$$\begin{gathered} S_{ab} = \begin{pmatrix} \hat{S}_{ab} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{S}_{ab} \end{pmatrix}, \qquad S_{0a} = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc} \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{S}_{bc} \\ -\hat{S}_{bc} & \hat{0} \end{pmatrix}, \\ \hat{S}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{S}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{S}_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{10$'$}$$

Операторы P_0 и P_a генерируют преобразования, характеризуемые параметрами b и a_a, а J_{ab} и J_{0a} — преобразования, задаваемые параметрами $\varepsilon_{abc}\theta_c$ и λ_a.

Используя тождества (см. [11, 18])

$$i\frac{\vec{p} \times \vec{S}}{p} \left(\frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{p}\right)^2 = \left(\vec{S} - \frac{\vec{p}}{p} \cdot \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{p}\right) \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{p},$$

где

$$S_a = S_{bc}, \qquad p = \left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right)^{1/2},$$

нетрудно показать, что на множестве решений уравнений (6) генераторы (10) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} &P_0 = \vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \qquad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad J_{0a} = t p_a - \frac{1}{2}[X_a, P_0]_+, \\ &J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab} \equiv X_a p_b - X_b p_a + \hat{p}_c \Lambda, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$X_a = x_a - i\frac{p_a P_0}{p^2} + \frac{S_{ab} p_b}{p^2}, \qquad \Lambda = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_{abc} p_a S_{bc}}{p}, \qquad \hat{p}_c = \frac{p_c}{p}.$$

Операторы (11) удовлетворяют коммутационным соотношениям, определяющим алгебру Ли группы Пуанкаре:

$$\begin{aligned}&[P_\mu, P_\nu]_- = 0, \qquad [J_{\mu\nu}, P_\lambda]_- = i(g_{\nu\lambda}P_\mu - g_{\mu\lambda}P_\nu),\\&[J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}]_- = i(g_{\nu\lambda}J_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}J_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\lambda}),\end{aligned} \tag{12}$$

и условиям инвариантности (9):

$$[L_1, Q_A]_- = 0, \qquad [L_2, Q_A]_- = [p, Q_A]_- = \frac{1}{p}L_2, \tag{13}$$

где Q_A — любой из операторов (11). Генераторы (11) эрмитовы относительно скалярного произведения

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int \frac{d^3\vec{p}\,'}{2p'^2} \int d^3x \, \exp\left[i(\vec{p} - \vec{p}\,')\vec{x}\,\right] \Psi_1^+ \Psi_2. \tag{14}$$

Это означает, что преобразования (5а), (5б) унитарны. Ниже будет доказана унитарность остальных преобразований (5в), (5г) из конформной группы.

§ 3. Явно эрмитово представление конформной алгебры

Приведем простое и конструктивное доказательство того, что на множестве решений произвольного релятивистского уравнения для частицы с нулевой массой и дискретным спином реализуется унитарное представление конформной группы. Частным случаем таких уравнений являются уравнения Максвелла (1). Теорема, доказанная ниже, обобщает известный результат Гросса (см. [8]) и дает элементарное доказательство унитарности преобразований (5в), (5г).

Определение. *Будем говорить, что уравнение пуанкаре-инвариантно и описывает движение частицы с нулевой массой и дискретным спином, если на множестве его решений можно задать унитарное (в общем случае приводимое) представление группы Пуанкаре, соответствующее нулевым значениям операторов Казимира:*

$$P_\mu P^\mu = 0, \qquad W_\mu W^\mu = 0, \tag{15}$$

где W_μ — вектор Любанского–Паули (см. [14])

$$W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J_{\mu\nu}P_\sigma, \tag{16}$$

а P_μ и $J_{\mu\nu}$ — генераторы группы $P(1,3)$.

Теорема 1. *Произвольное пуанкаре-инвариантное уравнение для безмассовой частицы дискретного спина инвариантно относительно алгебры Ли конформной группы C_4, базисные элементы которой задаются операторами P_μ, $J_{\mu\nu}$ и*

$$\begin{aligned}&D = -\frac{1}{2}\left[\frac{P_0P_a}{P^2}, J_{0a}\right]_+,\\&K_\mu = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{P_0}{P^2}, [J_{0b}, J_{\mu b}]_+\right]_+ - \left[\frac{P_\mu}{P^2}, J_{0b}J_{0b}\right]_+\right\} + g_{\mu\nu}\frac{P_\nu}{P^2}\left(\Lambda^2 - \frac{1}{2}\right),\end{aligned} \tag{17}$$

где символ $[A,B]_+$ обозначает антикоммутатор,

$$[A,B]_+ \equiv AB + BA,$$

Λ — инвариантный оператор спиральности,

$$\Lambda = \frac{1}{2p}\varepsilon_{abc}J_{ab}P_c,$$

P_μ и $J_{\mu\nu}$ — базисные элементы алгебры $P(1,3)$[2], а D и K_μ — операторы, дополняющие алгебру $P(1,3)$ до алгебры C_4.

Доказательство. Поскольку операторы P_μ и $J_{\mu\nu}$ по определению удовлетворяют алгебре (12), доказательство теоремы сводится к проверке справедливости следующих соотношений:

$$\begin{gathered}[J_{\mu\nu}, K_\lambda]_- = i(g_{\nu\lambda}K_\mu - g_{\mu\lambda}K_\nu), \qquad [K_\mu, P_\nu]_- = 2(ig_{\mu\nu}D - J_{\mu\nu}),\\ [D, P_\mu]_- = iP_\mu, \quad [D, K_\mu]_- = -iK_\mu, \quad [K_\mu, K_\nu]_- = 0, \quad [J_{\mu\nu}, D]_- = 0,\end{gathered} \tag{18}$$

которые определяют совместно с (12) алгебру C_4. Такую проверку нетрудно осуществить непосредственно, принимая во внимание, что генераторы P_μ и $J_{\mu\nu}$ удовлетворяют соотношениям (см. [15])

$$W_\mu = \frac{P_0}{P}\Lambda P_\mu.$$

Таким образом, формулы (17) дают явное выражение генераторов конформной группы через генераторы ее подгруппы $P(1,3)$. Отметим, что генераторы (18) имеют явно эрмитову форму и, следовательно, порождают совместно с P_μ и $J_{\mu\nu}$ унитарное представление конформной группы. Теорема доказана.

Продемонстрируем конструктивный характер доказанной теоремы на примере уравнений Максвелла. Эти уравнения пуанкаре-инвариантны, генераторы группы $P(1,3)$ задаются формулами (10) и, как нетрудно проверить, удовлетворяют условиям (15). Но тогда, согласно теореме 1, уравнения (6) инвариантны также относительно конформной группы. Подставив операторы (10) в (17), получаем генераторы D и K_μ этой группы в виде

$$\begin{aligned} D &= -\frac{1}{2}[X_\mu, P^\mu]_+,\\ K_\mu &= -[J_{\mu\nu}, X^\nu]_+ + \frac{1}{2}[P_\mu, X_\nu X^\nu]_+ - \frac{P_\mu}{P^2}\left(\Lambda^2 + \frac{1}{4}\right).\end{aligned} \tag{19}$$

Генераторы (19) эрмитовы в скалярном произведении (14) и на множестве решений уравнений (15) могут быть представлены в обычной форме (см. [16]):

$$D = x_\mu p^\mu + 2i, \qquad K_\mu = 2x_\mu D - x_\nu x^\nu p_\mu + 2x^\nu S_{\mu\nu}. \tag{20}$$

Отсюда следует, что генераторы (20) также эрмитовы относительно (14), а это означает, что порождаемые ими преобразования (5в), (5г) унитарны.

[2]Мы используем одинаковые обозначения для групп и для соответствующих алгебр Ли.

§ 4. Инвариантность уравнений Максвелла относительно группы $U(2) \otimes U(2)$

Выше подробно обсуждалась инвариантность уравнений Максвелла относительно конформной группы. Хорошо известно, что эти уравнения инвариантны также относительно преобразований Хевисайда–Лармора [4, 5]

$$\vec{E} \to \vec{H}, \qquad \vec{H} \to -\vec{E},$$

и относительно более общих преобразований (см. [6]):

$$\begin{aligned} &\vec{E} \to \vec{E}' = \vec{E}\cos\theta + \vec{H}\sin\theta, \\ &\vec{H} \to \vec{H}' = \vec{H}\cos\theta - \vec{E}\sin\theta. \end{aligned} \tag{21}$$

Покажем, что симметрия уравнений Максвелла еще шире, а именно, что уравнения (1) инвариантны относительно совокупности преобразований, образующих представление группы $U(2)\otimes U(2)$ и включающих (21) как однопараметрическую подгруппу. Теорема о такой дополнительной симметрии уравнений Максвелла была сформулирована в работе [17], где показано, что эта группа порождается не преобразованиями координата x_μ, а преобразованиями вида (0). Однако в работе [17] не был найден явный вид функций f_i и g_i из (0).

Теорема 2. *Уравнения Максвелла (1) инвариантны относительно преобразований:*

$$\begin{aligned} &H_a \to H'_a = H_a\cos\frac{\theta}{2} + \left[i\hat{F}_{ab}E_b\theta_1 - \varepsilon_{abc}\hat{p}_b(H_c\theta_3 + i\hat{F}_{cd}E_d\theta_2)\right]\frac{1}{\theta}\sin\frac{\theta}{2}, \\ &E_a \to E'_a = E_a\cos\frac{\theta}{2} + \left[-i\hat{F}_{ab}H_b\theta_1 - \varepsilon_{abc}\hat{p}_b(E_c\theta_3 + i\hat{F}_{cd}H_d\theta_2)\right]\frac{1}{\theta}\sin\frac{\theta}{2}, \end{aligned} \tag{22а}$$

$$\begin{aligned} &H_a \to H''_a = H_a\cos\frac{\lambda}{2} - \left[i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\hat{F}_{cd}H_d\lambda_1 + \hat{F}_{ab}H_b\lambda_2 - E_a\lambda_3\right]\frac{1}{\lambda}\sin\frac{\lambda}{2}, \\ &E_a \to E''_a = E_a\cos\frac{\lambda}{2} + \left[i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\hat{F}_{cd}E_d\lambda_1 - \hat{F}_{ab}E_b\lambda_2 - H_a\lambda_3\right]\frac{1}{\lambda}\sin\frac{\lambda}{2}, \end{aligned} \tag{22б}$$

$$\begin{aligned} &H_a \to H'''_a = H_a\cos\varphi + i\varepsilon_{abc}\hat{p}_bE_c\sin\varphi, \\ &E_a \to E'''_a = E_a\cos\varphi - i\varepsilon_{abc}\hat{p}_bE_c\sin\varphi, \end{aligned} \tag{22в}$$

где

$$\lambda = \left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\right)^{1/2}, \qquad \theta = \left(\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2\right)^{1/2}, \qquad \hat{p}_b = \frac{p_b}{p},$$

λ_a, θ_a *и* φ *— произвольные действительные параметры,* (a,b,c) *— цикл (1,2,3),*

$$\hat{F}_{ad} = \left[\left(p_a^2p_c^2 + p_a^2p_b^2 - p_b^2p_c^2\right)\delta_{ad} + p_1p_2p_3\left(p_b\delta_{cd} + p_c\delta_{bd} - p_a\hat{p}_d\right)\right]L^{-1},$$

$$L = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(p_1^2-p_2^2\right)^2p_3^4 + \left(p_1^2-p_3^2\right)^2p_2^4 + \left(p_2^2-p_3^2\right)^2p_1^4\right]^{1/2}.$$

Преобразования (22) совместно с тривиальным фазовым преобразованием

$$\vec{E} \to \vec{E}\exp(i\eta), \qquad \vec{H} \to \vec{H}\exp(i\eta) \tag{23}$$

образуют представление группы $U(2)\otimes U(2)$.

Доказательство. Можно убедиться непосредственно проверкой, что $\vec{E}'$, $\vec{H}'$, $\vec{E}''$, $\vec{H}''$, $\vec{E}'''$, $\vec{H}'''$ удовлетворяют тем же уравнениям (1), что и непреобразованные $\vec{E}$ и $\vec{H}$, а инфинитезимальные операторы преобразований (22), (23) образуют алгебру Ли группы $U(2)\otimes U(2)$. Однако более конструктивный путь (позволяющий обобщить полученные результаты для других пуанкаре-инвариантных уравнений) состоит в том, чтобы привести уравнения (1) к такой эквивалентной форме, для которой утверждения теоремы становятся очевидными.

Будем исходить из матричной формы уравнений Максвелла (6). Эти уравнения могут быть приведены к канонической диагональной форме. Такую диагонализацию мы осуществим в два этапа. Сначала используем унитарный оператор

$$U_1=\exp(\sigma_2-1)F\vec{S}\cdot\vec{p}\frac{\pi}{4}, \tag{24}$$

где σ_2 и, далее, σ_1, σ_2 – матрицы Паули:

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{I}\\ \hat{I} & \hat{0}\end{pmatrix},\qquad \sigma_2=i\begin{pmatrix}\hat{0} & -\hat{I}\\ \hat{I} & \hat{0}\end{pmatrix},\qquad \sigma_3=\begin{pmatrix}\hat{I} & \hat{0}\\ \hat{0} & -\hat{I}\end{pmatrix}, \tag{25}$$

$\hat{I}$ и $\hat{0}$ — четырехрядные квадратные единичные и нулевые матрицы,

$$\begin{gathered}F=\left\{\sum_{a\neq b\neq c}\left(p_a^2p_c^2+p_a^2p_b^2-p_b^2p_c^2\right)\left(1-S_a^2\right)+\right.\\ \left.+p_1p_2p_3S_aS_bp_c-p_1p_2p_3p\left[1-\left(\vec{S}\cdot\hat{\vec{p}}\right)^2\right]\right\}L^{-1}.\end{gathered} \tag{26}$$

Принимая во внимание соотношения

$$F\cdot\vec{S}\cdot\hat{\vec{p}}=-\vec{S}\cdot\hat{\vec{p}}\cdot F,\quad F\cdot\left(\vec{S}\cdot\hat{\vec{p}}\right)^2=F,\quad \vec{S}\cdot\hat{\vec{p}}F^2=\vec{S}\cdot\hat{\vec{p}},\quad \vec{S}\cdot\hat{\vec{p}}\cdot S_{4a}p_a=0,$$

получаем из (6) следующую эквивалентную систему уравнений:

$$\begin{aligned}&L_1'\Psi'=0,\qquad L_1'=U_1L_1U_1^+=i\frac{\partial}{\partial t}-\vec{S}\cdot\vec{p},\qquad \Psi'=U_1\Psi,\\ &L_2'\Psi'=0,\qquad L_2'=U_1L_2U_1^+=S_{4a}p_a.\end{aligned} \tag{27}$$

Следующий этап состоит в приведении к матричной форме операторов $\vec{S}\cdot\vec{p}$ и $S_{4a}p_a$. Это достигается посредством преобразования

$$\begin{aligned}&\vec{S}\cdot\vec{p}\to U_2\vec{S}\cdot\vec{p}U_2^+=\Lambda=\frac{1}{\sqrt{3}}(S_1+S_2+S_3),\\ &S_{4a}p_a\to U_2S_{4a}p_aU_2^+=\Sigma=\frac{1}{\sqrt{3}}(S_{41}+S_{42}+S_{43}),\end{aligned} \tag{28}$$

где

$$\begin{aligned}&U_2=\exp\left(-i\frac{S_a\tilde{p}_a}{\tilde{p}}\operatorname{arctg}\frac{\tilde{p}}{p_1+p_2+p_3}\right),\\ &\tilde{p}_a=p_b-p_c,\qquad (a,b,c)\text{ — цикл }(1,2,3),\qquad \tilde{p}=\left(\tilde{p}_1^2+\tilde{p}_2^2+\tilde{p}_3^2\right).\end{aligned} \tag{29}$$

Из (26), (27) следует, что преобразование

$$\Psi \to \Phi = W\Psi, \qquad W = U_2 U_1 \tag{30}$$

приводит уравнения (6) к квазидиагональной форме

$$\begin{aligned} &L_1''\Phi = 0, \qquad L_1'' = WL_1W^+ = i\frac{\partial}{\partial t} - \Lambda p, \\ &L_2''\Phi = 0, \qquad L_2'' = WL_2W^+ = \Sigma p, \end{aligned} \tag{31}$$

где коммутирующие между собой матрицы Λ и Σ, не умаляя общности, можно считать диагональными.

Условие инвариантности (9) для уравнений (31) принимает форму

$$\begin{aligned} &[L_1'', Q_A']_- = {f'_A}^1 L_1'' + {f'_A}^2 L_2'', \\ &[L_2'', Q_A'']_- = {\tilde{f}'_A}{}^1 L_1'' + {\tilde{f}'_A}{}^2 L_2'', \end{aligned} \tag{32}$$

Нетрудно убедиться, что условиям (32) удовлетворяют матрицы

$$\begin{aligned} &Q_a' = \Sigma_{bc} = \frac{1}{2}\sigma_a\Lambda, \qquad Q_{3+a}' = \Sigma_{4a} = \frac{1}{2}\sigma_a\Lambda^2, \\ &Q_7' = \Sigma_7 = \Lambda, \qquad Q_8' = \Sigma_8 = \begin{pmatrix} \hat{I} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{I} \end{pmatrix}, \qquad a = 1,2,3. \end{aligned} \tag{33}$$

Используя представление (8), (10), (25), для матриц σ_a и S_{ab} можно показать, что формулы (33) задают полный набор матриц, удовлетворяющих условиям (32); при этом

$${f'_A}^1 = {f'_A}^2 = {\tilde{f}'_A}{}^1 = {\tilde{f}'_A}{}^2 = 0. \tag{34}$$

Операторы (33) удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} &[\Sigma'_{kl}, \Sigma'_{mn}]_- = i\left(\delta_{km}\Sigma'_{ln} + \delta_{ln}\Sigma'_{km} - \delta_{kn}\Sigma'_{lm} - \delta_{lm}\Sigma'_{kn}\right), \\ &[\Sigma'_5, \Sigma'_{kl}]_- = [\Sigma'_7, \Sigma'_{kl}]_- = [\Sigma'_7, \Sigma'_8]_- = 0 \end{aligned} \tag{35а}$$

и условиям

$$\Sigma_{kl}^2\Phi = \frac{1}{4}\Phi, \qquad \Sigma_\alpha^2\Phi = \Phi, \quad \alpha = 7,8, \tag{35б}$$

т.е. операторы Σ'_{kl} образуют представление $D\left(\frac{1}{2},0\right) \oplus D\left(0,\frac{1}{2}\right)$ алгебры Ли группы $O(4) \sim SU(2)\otimes SU(2)$, а Σ'_{kl} и Σ'_α — соответствующее представление алгебры Ли группы $U(2)\otimes U(2)$. Отсюда следует, что уравнения (31) инвариантны относительно произвольных преобразований из группы $U(2)\otimes U(2)$:

$$\begin{aligned} &\Phi \to \Phi' = \exp\left\{\frac{i}{2}\Sigma'_{ab}\theta_c\varepsilon_{abc}\right\}\Phi = \left(\cos\theta + i\varepsilon_{abc}\Sigma'_{ab}\theta_c\frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\theta}\right)\Phi, \\ &\Phi \to \Phi'' = \exp\left\{i\Sigma'_{4a}\lambda_a\right\}\Phi = \left(\cos\lambda + 2i\Sigma'_{4a}\lambda_a\frac{\sin\frac{1}{2}\lambda}{\lambda}\right)\Phi, \\ &\Phi \to \Phi''' = \exp(i\Sigma'_7\varphi)\Phi = (\cos\varphi + i\Sigma'_7\sin\varphi)\Phi, \\ &\Phi \to \Phi^{IV} = \exp(i\Sigma'_8\eta)\Phi = \exp(i\eta)\Phi. \end{aligned} \tag{36}$$

Возвращаясь с помощью оператора, обратного (30), к исходному Ψ-представлению, получаем из (36) преобразования, оставляющие инвариантным уравнение (6):

$$
\begin{aligned}
&\Psi \to \Psi' = \left(\cos\theta + i\varepsilon_{abc}\Sigma_{ab}\theta_c \frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\theta}\right)\Psi,\\
&\Psi \to \Psi'' = \left(\cos\lambda + 2i\Sigma_{4a}\lambda_a \frac{\sin\frac{1}{2}\lambda}{\lambda}\right)\Psi,\\
&\Psi \to \Psi''' = (\cos\varphi + i\Sigma_7 \sin\varphi)\Psi,\\
&\Psi \to \Psi^{IV} = (\cos\eta + i\Sigma_8 \sin\eta)\Psi,
\end{aligned}
\tag{37}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\Sigma_{kl} = u^+\Sigma'_{kl}u, \qquad \Sigma_\alpha = u + \Sigma'_\alpha u, \qquad \Sigma_{12} = \frac{1}{2}S_a\hat{p}_a, \qquad \Sigma_{23} = \frac{1}{2}\sigma_1\hat{F},\\
&\Sigma_{31} = \frac{i}{2}\sigma_1 S_a\hat{p}_a\hat{F}, \qquad \Sigma_{41} = \frac{i}{2}\sigma_3 S_a\hat{p}_a\hat{F}, \qquad \Sigma_{42} = -\frac{1}{2}\sigma_3\hat{F}(S_a\hat{p}_a)^2,\\
&\Sigma_{43} = -\frac{1}{2}\sigma_2(S_a\hat{p}_a^2)^2, \qquad \Sigma_5 = \sigma_2 S_a\hat{p}_a, \qquad \Sigma_6 = 1.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Подставив выражения (38), (7) в (37), приходим к формулам (22) и (23). Теорема доказана.

Таким образом, мы нашли новую восьмипараметрическую группу симметрии уравнений Максвелла, задаваемую преобразованиями (22), (23). Особенность этих преобразований состоит в том, что в отличие от (5) они являются нелокальными.

Преобразования (22), (23) унитарны как относительно метрики (14), так и относительно скалярного произведения

$$
(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x\ \Psi_1^+\Psi_2. \tag{39}
$$

Подставляя в формулу (39) явный вид функции Ψ (см. (7)) и налагая на $\vec{E}$ и $\vec{H}$ условие эрмитовости, приходим к выводу, что преобразования (22), (23) сохраняют величину

$$
\varepsilon = \int d^3x\,(\vec{E}^2 + \vec{H}^2), \tag{40}
$$

которая определяет энергию электромагнитного поля.

Подчеркнем еще раз, что преобразования (22), (23) не имеют ничего общего с неоднородными преобразованиями Лоренца (5а), (5б), поскольку они реализуют унитарное конечномерное представление компактной группы $U(2)\times U(2)$. В случае $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ формулы (22б) задают преобразование Хевисайда–Лармора–Райнича (21).

Отметим также, что используя формализм, разработанный в [9–11], результаты теоремы 2 нетрудно обобщить на уравнения для безмассовых частиц с произвольным спином, инвариантные относительно группы Пуанкаре.

§ 5. Симметрия первой пары уравнений Максвелла

Исследуем инвариантность уравнений (1а):

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{41}$$

без дополнительных условий (1б).

Нетрудно убедиться, что в отличие от системы (1) уравнения (41) неинвариантны относительно всех преобразований (5), (2), но инвариантны только относительно преобразований (1а), (1в), (5а), (5в), т.е. относительно группы поворотов и сдвигов трехмерного евклидова пространства $E(3)$ и относительно масштабных преобразований.

Таким образом, отказ от дополнительных условий (16) приводит к тому, что симметрия системы уравнений относительно локальных преобразований вида (2), (5) сужается. При этом, однако, как будет показано ниже, расширяется симметрия относительно интегро-дифференциальных преобразований (0).

Теорема 3. *Система уравнений (41) инвариантна относительно совокупности преобразований, задаваемых формулами*

$$\begin{aligned}
H_a \to H_a' &= H_a\cos\frac{1}{2}\theta + i\hat{p}_a\hat{p}_b H_b\left(1-\cos\frac{1}{2}\theta\right) + \\
&\quad + \left[i\hat{F}_{ab}E_b\theta_1 - \varepsilon_{abc}\hat{p}_b(H_c\theta_3 + i\hat{F}_{cd}E_d\theta_2)\right]\frac{1}{\theta}\sin\frac{1}{2}\theta, \\
E_a \to E_a' &= E_a\cos\frac{1}{2}\theta + i\hat{p}_a\hat{p}_b E_b\left(1-\cos\frac{1}{2}\theta\right) + \\
&\quad + \left[-i\hat{F}_{ab}H_b\theta_1 - \varepsilon_{abc}\hat{p}_b(E_c\theta_3 + i\hat{F}_{cd}H_d\theta_2)\right]\frac{1}{\theta}\sin\frac{1}{2}\theta,
\end{aligned} \tag{42а}$$

$$\begin{aligned}
H_a \to H_a'' &= H_a\cos\frac{1}{2}\lambda + \hat{p}_a\hat{p}_b H_b\left(1-\cos\frac{1}{2}\lambda\right) + \\
&\quad + \left[(E_a - \hat{p}_a\hat{p}_b E_b)\lambda_3 - \hat{F}_{ab}H_b\lambda_2 - i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\hat{F}_{cd}H_d\lambda_1\right]\frac{1}{\lambda}\sin\frac{1}{2}\lambda, \\
E_a \to E_a'' &= E_a\cos\frac{1}{2}\lambda + \hat{p}_a\hat{p}_b E_b\left(1-\cos\frac{1}{2}\lambda\right) + \\
&\quad + \left[-(H_a - \hat{p}_a\hat{p}_b H_b)\lambda_3 - \hat{F}_{ab}E_b\lambda_2 + i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\hat{F}_{cd}E_d\lambda_1\right]\frac{1}{\lambda}\sin\frac{1}{2}\lambda,
\end{aligned} \tag{42б}$$

$$\begin{aligned}
E_a &\to E_a\cos\frac{1}{2}\xi + \hat{p}_a\hat{p}_b E_b\left(1-\cos\frac{1}{2}\xi\right) + \\
&\quad + i\hat{p}_a\hat{p}_b\left[-E_b\xi_3 + H_b(\xi_1 + i\xi_2)\right]\frac{1}{\xi}\sin\frac{1}{2}\xi, \\
H_a &\to H_a\cos\frac{1}{2}\xi + \hat{p}_a\hat{p}_b H_b\left(1-\cos\frac{1}{2}\xi\right) + \\
&\quad + i\hat{p}_a\hat{p}_b\left[H_b\xi_3 + E_b(\xi_1 - i\xi_2)\right]\frac{1}{\xi}\sin\frac{1}{2}\xi,
\end{aligned} \tag{42в}$$

$$E_a \to E_a \cos\varkappa + \hat{p}_a\hat{p}_b E_b(1-\cos\varkappa) + (H_a - \hat{p}_a\hat{p}_b H_b)\sin\varkappa,$$
$$H_a \to H_a \cos\varkappa + \hat{p}_a\hat{p}_b H_b(1-\cos\varkappa) - (E_a - \hat{p}_a\hat{p}_b E_b)\sin\varkappa,$$

$$E_a \to E_a \cos\varphi + \hat{p}_a\hat{p}_b E_b(1-\cos\varphi) - i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b H_c \sin\varphi,$$
$$H_a \to H_a \cos\varphi + \hat{p}_a\hat{p}_b H_b(1-\cos\varphi) + i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b E_c \sin\varphi,$$

$$E_a \to E_a \exp(ic), \qquad H_a \to H_a \exp(ic), \tag{42г}$$

где

$$\xi = \left(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2\right)^{1/2}, \qquad \lambda = \left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\right)^{1/2}, \qquad \theta = \left(\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2\right)^{1/2},$$

ξ_a, λ_a, θ_a, $\varkappa$, φ, c — произвольные действительные параметры. Преобразования (42) образуют представление группы $U(2)\otimes U(2)\otimes U(2)$.

Доказательство. Инвариантность уравнений (41) относительно преобразований (42) легко может быть проверена непосредственно. Менее очевидна групповая структура этих преобразований, которую проще всего установить, преобразуя уравнения (41) к диагональному виду.

Запишем уравнения (41) в матричной форме

$$L\tilde{\Psi} = 0, \qquad L = i\frac{\partial}{\partial t} - \sigma_2\tilde{S}_a\hat{p}_a, \tag{43}$$

где $\tilde{\Psi}$ — шестикомпонентная функция:

$$\Psi \text{ — столбец } (H_1, H_2, H_3, E_1, E_2, E_3),$$
$$\sigma_2 = i\begin{pmatrix} \tilde{0} & -\tilde{I} \\ \tilde{I} & \tilde{0}\end{pmatrix}, \qquad \tilde{S}_a = \begin{pmatrix} S_a & \tilde{0} \\ \tilde{0} & S_a\end{pmatrix}, \tag{44}$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0\end{pmatrix}, \tag{45}$$

$\tilde{I}$ и $\tilde{0}$ — трехрядные квадратные единичные и нулевые матрицы.

Диагонализируем уравнение (43). Используя для этой цели унитарный оператор

$$U = U_1U_2U_3U_4,$$
$$U_1 = \exp\left(i[\tilde{S}_1, \tilde{S}_2]_+\frac{\pi}{4}\right), \qquad U_2 = \exp\left[\frac{i}{\sqrt{2}}(\tilde{S}_2 - \tilde{S}_1)\operatorname{arctg}\sqrt{2}\right],$$
$$U_3 = \exp\left(-i\frac{\tilde{S}_a\tilde{p}_a}{\tilde{p}}\operatorname{arctg}\frac{\tilde{p}}{p_1+p_2+p_3}\right), \qquad U_4 = \exp\left[(\tilde{\sigma}_2 - 1)\tilde{F}\vec{\tilde{S}}\cdot\vec{p}\,\frac{\pi}{4}\right], \tag{46}$$

где $\tilde{F}$ — оператор, полученный из (26) заменой $S_a \to \tilde{S}_a$, приходим к уравнениям

$$L'\tilde{\Phi} = 0, \qquad L' = ULU^{-1} = i(\tilde{S}_1\tilde{S}_2 + \tilde{S}_2\tilde{S}_1)\tilde{S}_3 p - i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \tilde{\Phi} = U\Psi. \tag{47}$$

Формулы (47) задают систему незацепляющихся уравнений, поскольку согласно (45)

$$i(\tilde{S}_1\tilde{S}_2+\tilde{S}_2\tilde{S}_1)\tilde{S}_3=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & -1 & 0 & & \tilde{0} & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ \hline & & & -1 & 0 & 0 \\ & \tilde{0} & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)=\Gamma_0. \tag{48}$$

Из (47), (48) заключаем, что существует двенадцать линейно независимых матриц $\tilde{Q}_A$, коммутирующих с Γ_0 и тем самым удовлетворяющих условию инвариантности уравнений (47):

$$[L'_1,\tilde{Q}_A]_-\Phi=0. \tag{49}$$

Полный набор таких матриц выберем в виде

$$\tilde{Q}'_a=\tilde{\Sigma}'_{bc}=\frac{1}{2}\Gamma_0\tilde{\sigma}_a,\qquad \tilde{Q}'_{3+a}=\tilde{\Sigma}'_{4a}=\frac{1}{2}\Gamma_0^2\tilde{\sigma}_a,\qquad \tilde{Q}'_7=\tilde{\Sigma}'_7=\Gamma_0,$$

$$\tilde{Q}'_8=\tilde{\Sigma}'_8=\tilde{\sigma}_0,\qquad \tilde{Q}'_9=1-\Gamma_0^2,\qquad \tilde{Q}'_{9+a}=\frac{1}{2}\left(1-\Gamma_0^2\right)\tilde{\sigma}_a,\quad a=1,2,3,$$

где

$$\tilde{\sigma}_0=\begin{pmatrix}\tilde{I} & \tilde{0}\\ \tilde{0} & \tilde{I}\end{pmatrix},\qquad \tilde{\sigma}_1=i\begin{pmatrix}\tilde{0} & \tilde{I}\\ \tilde{I} & \tilde{0}\end{pmatrix},\qquad \tilde{\sigma}_3=\begin{pmatrix}\tilde{I} & \tilde{0}\\ \tilde{0} & -\tilde{I}\end{pmatrix},$$

Операторы $\tilde{\Sigma}'_{ab}$, $\tilde{\Sigma}'_{\alpha}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям (35), т.е. реализуют представление алгебры Ли группы $U(2)\otimes U(2)$. Матрицы $\tilde{Q}'_{8+l}$ ортогональны $\tilde{\Sigma}'_{ab}$, $\tilde{\Sigma}'_{\alpha}$ и образуют алгебру Ли группы $U(2)$. Отсюда заключаем, что уравнения (47) инвариантны относительно произвольных преобразований из группы $U(2)\otimes U(2)\otimes U(2)$:

$$\tilde{\Phi}\to\exp\left(i\tilde{Q}'_a\theta_a\right)\tilde{\Phi}=\left[1+\left(\frac{2\tilde{Q}'_a\theta_a}{\theta}\right)^2\left(\cos\frac{\theta}{2}-1\right)+i\frac{2\tilde{Q}'_a\theta_a}{\theta}\sin\frac{\theta}{2}\right]\tilde{\Phi}, \tag{51а}$$

$$\tilde{\Phi}\to\exp\left(i\tilde{Q}'_{3+a}\lambda_a\right)\tilde{\Phi}= \\ =\left\{1+\left(\frac{2\tilde{Q}'_{3+a}\lambda_a}{\lambda}\right)^2\left(\cos\frac{\lambda}{2}-1\right)+i\frac{2\tilde{Q}'_{3+a}\lambda_a}{\lambda}\sin\frac{\lambda}{2}\right]\tilde{\Phi}, \tag{51б}$$

$$\tilde{\Phi}\to\exp\left(i\tilde{Q}'_{9+a}\xi_a\right)\tilde{\Phi}= \\ =\left\{1+\left(\frac{2\tilde{Q}'_{9+a}\xi_a}{\xi}\right)^2\left(\cos\frac{\xi}{2}-1\right)+i\frac{2\tilde{Q}'_{9+a}\xi_a}{\xi}\sin\frac{\xi}{2}\right]\tilde{\Phi}, \tag{51в}$$

$$\tilde{\Phi}\to\exp\left(i\tilde{Q}'_{6+a}\varphi_a\right)\tilde{\Phi}=\left\{1+\left(\tilde{Q}'_{6+a}\right)^2(\cos\varphi_a-1)+i\tilde{Q}'_{6+a}\sin\varphi_a\right\}\tilde{\Phi}, \tag{51г}$$

$$\varphi_1 = \varkappa, \qquad \varphi_2 = \varphi, \qquad \varphi_3 = c.$$

Возвращаясь с помощью оператора, обратного (46), к исходному Ψ-представлению (44), получаем из (51) закон преобразования (42) для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Теорема доказана.

§ 6. Инвариантность уравнений Максвелла относительно 22-мерной алгебры Ли

Рассмотрим снова уравнения Максвелла (1), (6). Мы показали выше, что существуют два набора генераторов — $\{P_\mu, J_{\mu\nu}, K_\mu, D\}$ и $\{\Sigma_{kl}, \Sigma_5, \Sigma_6\}$, удовлетворяющих условиям инвариантности этих уравнений (9). При этом, однако, операторы (10), (11) и (38) не образуют замкнутой алгебры. Симметрия уравнений (6), (1) относительно 22-мерной алгебры Ли, включающей подалгебры C_4 и $U(2) \oplus U(2)$, устанавливается следующей теоремой.

Теорема 4. *Уравнения (6) инвариантны относительно 22-мерной алгебры Ли, базисные элементы которой задаются операторами (38) и генераторами*

$$\begin{aligned} &\hat{P}_\mu = p_\mu, \qquad \hat{J}_{\mu\nu} = x'_\mu p_\nu - x'_\nu p_\mu, \\ &\hat{D} = x'_\mu p^\mu + i, \qquad \hat{K}_\mu = -x'_\nu x'^\nu p_\mu + 2x'_\mu \hat{D}, \end{aligned} \tag{52}$$

где

$$x'_a = W^+ x_a W,$$

W — оператор, заданный формулой (30).

Доказательство. Утверждения теоремы легко проверить непосредственно в представлении, где уравнения (6) имеют форму (31). В таком представлении операторы (38) принимают вид (34), а для операторов (52) получаем с помощью преобразования (30)

$$\begin{aligned} &\hat{P}'_\mu = W\hat{P}_\mu W^+ = p_\mu, \qquad \hat{J}'_{\mu\nu} = W\hat{J}_{\mu\nu}W^+ = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \\ &\hat{D}' = W\hat{D}W^+ = x_\mu p^\mu + i, \qquad \hat{K}'_\mu = W\hat{K}_\mu W^+ = -x_\nu x^\nu p_\mu + 2x_\mu \hat{D}'. \end{aligned} \tag{53}$$

Прямой проверкой убеждаемся, что операторы L'_1 и L'_2 (31) и генераторы (34), (53) удовлетворяют условиям инвариантности (33):

$$\begin{aligned} &[L'_1, P'_\mu]_- = [L'_1, J'_{ab}]_- = [L'_1, \Sigma'_{kl}]_- = 0, \\ &[L'_1, K'_0]_- = 2i\left[x_0 + (x_a p_a - i)\frac{\alpha_3}{p}\right] L'_1, \\ &[L'_1, K'_a]_- = 2i\left[\frac{p_a}{p} x_0 \alpha_3 + x_a\right] L'_1, \qquad [L'_\alpha, D']_- = iL'_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \\ &[L'_1, J'_{0a}]_- = -i\alpha_3 \hat{p}_a L'_1, \qquad [L'_2, P'_\mu]_- = [L'_2, J'_{ab}]_- = [L'_2, \Sigma'_{kl}]_- = 0, \\ &[L'_2, Q'_A]_- = [p, Q'_A]_- p^{-1} L'_2, \quad \{Q_A\} = \{K'_\mu, J'_{0a}\}, \qquad [L'_\alpha, \Sigma'_6]_- = 0. \end{aligned}$$

Операторы $\hat{P}'_\mu$, $\hat{J}'_{\mu\nu}$, $\hat{K}'_\mu$, $\hat{D}'$ удовлетворяют алгебре (12), (18) и коммутируют с Σ'_{kl}, Σ_5, Σ_6, т.е. образуют алгебру Ли группы $U(2) \otimes U(2) \otimes U(2)$. Теорема доказана.

Используя формализм, предложенный в работах [9–11], утверждения теоремы 4 можно обобщить на случай пуанкаре-инвариантных уравнений для безмассовых частиц произвольного спина.

Отметим, что генераторы (38), (52) являются нелокальными (интегро-дифференциальными) операторами. Это означает, что найденная алгебра инвариантности уравнений Максвелла в принципе не может быть получена в классическом подходе Ли (см. [7]), где, как известно, генераторы группы всегда принадлежат классу дифференциальных операторов первого порядка.

§ 7. Инвариантность уравнений Максвелла относительно преобразований, не изменяющих времени

Хорошо известно, что уравнения Максвелла (1), (6) инвариантны относительно преобразований координат и времени вида (2а), (2б), образующих неоднородную группу Лоренца (группу Пуанкаре). Здесь мы покажем, что уравнения (6) остаются инвариантными и в том случае, когда волновая функция преобразуется по представлению группы Пуанкаре, а координаты x_μ преобразуются по нелоренцевскому закону

$$x_a \to x'_a = x'_a(\lambda_b, \theta_b, x_b), \qquad x_0 \to x'_0 = x_0, \tag{54}$$

где λ_b, θ_b — некоторые параметры.

Инвариантность уравнений (6) относительно преобразований (54) по существу установлена ранее в параграфе 2, где показано, что генераторы группы $P(1,3)$ на множестве решений этих уравнений имеют вид (11). Действительно, нетрудно убедиться, что

$$[J_{\mu\nu}, x_0]_- = [P_\mu, x_0]_- = 0.$$

Здесь мы найдем в явном виде группу преобразований, порождаемых генераторами (11). Формально эти преобразования могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} &\Psi \to \Psi' = \hat{W}\Psi, \qquad \hat{\Psi} = \exp(iQ_A\lambda_A), \\ &x_\mu \to x'_\mu = \hat{W} x_\mu \hat{W}^+, \end{aligned} \tag{55}$$

где Q_A — произвольный генератор из (11), λ_A — действительные параметры, $A = 1, 2, \ldots, 10$.

Поскольку генераторы J_{0a} (11) невозможно представить в виде суммы двух коммутирующих операторов, один из которых выражался бы только через числовые матрицы, а второй — через операторы дифференцирования и умножения на x_0, вычисление явного вида x'_a (55) представляет довольно сложную задачу. Для решения этой задачи преобразуем операторы $\hat{W}$ к такой форме, чтобы они не содержали матриц под знаком экспоненты. Ограничимся нетривиальным случаем, когда $\{Q_A\} = \{J_{0a}\}$, т.е. рассмотрим только операторы преобразований вида

$$W = \exp(iJ_{0a}\lambda_a). \tag{56}$$

Используя тождество

$$iJ_{0a}\lambda_a = A_+P_+ + A_-P_-, \tag{57}$$

где

$$P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \vec{\alpha}\cdot\vec{p}), \qquad A_\pm = i(tp_a \mp \tilde{x}^\pm p + S_{0a})\lambda_a, \qquad \tilde{x}_a^\pm = x_a \mp i\frac{p_a}{p^2},$$

и соотношения

$$\begin{aligned} &A_\pm P_\pm A_\pm P_\pm = A_\pm^2 P_\pm, \qquad P_\pm P_\pm = P_\pm, \qquad P_\pm P_\mp = 0,\\ &P_\pm A_\mp P_\mp = P_\mp A_\pm P_\pm = 0, \end{aligned} \tag{58}$$

приводим (54) к желаемой форме:

$$\begin{aligned} &W = \exp(iJ_{0a}\lambda_a) = N(\lambda)\left[\exp(iB_+)P_+ + \exp(iB_-)P_-\right],\\ &W^{-1} = \exp(-iJ_{0a}\lambda_a) = N(-\lambda)\left[\exp(-iB_+)P_+ + \exp(-iB_-)P_-\right], \end{aligned} \tag{59}$$

где

$$\begin{aligned} &N(\lambda) = \exp(iS_{0a}\lambda_a) = 1 + \frac{iS_{0a}\lambda_a}{\lambda}\,\mathrm{sh}\,\lambda + \left(\frac{S_{0a}\lambda_a}{\lambda}\right)^2(\mathrm{ch}\ -1),\\ &B_+ = tp_a - \tilde{x}_a^+ p, \qquad B_- = tp_a + \tilde{x}_a^- p, \qquad \lambda = \sqrt{\lambda_a^2}. \end{aligned} \tag{60}$$

Формулы (59), (60) задают искомое представление операторов W, в котором не содержатся матрицы под знаком экспоненты. Подставив (59) в (55), получаем теперь прямым вычислением закон преобразования для x_μ:

$$\begin{aligned} &x_0' = Wx_0W^{-1} = x_0,\\ &x_a' = Wx_aW^{-1} = x_a + [W, x_a]_- W^{-1} = \Big\{[\exp(iB_+), x_a]_- P_+ +\\ &\quad + [\exp(iB_-), x_a]_- P_- + N(\lambda)[P_+, x_a]_- + N(\lambda)[P_-, x_a]_-\Big\}\times\\ &\quad \times N(-\lambda)[\exp(-iB_+)P_+ + \exp(-iB_-)P_-] = x_a[1 - N(-\lambda)] +\\ &\quad + \sum_{\varepsilon=1,-1}\left\{\frac{1}{p(\varepsilon\lambda)}\left[tp_a(\varepsilon\lambda) + \frac{2ip_a(\varepsilon\lambda)}{p(\varepsilon\lambda)} - B_a^\varepsilon(\varepsilon\lambda)\right]N(-\lambda)P_\varepsilon +\right.\\ &\quad \left. + \frac{i}{2}\frac{p_a(\varepsilon\lambda)\vec{\alpha}\cdot\vec{p} - i\alpha_0(\lambda)}{p(\varepsilon\lambda)}(P_\varepsilon + V_\varepsilon P_{-\varepsilon})\right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} &p_a(\varepsilon\lambda) = p_a + \frac{\lambda_a\lambda_b p_b}{\lambda^2}(\mathrm{ch}\,\lambda - 1) + \frac{\lambda_a}{\lambda}p\,\mathrm{sh}\,(\varepsilon\lambda),\\ &B_a^\varepsilon(\varepsilon\lambda) = B_a^\varepsilon \mathrm{ch}\,\lambda + \frac{\lambda_a B_b^\varepsilon \lambda_b}{\lambda^2}(\mathrm{ch}\,\lambda - 1) + \frac{M_{ab}\lambda_b}{\lambda}\,\mathrm{sh}\,(\varepsilon\lambda),\\ &B_a^\varepsilon = tp_a - \varepsilon x_a^\varepsilon E, \qquad M_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, \qquad p(\varepsilon\lambda) = p\,\mathrm{ch}\,\lambda + \frac{p_a\lambda_a}{\lambda}\,\mathrm{sh}\,(\varepsilon\lambda),\\ &\alpha_a(\varepsilon\lambda) = \alpha_a \mathrm{ch}\,\lambda + \frac{\lambda_a\alpha_b\lambda_b}{\lambda^2}(\mathrm{ch}\,\lambda - 1) - \frac{i\lambda_a\alpha_b\lambda_b}{\lambda^2}\,\mathrm{sh}\,\lambda,\\ &V_+ = \exp(-2i\vec{x}\cdot\vec{\lambda}p)\exp[2itp(1 - \mathrm{ch}\,\lambda)], \qquad V_- = V^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили закон преобразования (61) для операторов x_μ, порождаемых генераторами J_{0a} (11). Принципиальное отличие преобразований (61) от (2а), (2б) состоит в том, что преобразования (51) не сохраняют квадратичную форму (3) (и не изменяют времени, $x'_0 = x_0$), хотя волновая функция Ψ при этом преобразуется по представлению группы Пуанкаре.

1. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств дифференциальных уравнений в частных производных, В кн.: Теоретико-групповые методы в математической физике, Киев, 1978, 5–44.
2. Bateman H., The transformation of the electron dynamical equations, *Proc. London Math. Soc.*, 1909, **8**, 223–264,
3. Cunningham E., The principle of relativity in electrodinamics and an extention thereof, *Proc. London Math. Soc.*, 1909, **8**, 77–97.
4. Heaviside O., Some properties of Maxwell equations, *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, 1893, **183**, 423–430.
5. Larmor I., Collected Papers, London, Clarendon Press, 1928, 273 p.
6. Rainich G.I., On the symmetry of Maxwell equations, *Trans. Am. Math. Soc.*, 1925, **27**, 106–109,
7. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
8. Gross L., Norm invariance of mass-zero equations under conformal group, *J. Math. Phys.*, 1964, **5**, 687–695.
9. Фущич В.И., Никитин А.Г., Дифференциальные уравнения первого и второго порядка, инвариантные относительно группы Пуанкаре, Препринт 77.3, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1977, 48 с.
10. Никитин А.Г., Фущич В.И., Пуанкаре-инвариантные дифференциальные уравнения для частиц произвольного спина, *Теор. и мат. физика*, 1978, **34**, № 3, 319–333.
11. Фущич В.И., Никитин А.Г., Пуанкаре-инвариантные уравнения движения частиц произвольного спина, *Физика элементарных частиц и атомного ядра (ЭЧАЯ)*, 1978, **9**, вып. 3, 501–553.
12. Lomont I.S., Dirac-like wave equations for particles of zero rest mass and their quantization, *Physical Rewiew*, 1958, **111**, № 6, 1710–1719.
13. Moses H.E., A spinor representation of Maxwell's equation, *Nuovo Cimento Suppl.*, 1958, **7**, № 1, 1–18.
14. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т., Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., Наука, 1969, 424 с.
15. Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, М., Изд-во иностр. лит., 1963, 842 с.
16. Mack G., Salam A., Finite-component field representations of the conformal group, *Annals of Physics*, 1969, **53**, 174–202.
17. Fushchych W.I., On the additional invariance of the Dirac and Maxwell equations, *Lettere Nuovo Cimento*, 1974, **11**, № 10, 508–512.
18. Фущич В.И., Грищенко А.Л., Никитин А.Г., О релятивистских уравнениях движения без "лишних" компонент, *Теор. и мат. физика*, 1971, **8**, № 2, 192–205.