Пуанкаре-инвариантные уравнения движения частиц произвольного спина

В.И. ФУЩИЧ, А.Г. НИКИТИН

“Физические явления, по-видимому, перестают подчиняться законам, которые можно выразить с помощью дифференциальных уравнений, и это, вероятно, самое большое и самое глубокое потрясение, которое испытала физика со времен Ньютона”.

А. Пуанкаре

Получены и подробно исследованы три класса пуанкаре-инвариантных уравнений, описывающих свободное движение частицы произвольного спина. На основе выведенных уравнений получено непротиворечивое описание поведения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Установлены трансформационные свойства операторов координаты и спина.

The three classes of Poincaré-invariant equations, which describe a free motion of an arbitrary spin particle, have been obtained and studied in detail. The consistent description of the charged particle behavior in an external electromagnetic field have been obtained in the frame of the equations derived. The transformation properties of the position and of the spin operators have been established.

Введение

Полвека назад, в 1928 г., Дирак открыл уравнение для частицы со спином $1/2$. Э. Майорана [2] был первым, кто сформулировал и частично решил задачу о построении релятивистских уравнений движения для частицы произвольного спина. Решая эту задачу, Майорана “попутно” открыл, за 15 лет до математиков, унитарные бесконечномерные представления однородной группы Лоренца $O(1,3)$. С тех пор этой проблеме посвящено огромное число (около 1000) работ (наиболее полный список литературы по релятивистским уравнениям можно найти в работах [3–17]). Такой большой поток статей на эту тему говорит о том, что исследования по уравнениям для частиц с высокими спинами в связи с экспериментальным обнаружением резонансов со спинами $1, 3/2, 5/2, \ldots, 11/2$ вышли далеко за рамки чисто академического интереса.

До работы Фолди [18] в основном исследовались — с использованием тензорного и спинорного анализа и конечномерных представлений группы $O(1,3)$ — явно ковариантные релятивистские уравнения для частиц с произвольным спином. Обычно явно ковариантные уравнения представляют собой систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно производных по пространственным и временной переменным. Особенностью этих уравнений является то, что волновая функция для частицы и античастицы с фиксированной массой m и спином $s > 1/2$ с необходимостью имеет компонент больше, чем число возможных состояний [равное $2(2s+1)$].

Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1978, **9**, вып. 3, С. 501–553.

Фолди [18], опираясь на результаты Вигнера по представлениям группы Пуанкаре $P(1,3)$ [19, 20], провел теоретико-групповой анализ уравнений Дирака и Прока. Им же установлено, что уравнение для частицы произвольного спина можно представить в шредингеровской форме:

$$i\partial\Psi(t,\boldsymbol{x})/\partial t = H_s\Psi(t,\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

где

$$H_s = \gamma_0^{(s)}E; \qquad \gamma_0^{(s)} = \begin{pmatrix} 1^{(2s+1)} & 0^{(2s+1)} \\ 0^{(2s+1)} & 1^{(2s+1)} \end{pmatrix}; \tag{2}$$

$1^{(2s+1)}$ и $0^{(2s+1)}$ — соответственно единичная и нулевая матрицы размерности $(2s+1)\times(2s+1)$;

$$E = (p_a^2 + m^2)^{1/2}; \qquad p_a = -i\partial/\partial x_a. \tag{3}$$

Уравнение (1), в отличие от явно ковариантных, является интегро-дифференциальным (или псевдодифференциальным), так как оператор E — квадратный корень из дифференциального оператора. Грубо говоря, это — уравнение бесконечно высокого порядка по пространственным производным и в нем отсутствует явная симметрия между пространственными и временными переменными.

В работах [21–24] было обнаружено, что если в явно ковариантные уравнения для частиц со спинами 1 и 3/2 ввести релятивистски-инвариантным способом взаимодействие с внешним электромагнитным полем, то частицы, описываемые такими уравнениями, будут двигаться со сверхсветовой скоростью; энергия таких частиц сможет принимать любые действительные и комплексные значения. Вайтман [73] показал, что даже пятикомпонентное уравнение Кеммера–Дэффина–Петье для частицы со спином $s = 0$ обладает теми же свойствами. Некоторые явно ковариантные уравнения для $s > 1/2$ после введения в них взаимодействия минимальным способом становятся просто противоречивыми [26].

К настоящему времени единственным явно ковариантным уравнением, не имеющим указанных патологических свойств, является уравнение Дирака для частицы со спином 1/2.

Основная причина возникновения указанных трудностей состоит в том, что волновые функции в уравнениях первого порядка для частиц со спином 0, 1, 3/2 имеют лишние (нефизические) компоненты, что позволяет ввести такие взаимодействия, которые приводят к нежелательным физическим следствиям. Такими же нефизическими свойствами обладают и релятивистские уравнения, в которые входят производные по времени выше первого порядка [27].

Чтобы преодолеть упомянутые трудности, естественно попытаться найти такие уравнения движения для свободной частицы, волновая функция которой имела бы только $2(2s+1)$ компонент. Чтобы функция, удовлетворяющая такому уравнению, допускала стандартную вероятностную интерпретацию, уравнение движения должно иметь шредингерову форму (1). При этом релятивистский гамильтониан свободной частицы должен явно зависеть от спиновых матриц. В противном случае он не несет никакой информации о спиновых эффектах (спин-орбитальной связи, дипольном и квадрупольном взаимодействии и т.п.), которые должны иметь место при введении взаимодействия с электромагнитным полем.

Построению уравнений движения для свободных частиц с фиксированной массой m и спином s, удовлетворяющих приведенным условиям, посвящены работы [28–44]. Разные авторы, исходя из различных конкретных математических постановок задачи, получили уравнения, отличающиеся друг от друга. Тем не менее между уравнениями для свободных частиц, полученных во всех работах [28–44], можно установить взаимно-однозначную связь. Однако физически эти уравнения совершенно различны, так как при введении в них взаимодействия с помощью стандартной замены $p_\mu \to \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$ они становятся неэквивалентными и приводят к различным физическим следствиям.

Вивер, Хаммер и Гуд [28], а затем Метьюз с сотр. [30–35] вывели уравнения вида (1) для частиц произвольного спина, инвариантные относительно локальных преобразований из группы Пуанкаре $P(1,3)$. Гамильтонианы H_s Вивера, Хаммера, Гуда и Метьюза (ВХГМ) явно зависят от спиновых матриц, а волновые функции имеют простые правила преобразования. Все эти гамильтонианы представляют собой интегро-дифференциальные операторы в гильбертовом пространстве волновых функций $\{\Psi(t,\boldsymbol{x})\}$ со скалярным произведением

$$(\Psi_1,\Psi_2) = \int \Psi_1^+(t,\boldsymbol{x}) M_s \Psi_2(t,\boldsymbol{x})\, d^3x, \tag{4}$$

где M_s — некоторый метрический положительно определенный интегро-дифференциальный оператор. Зависимость метрического оператора от импульса и спина сильно затрудняет задачу описания на основе теории ВХГМ поведения заряженной частицы во внешних электромагнитных полях.

В настоящей статье, являющейся в основном обзором наших работ [36–41, 45–48], построены пуанкаре-инвариантные уравнения для свободных частиц, допускающие непротиворечивое описание движения частиц во внешних полях. Полученные уравнения можно разделить на следующие три класса.

1. Интегро-дифференциальные уравнения в форме (1). В отличие от подхода ВХГМ, гамильтонианы в уравнении (1) определены в гильбертовом пространстве с обычно принятым в квантовой механике скалярным произведением

$$(\Psi_1,\Psi_2) = \int \Psi_1^+(t,\boldsymbol{x}) \Psi_2(t,\boldsymbol{x})\, d^3x. \tag{5}$$

Этот факт позволил нам обобщить найденные уравнения на случай взаимодействия частиц с полем [38, 39] в предположении, что импульсы частиц малы по сравнению с их массами, и вычислить электромагнитные моменты частиц с произвольным спином. В работах Гуертина [43, 44] результаты работ [36–41] получили интересное обобщение на случай гильбертова пространства с индефинитной метрикой. При этом метрический оператор M_s является, как и для уравнений Тамма–Сакаты–Такетани (ТСТ), матрицей, не зависящей от импульса и спина частицы.

2. Система $2(2s+1)$ линейных дифференциальных уравнений второго порядка вида (1). Построены все возможные (с точностью до преобразований подобия, задаваемых числовыми матрицами) пуанкаре-инвариантные уравнения второго порядка, описывающие движение свободной частицы с произвольным спином и не имеющие лишних компонент. В случае $s=1/2,0,1$ полученные уравнения совпадают с уравнениями Дирака и ТСТ [49, 50]. В качестве платы за дифференциальность гамильтонианов в этом подходе приходится иметь дело с индефинитной метрикой или с метрикой (4).

3. Система дифференциальных уравнений первого порядка вида (1) для частицы произвольного спина. Эти уравнения представляют собой систему $8s$ уравнений типа Дирака с ковариантным дополнительным условием, устраняющим лишние компоненты волновой функции. Уравнения имеют достаточно простую форму, которая не усложняется с ростом спина, и не приводит к противоречиям при обобщении на случай заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле.

Для полноты изложения в рамках развиваемого подхода рассмотрены уравнения для частицы с нулевой массой покоя. В [45, 46] показано, что для частицы и античастицы с нулевой массой и произвольным спином s существует три типа пуанкаре-инвариантных уравнений. Одно из таких нелокальных уравнений движения не инвариантно даже относительно PCT-преобразования [45]. За последние годы было предложено большое число уравнений (не всегда неэквивалентных) для частиц с нулевой массой [51–54]. Оказалось, что все они принадлежат к указанным трем типам [47]. Во втором разделе, с использованием результатов работ [45–48], найдены все возможные (с точностью до эквивалентности) пуанкаре-инвариантные уравнения для безмассовых частиц и изучены их свойства относительно дискретных преобразований P, C и T.

При выводе релятивистских уравнений движения обычно используют такие понятия, как тензор и спинор относительно группы Лоренца $O(1,3)$. В данной работе для получения и анализа уравнений движения эти понятия нигде не используют. Все изложение ведется на алгебраическом языке, развитом в работах [30–43, 45–48, 55–57]. Теоретико-групповой анализ уравнений проведен не в традиционно используемых терминах представлений группы Лоренца $O(1,3)$, а в терминах представлений группы Пуанкаре $P(1,3)$ [19, 20], содержащей в качестве подгруппы группу Лоренца $O(1,3)$. Причина возникновения такого взгляда на уравнения движения обусловлена тем, что к настоящему времени только инварианты группы Пуанкаре $P(1,3)$ [а не инварианты ее подгруппы $O(1,3)$] имеют четкую физическую интерпретацию. В связи со сказанным выше возникает естественный вопрос: какие же представления группы Лоренца $O(1,3)$ реализуются на множестве решений $\{\Psi\}$ выведенных уравнений.

На этот вопрос можно дать такой ответ. Так как на множестве решений $\{\Psi\}$ реализуется, как правило, прямая сумма нескольких неприводимых бесконечномерных [но конечномерных относительной малой (спиновой) группы $SU(2)$] унитарных представлений группы $P(1,3)$, это означает, что на этом же множестве — из-за включения $P(1,3) \supset O(1,3)$ — реализуется бесконечная прямая сумма (точнее прямой интеграл) неприводимых бесконечномерных унитарных представлений группы Лоренца.

В заключение отметим, что изложенный метод исследования релятивистских уравнений применим и для построения уравнений движения частиц произвольного спина, инвариантных относительно группы движений нерелятивистской квантовой механики — группы Галилея [58, 59]. Отметим также, что если резонансы с высокими спинами описывать как сложную систему, состоящую, например, из двух элементарных стабильных частиц со спинами, то и в этом случае применима наша методика [57].

1. Пуанкаре-инвариантные уравнения без лишних компонент

Постановка задачи

Найдем уравнения движения свободной релятивистской частицы с произвольным спином в гамильтоновой форме (1) в пространстве функций со скалярным произведением (4) и (5).

Будем говорить, что уравнение вида (1) пуанкаре-инвариантно и описывает частицы с массой m и спином s, если генераторы $P(1,3)$-группы P_a, $J_{\mu\nu}$ и гамильтониан H_s удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[P_a, P_b]_- = 0, \qquad [P_a, H_s]_- = 0, \qquad [J_{ab}, H_s]_- = 0; \tag{6}$$

$$[J_{ab}, J_{cd}]_- = i(\delta_{ac}J_{bd} + \delta_{bd}J_{ac} - \delta_{ad}J_{bc} - \delta_{bc}J_{ad}); \tag{7}$$

$$[J_{ab}, J_{0c}]_- = i(\delta_{ac}J_{0b} - \delta_{bc}J_{0a}); \tag{8}$$

$$[P_a, J_{0b}]_- = i\delta_{ab}H_s; \qquad [P_a, J_{bc}]_- = i(\delta_{ac}P_b - \delta_{ab}P_c); \tag{9}$$

$$[J_{0a}, J_{0b}]_- = -iJ_{ab}; \tag{10}$$

$$[H_s, J_{0a}]_- = iP_a, \qquad a,b,c,d = 1,2,3; \tag{11}$$

$$P_\mu P^\mu = H_s^2 - P_a^2 = m^2; \tag{12}$$

$$W_\mu W^\mu \Psi(t,\boldsymbol{x}) = m^2 s(s+1)\Psi(t,\boldsymbol{x}), \tag{13}$$

где введено обозначение $[A,B]_- = AB - BA$, а

$$W_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\tau}J^{\nu\rho}P^\sigma/2 \tag{14}$$

— вектор Любанского–Паули.

Задача построения пуанкаре-инвариантных уравнений движения частицы произвольного спина будет решена в трех различных подходах. Уравнения, полученные в первом и третьем подходах, оказываются удобными для применения их к задачам квантовой механики, а уравнения, полученные во втором подходе, можно успешно использовать в теории поля [31].

В первом подходе (I) задача сводится к следующему: найти все возможные (с точностью до эквивалентности) гамильтонианы H_s^I, такие, что операторы [36, 37]

$$\begin{gathered} P_0^{\mathrm{I}} = H_s^{\mathrm{I}}; \qquad P_a^{\mathrm{I}} = p_a = -i\partial/\partial x_a, \qquad J_{ab}^{\mathrm{I}} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \\ J_{0a}^{\mathrm{I}} = tp_a - \frac{1}{2}[x_a, P_0^{\mathrm{I}}]_+, \qquad [x_a, P_0^{\mathrm{I}}]_+ = x_a P_0^{\mathrm{I}} + P_0^{\mathrm{I}} x_a \end{gathered} \tag{15}$$

удовлетворяют алгебре Пуанкаре (6)–(13). Здесь S_{ab} — матрицы, реализующие прямую сумму двух неприводимых представлений $D(s)$ алгебры $O(3)$:

$$S_{ab} = \begin{pmatrix} S_c & 0 \\ 0 & S_c \end{pmatrix}, \qquad (a,b,c) \text{ — цикл } (1,2,3). \tag{16}$$

Во втором подходе (II) задача формулируется следующим образом: найти все такие гамильтонианы H_s^{II}, что совокупность операторов [28–35, 38]

$$\begin{gathered} P_0^{\mathrm{II}} = H_s^{\mathrm{II}}, \qquad P_a^{\mathrm{II}} = p_a = -i\partial/\partial x_a, \\ J_{ab}^{\mathrm{II}} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \qquad J_{0a}^{\mathrm{II}} = tp_a - x_a P_0^{\mathrm{II}} + i\sigma_3 S_a \end{gathered} \tag{17}$$

удовлетворяет алгебре Пуанкаре. Здесь σ_3 — $2(2s+1)$-рядная матрица Паули:

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{18}$$

В том частном случае, когда спин $s = 1/2$, представления (15) и (17) совпадают, поскольку

$$H^{\mathrm{I}}_{1/2} = H^{\mathrm{II}}_{1/2} = \sigma_1 m + 2\sigma_3 \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{p} \tag{19}$$

и

$$\frac{1}{2}[H^{\mathrm{I}}_{1/2}, x_a]_+ \equiv x_a H^{\mathrm{II}}_{1/2} + i\sigma_3 S_a. \tag{20}$$

Оператор (19) — это хорошо известный гамильтониан Дирака. Для других значений s, как будет показано ниже, представления (15) и (17) не совпадают. Выбор структуры представлений алгебры $P(1,3)$ в форме (15) и (17) обусловлен тем, что на множестве решений уравнения Дирака генераторы группы Пуанкаре можно представить в форме или (15) или (17). Основное отличие представления (15) от (17) состоит в том, что операторы (15) при всех значениях s эрмитовы относительно обычно принятого в квантовой механике скалярного произведения (5), в то время как операторы (17) при $s > 1/2$ неэрмитовы относительно (5), но эрмитовы в скалярном произведении (4) с некоторым метрическим оператором $M_s = M_s(p_a)$.

На множестве $\{\Psi\}$ решений уравнения (1) определим операторы дискретных преобразований:

$$\begin{aligned} P\Psi(t, \boldsymbol{x}) &= r_1 \Psi(t_1, -\boldsymbol{x}), \\ T\Psi(t, \boldsymbol{x}) &= r_2 \Psi(-t, \boldsymbol{x}), \\ C\Psi(t, \boldsymbol{x}) &= r_3 \Psi^*(t, \boldsymbol{x}), \end{aligned} \tag{21}$$

где r_a — матрицы, которые, не умаляя общности, можно выбрать в виде:

$$\begin{aligned} &r^{\mathrm{I}}_1 = \sigma_1 \quad \text{или} \quad r^{\mathrm{I}}_1 = \tilde{I} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \qquad r^{\mathrm{II}}_1 = \sigma_1, \\ &r^{\mathrm{I}}_2 = r^{\mathrm{II}}_2 = \Delta \quad \text{или} \quad r^{\mathrm{II}}_2 = \sigma_3 \Delta, \qquad r^{\mathrm{I}}_3 = r^{\mathrm{II}}_3 = \sigma_2 \Delta, \quad \Delta = \begin{pmatrix} \Delta' & 0 \\ 0 & \Delta' \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{22}$$

Δ' — матрица, однозначно определяемая уравнениями [18]

$$\Delta' s_c = -s^*_c \Delta', \qquad (\Delta')^2 = (-1)^{2s}. \tag{23}$$

Операторы P, C, T и генераторы P_μ, $J_{\mu\nu}$ группы $P(1,3)$ должны удовлетворять соотношениям:

$$\begin{aligned} &[P, P_0]_- = [P, P_a]_+ = [P, J_{ab}]_- = [P, J_{0a}]_+ = 0, \\ &[T, P_0]_- = [T, P_a]_+ = [T, J_{0a}]_- = [T, J_{ab}]_+ = 0, \\ &[C, P_\mu]_+ = [C, J_{\mu\nu}]_+ = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Потребуем, чтобы уравнение (1) было инвариантным относительно P-, T-, C-преобразований. При этом к алгебре Пуанкаре (6)–(13) необходимо добавить соотношения (24). Таким образом окончательно получим, что задача о нахождении пуанкаре-инвариантных гамильтоновых уравнений без лишних компонент для частиц с произвольным спином сводится в подходах I и II к отысканию операторов H_s, удовлетворяющих соотношениям (6)–(13), (24).

Подходы I и II позволяют получить гамильтоповы уравнения без лишних компонент для частицы с произвольным спином, которые, однако, не включают уравнений ТСТ [49, 50] для частиц с $s = 0$ и $s = 1$. Уравнения движения, включающие при $s = 1/2$ уравнение Дирака, а при $s = 0, 1$ — уравнение ТСТ, будут получены в третьем подходе (III), в котором задача ставится следующим образом: найти все возможные (с точностью до эквивалентности) дифференциальные операторы второго порядка H_s^{III}, такие, чтобы совокупность операторов

$$\begin{aligned} &P_0^{\mathrm{III}} = H_s^{\mathrm{III}}, \qquad P_a^{\mathrm{III}} = p_a = -i\partial/\partial x_a, \\ &J_{ab}^{\mathrm{III}} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \qquad J_{0a}^{\mathrm{III}} = tp_a - \frac{1}{2}[x_a, P_0^{\mathrm{III}}]_+ + \lambda_a \end{aligned} \tag{25}$$

удовлетворяла алгебре $P(1,3)$. Здесь $\lambda_a = \lambda_a(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{p})$ — некоторый оператор, на явный вид которого мы не накладываем *a priori* никаких ограничений.

Существенное отличие подхода III от подходов I и II состоит в том, что мы не фиксируем явный вид генераторов J_{0a}^{III} и не требуем инвариантности уравнения (1) относительно преобразований P, C, T. Для нахождения явного вида гамильтонианов в подходе III достаточно потребовать, чтобы H_s^{III} принадлежал классу дифференциальных операторов второго порядка.

Представления вида (25) использовались в работах [43], где также были получены гамильтонианы для частиц произвольного спина s, совпадающие при $s = 0, 1$ гамильтонианами ТСТ. Однако при $s > 1$ гамильтонианы [43] являются интегро-дифференциальными операторами.

Явный вид операторов H_s^{I}

Здесь решена задача I, т.е. найдены все те операторы H_s^{I}, которые удовлетворяют системе соотношений (6)–(13), (24) в случае, когда представление алгебры $P(1,3)$ имеет вид (25).

Разложим искомый оператор H_s^{I} по полной системе ортопроекторов

$$H_s^{\mathrm{I}} = \sum_l \left(d_l(p) + \sigma_1 g_l^{\mathrm{I}}(p) + \sigma_2 h_l^{\mathrm{I}}(p) + \sigma_3 f_l^{\mathrm{I}}(p)\right)\Lambda_l, \tag{26}$$

где

$$\begin{aligned} &\Lambda_l = \prod_{l\neq l'} \frac{S_p - l'}{l - l'}, \qquad S_p = \frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{p}, \qquad p = \left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right)^{1/2}, \\ &l, l' = -s, -s+1, \dots, s, \end{aligned} \tag{27}$$

$d_l^{\mathrm{I}}(p)$, $g_l^{\mathrm{I}}(p)$, $h_l^{\mathrm{I}}(p)$, $f_l^{\mathrm{I}}(p)$ — неизвестные функции, зависящие от p.

Нетрудно убедиться, что операторы (27) являются ортопроекторами на собственные подпространства оператора S_p, т.е. удовлетворяют соотношениям

$$\Lambda_l \Lambda_{l'} = \delta_{ll'}\Lambda_l, \qquad \sum_{l=-s}^{s} \Lambda_l = 1, \qquad S_p \equiv \sum_{l=-s}^{s} l\Lambda_l. \tag{28}$$

Определить явный вид гамильтонианов H_s^{I} означает теперь найти все значения коэффициентов $d_l^{\mathrm{I}}(p)$, $g_l^{\mathrm{I}}(p)$, $h_l^{\mathrm{I}}(p)$, $f_l^{\mathrm{I}}(p)$, при которых выполняются соотношения (6)–(13), (24). Подставляя (26) в (24), получаем

$$\begin{aligned} &d_l^{\mathrm{I}} = h_l^{\mathrm{I}} = 0, \qquad f_l^{\mathrm{I}} = f_{-l}^{\mathrm{I}}, \qquad g_l^{\mathrm{I}} = g_{-l}^{\mathrm{I}}, \quad \text{если} \quad r_1^{\mathrm{I}} = \tilde{I}, \\ &d_l^{\mathrm{I}} = h_l^{\mathrm{I}} = 0, \qquad f_l^{\mathrm{I}} = -f_{-l}^{\mathrm{I}}, \qquad g_l^{\mathrm{I}} = g_{-l}^{\mathrm{I}}, \quad \text{если} \quad r_1^{\mathrm{I}} = \sigma_1. \end{aligned} \tag{29}$$

Условие (12) налагает на функции f_l^{I}, g_l^{I} дополнительное ограничение

$$\left(f_l^{\mathrm{I}}\right)^2 + \left(g_l^{\mathrm{I}}\right)^2 = p^2 + m^2. \tag{30}$$

Можно убедиться непосредственной проверкой, что соотношения (6)–(9), (11), (12) обращаются в тождество, если выполняются (26), (30). Таким образом, остается только потребовать, чтобы выполнялись соотношения (10) и (25), которые и определяют окончательно структуру операторов H_s^{I}, т.е. явный вид коэффициентных функций f_s^{I}, g_s^{I}.

Соотношение (10) для операторов (15) можно привести к виду [36], [37]

$$\big[[H_s^{\mathrm{I}}, x_a]_-, [H_s^{\mathrm{I}}, x_b]_-\big]_- = -4iS_{ab}. \tag{31}$$

Подставив (26), (29) в (31), используя тождество [36, 37]

$$[x_a, \Lambda_l]_- \equiv \frac{1}{2p^2} S_{ab} p_b (\Lambda_{l-1} + \Lambda_{l+1} - 2\Lambda_l) - \frac{i}{2p}\left(S_a - \frac{p_a}{p} S_b\right)(\Lambda_{l-1} - \Lambda_{l+1}) \tag{32}$$

и принимая во внимание соотношения (28), получаем следующие уравнения для f_l^{I}, g_l^{I}:

$$g_l^{\mathrm{I}} g_{l+1}^{\mathrm{I}} + f_l^{\mathrm{I}} f_{l+1}^{\mathrm{I}} = m^2 - p^2. \tag{33}$$

Согласно (30), функции f_l^{I}, g_l^{I} можно представить в виде

$$f_l^{\mathrm{I}} = E \sin\varphi_l, \qquad g_l^{\mathrm{I}} = E\cos\varphi_l, \qquad E = (p^2 + m^2)^{1/2}. \tag{34}$$

Подставив (34) в (33), приходим к рекуррентной формуле

$$\varphi_{l+1} = \varphi_l \pm 2\theta^{\mathrm{I}}, \qquad \theta^{\mathrm{I}} = \operatorname{arctg} p/m. \tag{35}$$

Формулы (34), (35) позволяют определить все коэффициенты g_l^{I}, f_l^{I} оператора (26), если известна хотя бы одна функция из набора f_l^{I} (или g_l^{I}). Эту начальную функцию можно найти из соотношений (29), (35), которые с учетом (34) принимают вид

$$\varphi_l = \begin{cases} \varphi_{-l} & \text{для} \quad r_1^{\mathrm{I}} = \tilde{I}, \\ -\varphi_{-l} & \text{для} \quad r_1^{\mathrm{I}} = \sigma_1. \end{cases} \tag{36}$$

Из (35), (36) получаем

$$\varphi_0 = 0, \qquad \varphi_{1/2} = \theta^{\mathrm{I}}, \quad \text{если} \quad r_1^{\mathrm{I}} = \sigma_1. \tag{37}$$

Если же $r_1^{\mathrm{I}} = I$, то для полуцелых s условия (35) и (36) несовместны, а для s целых φ_0 может быть произвольной функцией от p:

$$\varphi_0 = \varphi(p), \qquad r_1^{\mathrm{I}} = \tilde{I}. \tag{38}$$

Используя тождества

$$W_a^{\mathrm{I}} \equiv [H_s^{\mathrm{I}}, S_a]_+/2, \qquad W_0^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{S},$$

нетрудно убедиться, что соотношение (13) заведомо выполняется, если имеет место (31). Таким образом, приходим окончательно к следующему результату.

Теорема 1. *Все возможные (с точностью до эквивалентности) гамильтонианы H_s^{I}, удовлетворяющие соотношениям (6)–(15), (24), задаются формулами (26), (29), (34), (35), (37), (38). Уравнение (1) с гамильтонианом H_s^{I} инвариантно относительно полной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1,3)$ и описывает свободное движение частицы с произвольным спином s и массой m.*

Приведем простейшие решения системы рекуррентных соотношений (35), (36), (38):

$$(\varphi_l)_1 = (-1)^{N_l}\theta^{\mathrm{I}}, \qquad N_l = \begin{cases} l + \dfrac{1}{2} & \text{для полуцелых } s, \\ l & \text{для целых } s, \end{cases} \tag{39}$$

$$(\varphi_l)_2 = 2l\theta^{\mathrm{I}}. \tag{40}$$

Подставляя (39), (40), (34), (29) в (26), получаем [36, 37, 39]:

$$\left(H_s^{\mathrm{I}}\right)_1 = \sigma_1 m + \sigma_3 p \sum_l (-1)^{N_l}\Lambda_l, \tag{41}$$

$$\left(H_s^{\mathrm{I}}\right)_2 = E\sum_l \left\{\sigma_1 \cos\left(2l\theta^{\mathrm{I}}\right) + \sigma_3 \sin\left(2l\theta^{\mathrm{I}}\right)\right\}\Lambda_l. \tag{42}$$

Выбирая другие решения системы (35), (36), (38), приходим к гамильтонианам, которые унитарно эквивалентны (41), (42), но отличаются от них по форме. Используя (35), (37), нетрудно подсчитать, что число возможных гамильтонианов H_s^{I} равно (при $r_i^{\mathrm{I}} = \sigma_1$) $2^{s-1/2}$ для полуцелых s и 2^{s-1} для целых s.

Выпишем явные выражения операторов H_s^{I} в терминах $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}$ для $s \le 3/2$. Используя (41), (42), (27), получаем [39]

$$\begin{aligned}
&\text{для } s=0 && \left(H_0^{\mathrm{I}}\right)_1 = \sigma_1 m + \sigma_3 p, \qquad \left(H_0^{\mathrm{I}}\right)_2 = \sigma_1 E;\\
&\text{для } s=1/2 && \left(H_{1/2}^{\mathrm{I}}\right)_1 = \left(H_{1/2}^{\mathrm{I}}\right)_2 = \sigma_1 m + 2\sigma_3(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p});\\
&\text{для } s=1 && \left(H_1^{\mathrm{I}}\right)_1 = \left(H_0^{\mathrm{I}}\right)_2 - 2\sigma_3(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2 p^{-1},\\
& && \left(H_1^{\mathrm{I}}\right)_2 = \left(H_0^{\mathrm{I}}\right)_2 + 2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})[\sigma_3 m - \sigma_1(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})]E^{-1};\\
&\text{для } s=3/2 && \left(H_{3/2}^{\mathrm{I}}\right)_1 = H_{1/2}^{\mathrm{I}} + \frac{1}{3}\sigma_3(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})[1 - 4(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2 p^{-2}],\\
& && \left(H_{3/2}^{\mathrm{I}}\right)_2 = H_{1/2}^{\mathrm{I}} + \Bigg\{\sigma_1[E^2 + p^2 + 2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2]m + \\
& && \qquad + \sigma_3\left[\frac{1}{12}p^2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}) - \frac{4}{3}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^3\right]\Bigg\}E^{-2}.
\end{aligned} \tag{43}$$

Из (43) видно, что операторы H_s^{I} можно выразить через H_{s-1}^{I}. Таким образом, вид гамильтониана для произвольного спина полностью определяется гамильтонианами для $s = 0, 1/2$.

Явный вид операторов $\boldsymbol{H_s^{\mathrm{II}}}$

Приведем здесь решение задачи II, т.е. отыщем все операторы H_s^{II}, удовлетворяющие системе соотношений (6)–(13), (25), когда представление алгебры $P(1,3)$ имеет структуру (17). Впервые гамильтонианы H_s^{II} получили Вивер, Хаммер и Гуд [28], а затем, в более общей постановке задачи, Метьюз с сотр. [30–35].

По аналогии с H_s^{I} ищем H_s^{II} в виде

$$H_s^{\mathrm{II}} = \sum_l \left(\sigma_1 g_l^{\mathrm{II}} + \sigma_3 f_l^{\mathrm{II}}\right) \Lambda_l, \tag{44}$$

где неизвестные функции g_l^{II}, f_l^{II}, зависящие от p и m, обладают следующими свойствами:

$$f_l^{\mathrm{II}} = -f_{-l}^{\mathrm{II}}, \qquad g_l^{\mathrm{II}} = g_{-l}^{\mathrm{II}}, \qquad r_2^{\mathrm{II}} = \Delta; \tag{45}$$

$$f_l^{\mathrm{II}} = -f_{-l}^{\mathrm{II}}, \qquad g_l^{\mathrm{II}} = -g_{-l}^{\mathrm{II}}, \qquad r_2^{\mathrm{II}} = \sigma_3\Delta; \tag{46}$$

$$f_l^{\mathrm{II}} + (g_l^{\mathrm{II}})^2 = p^2 + m^2. \tag{47}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что условия (6)–(13), (24) пуанкаре-инвариантности уравнения (1) выполняются, если имеют место соотношения (44)–(47) и (11). Используя общий вид (16) генераторов группы $P(1,3)$, приводим (11) к виду

$$-\left[H_s^{\mathrm{II}}, x_a\right]_- H_s^{\mathrm{II}} + iS_a\left[H_s^{\mathrm{II}}, \sigma_3\right]_- + i\left[H_s^{\mathrm{II}}, S_a\right]_- \sigma_3 = ip_a. \tag{48}$$

Подставляя (44) в (48), используя тождества (32) и

$$[\Lambda_\nu, \boldsymbol{S}]_- \equiv \boldsymbol{p} \times [\Lambda_\nu, \boldsymbol{x}]_- \tag{49}$$

и учитывая линейную независимость слагаемых, приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned} &f_l^{\mathrm{II}} f_{l+1}^{\mathrm{II}} + g_l^{\mathrm{II}} g_{l+1}^{\mathrm{II}} = E^2 + p\left(f_{l+1}^{\mathrm{II}} - f_l^{\mathrm{II}}\right), \\ &g_l^{\mathrm{II}}\left(f_{l+1}^{\mathrm{II}} + p\right) = g_{l+1}^{\mathrm{II}}\left(f_l^{\mathrm{II}} - p\right), \qquad g_l^{\mathrm{II}} \partial g_l^{\mathrm{II}}/\partial p - f_l^{\mathrm{II}} \partial f_l^{\mathrm{II}}/\partial p = 2lp. \end{aligned} \tag{50}$$

Опуская довольно громоздкие выкладки, приведем решения системы (45)–(47) и (50):

$$\left(f_l^{\mathrm{II}}\right)_1 = E \operatorname{th}\left(2l\theta^{\mathrm{II}}\right), \qquad \left(g_l^{\mathrm{II}}\right)_1 = E \operatorname{sech}\left(2l\theta^{\mathrm{II}}\right), \qquad r_2^{\mathrm{II}} = \Delta; \tag{51}$$

$$\begin{aligned} &\left(f_l^{\mathrm{II}}\right)_2 = E \operatorname{cth}\left(2l\theta^{\mathrm{II}}\right), \qquad \left(g_l^{\mathrm{II}}\right)_2 = iE \operatorname{cosech}\left(2l\theta^{\mathrm{II}}\right), \\ &r_2^{\mathrm{II}} = \sigma_3\Delta, \qquad \theta^{\mathrm{II}} = \operatorname{Arth} p/E. \end{aligned} \tag{52}$$

Отметим, что решения (51) определены для произвольных s, а (52) — только для полуцелых значений спина, поскольку при целых s уравнения (46), (47), (50) становятся несовместными.

Подставляя (51), (52) в (44), получаем явный вид гамильтонианов H_s^{II} для представления (16):

$$\left(H_s^{\mathrm{II}}\right)_1 = E\sum_l \left\{\sigma_1 \operatorname{sech}\left(2l\theta^{\mathrm{II}}\right) + \sigma_3 \operatorname{th}\left(2l\theta^{\mathrm{II}}\right)\right\}\Lambda_l, \tag{53}$$

$$\left(H_s^{\mathrm{II}}\right)_2 = E\sum_l \left\{i\sigma_1 \operatorname{cosech}\left(2l\theta^{\mathrm{II}}\right) + \sigma_3 \operatorname{cth}\left(2l\theta^{\mathrm{II}}\right)\right\}\Lambda_l, \tag{54}$$

где гамильтониан (53) соответствует выбору $r_2^{\mathrm{II}} = \Delta$ и определен для произвольных значений спина s, а оператор (54) соответствует $r_2^{\mathrm{II}} = \sigma_3\Delta$ и определен только для полуцелых s. Последнее обстоятельство осталось незамеченным в работах [31, 33], где (54) интерпретируется как гамильтониан для частиц с целым спином.

Выразим гамильтонианы H_s^{II} для $s \le 3/2$ через операторы $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}$. Согласно (27), (53), (54) имеем

$$\begin{aligned}
\text{для } s=0 \quad & H_0^{\mathrm{II}} = \sigma_1 E;\\
s=1/2 \quad & \left(H_{1/2}^{\mathrm{II}}\right)_1 = \sigma_1 m + 2\sigma_3(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}),\\
& \left(H_{1/2}^{\mathrm{II}}\right)_2 = -2E(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})(i\sigma_1 m + \sigma_3 E)p^{-2};\\
s=1 \quad & H_1^{\mathrm{II}} = \sigma_1 E + 2E(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})[\sigma_1(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}) - \sigma_3 E]\left(E^2+p^2\right)^{-1};\\
s=3/2 \quad & \left(H_{3/2}^{\mathrm{II}}\right)_1 = \left\{\sigma_1\left[\frac{1}{4}\left(4E^2+7p^2\right) - 2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2\right]m + \right.\\
& \left. +\sigma_3\left[(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})\frac{1}{3}\left(20p^2+6E^2\right) + \frac{8}{3}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^3\right]\right\}\left(E^2+3p^2\right)^{-1},\\
& \left(H_{3/2}^{\mathrm{II}}\right)_2 = \left\{\sigma_1\frac{mE}{p}\left[\frac{1}{8}\left(35E^2-13m^2\right) - 4\frac{E^2}{p^2}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2\right] + \right.\\
& \left. +i\sigma_3\frac{E^2}{m}\left[\frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})}{3p}\left(20E^2+6p^2\right) + 8\frac{E^2}{p^3}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^3\right]\right\}\left(p^2+3E^2\right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{55}$$

Замечание 1. Решение задачи II, приведенное в работах [32–35] получено при несколько более слабых условиях, налагаемых на вид гамильтонианов H_s^{II}. В работе [33] показано, что гамильтонианы (35), (36) можно получить, не требуя P-, C-инвариантности уравнения (1), а в работе [34] гамильтонианы (53), (54) получены в предположении, что уравнение движения (1) инвариантно относительно преобразований из группы $P(1,3)$ и преобразования $\Theta = CPT$. Мы не приводим здесь деталей этих исследований.

Замечание 2. Решение задач I и II найдено в работах [38, 39] в более общей постановке, когда матрицы S_{ab}, входящие в определение (14) генераторов группы $P(1,3)$, являются элементами представления $D(j,\tau)$ алгебры $O(4)$. В такой постановке получены уравнения для частиц с переменными спином и массой, причем возможные значения спина s лежат в интервале

$$|j-\tau| \le s \le j+\tau, \tag{56}$$

где j и τ — произвольные целые или полуцелые числа, задающие неприводимое представление группы $O(4)$.(4). При этом масса частицы или фиксирована, или задается одной из формул

$$m = a_1 + b_1 s(s+1) \qquad \text{или} \qquad m^2 = a_2^2 + b_2^2 s(s+1), \tag{57}$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — произвольные постоянные числа. Более подробное рассмотрение уравнений для частиц с переменными спином и массой выходит за рамки настоящего обзора.

Явный вид операторов H_s^{III}

Решим задачу III, т.е. найдем все возможные (с точностью до преобразований эквивалентности) дифференциальные операторы H_s^{III}, содержащие производные по пространственным переменным не выше второго порядка и удовлетворяющие совместно с (25) коммутационным соотношениям (6)–(13) алгебры Пуанкаре.

Искомый гамильтониан H_s^{III} представим в виде разложения по спиновым матрицам и $2(2s+1)$-рядным матрицам Паули:

$$H_s^{\mathrm{III}} = h_0^{(s)} m + h_1^{(s)} + h_s^{(s)}/m, \tag{58}$$

где

$$h_0^{(s)} = a_\mu^{(s)} \sigma^\mu, \quad h_1^{(s)} = b_\mu^{(s)} \sigma^\mu (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}), \quad h_2^{(s)} = c_\mu^{(s)} \sigma^\mu (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2 + d_\mu^{(s)} \sigma^\mu p^2, \tag{59}$$

σ_μ — $2(2s+1)$-рядные матрицы Паули, коммутирующие с S_{ab} (16); $a_\mu^{(s)}$, $b_\mu^{(s)}$, $c_\mu^{(s)}$, $d_\mu^{(s)}$ — неизвестные коэффициенты. По повторяющемуся индексу μ подразумевается суммирование от 0 до 3.

Теорема 2. *Все возможные (с точностью до эквивалентности) дифференциальные операторы второго порядка H_s^{III}, удовлетворяющие (6)–(13), (25) задаются формулами:*

$$H_s^{\mathrm{III}} = \sigma_1 m + \sigma_3 k_1 (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}) + \frac{1}{2m}(\sigma_1 - i\sigma_2)[p^2 - k_1^2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2], \quad s = 0, 1/2, \ldots; \tag{60}$$

$$H_1^{\mathrm{III}} = \sigma_1 m + \left[i\sigma_2 k_2 + \sigma_3\sqrt{k_2(k_2-1)}\right]\frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2}{m} + (\sigma_1 - i\sigma_2)\frac{p^2}{2m}; \tag{61}$$

$$H_1^{\mathrm{III}} = \sigma_1 m + \sigma_3 k_3 (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}) + \frac{p^2}{2m}(\sigma_1 - i\sigma_2) + \frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2}{2m}[-k_3^2\sigma_1 + i(2-k_3^2)\sigma_2]; \tag{62}$$

$$H_{3/2}^{\mathrm{III}} = \sigma_1\left(m + \frac{p^2}{2m}\right) + \frac{ik_4}{2m}\sigma_2\left[(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2 - \frac{5}{4}p^2\right] + \frac{\sigma_3}{2m}\sqrt{k_4^2 - 1}\,p^2; \tag{63}$$

$$\begin{aligned} H_{3/2}^{\mathrm{III}} = \sigma_1&\left[m + \frac{p^2}{2m} - k_5^2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2\right] + \sigma_3 k_5 (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}) - \\ &- \frac{i}{2m}\sigma_2\left[\left(\frac{5}{4}k_5^2 - 1\right)(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2 - \left(\frac{9}{4}k_5^2 - \frac{5}{4}\right)p^2\right], \end{aligned} \tag{64}$$

где k_l — произвольные параметры, $l = 1, 2, 3, 4, 5$.

Доказательство. Используя явный вид (25), (16) генераторов группы $P(1,3)$ нетрудно убедиться, что гамильтониан (58) удовлетворяет соотношениям (6) при произвольных значениях коэффициентов $a_\mu^{(s)}$, $b_\mu^{(s)}$, $c_\mu^{(s)}$, $d_\mu^{(s)}$.

Потребуем, чтобы гамильтониан (58) удовлетворял условию (12), которое запишем в следующем виде:

$$\left(H_s^{\rm III}\right)^2 = p^2 + m^2. \tag{65}$$

Подставляя (58) в (65) и приравнивая коэффициенты при линейно-независимых слагаемых, приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&\left(h_0^{(s)}\right)^2 = 1, \qquad \left[h_1^{(s)}, h_2^{(s)}\right]_+ = 0, \qquad \left(h_2^{(s)}\right)^2 = 0,\\
&\left[h_0^{(s)}, h_1^{(s)}\right]_+ = 0, \qquad \left(h_1^{(s)}\right)^2 + \left[h_0^{(s)}, h_2^{(s)}\right]_+ = p^2.
\end{aligned} \tag{66}$$

Ввиду линейной независимости спиновых матриц S_a и матриц Паули σ_μ система соотношений (59), (66) эквивалентна системе уравнений для коэффициентов $a_\mu^{(s)}$, $b_\mu^{(s)}$, $c_\mu^{(s)}$, $d_\mu^{(s)}$. Решение системы (59) и (66) для произвольных значений s задается следующей формулой [40, 41]:

$$h_0^{(s)} = \sigma_1, \qquad h_1^{(s)} = \sigma_3 k_1(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}), \qquad h_2^{(s)} = (\sigma_1 - i\sigma_2)\left[p^2 - k_1^2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2\right]/2, \tag{67}$$

где k_1 — произвольное комплексное число. Для $s=1$ и $s=3/2$ помимо (61) существует еще по два независимых решения:

$$\begin{aligned}
&h_0^{(1)} = \sigma_1, \qquad h_1^{(1)} = 0,\\
&h_2^{(1)} = (\sigma_1 - i\sigma_2)p^2/2 + \left[k_2 i\sigma_2 + \sigma_3\sqrt{k_2(k_2-1)}\right](\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2;\\
&h_0^{(1)} = \sigma_1, \qquad h_1^{(1)} = \sigma_3 k_3(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}),\\
&h_2^{(1)} = \sigma_1[p^2 - k_3^2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2]/2 + i\sigma_2[(2-k_3^2)(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2 - p^2]/2;\\
&h_0^{(3/2)} = \sigma_1, \qquad h_1^{(3/2)} = 0,\\
&h_2^{(3/2)} = \left\{\sigma_1 p^2 + i\sigma_2 k_4[(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2 - 5p^2/4] + \sigma_3\sqrt{k_4^2-1}\,p^2\right\}/2;\\
&h_0^{(3/2)} = \sigma_1, \qquad h_1^{(3/2)} = \sigma_3 k_5(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}),\\
&h_2^{(3/2)} = \frac{i}{2}\sigma_2\left[\left(\frac{5}{4}k_5^2 - 1\right)(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2 - \left(\frac{9}{4}k_5^2 - \frac{5}{4}\right)p^2\right] + \sigma_1\left[p^2 - k_5^2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2\right]/2,
\end{aligned} \tag{68}$$

где k_2, k_3, k_4, k_5 — произвольные комплексные числа.

Формулы (67), (68) задают все возможные решения системы (59), (66) с точностью до преобразований эквивалентности, осуществляемых числовыми матрицами. Подставив (67), (68) в (58), приходим к гамильтонианам (60)–(64).

Для завершения доказательства теоремы осталось только указать явный вид операторов λ_a, входящих в определение (25) генераторов J_{0a}, при котором операторы (25), (60)–(64) удовлетворяют соотношениям (8)–(11) и (13). Можно убедиться непосредственной проверкой, что эти соотношения выполняются, если положить в (25)

$$\lambda_a = \left(1 - \frac{k_1}{2}\right)\left[i\sigma_1 S_a - \frac{(\sigma_1 - i\sigma_2)}{2m}\varepsilon_{abc}p_b S_c\right] \tag{69}$$

в случае, когда гамильтониан $H_s^{\rm III}$ имеет вид (60), и

$$\lambda_a = -\frac{[S_{ab}p_b, H_s^{\rm III}]_+}{2E(E+m)} + i\frac{p_a(2E+B_s)}{2E^2 B_s} - i\frac{[\dot{x}_a\sigma_1, H_s^{\rm III}]}{2EB_s} - i\frac{[\dot{S}_{ab}p_b\sigma_1, H_s^{\rm III}]_+}{2(E+m)B_s},$$
$$B_s = 2E + [H_s^{\rm III}, \sigma_1]_+, \qquad \dot{A} = i[H_s^{\rm III}, A]_-$$

в случае, когда гамильтониан $H_s^{\rm III}$ задается одной из формул (61)–(64). Теорема доказана.

Из (60)–(64) видно, что гамильтонианы $H_s^{\rm III}$ определены с точностью до постоянных комплексных чисел k_l. Можно показать, что уравнение (1), где H_s — оператор, задаваемый одной из формул (60)–(64), инвариантно относительно преобразования "сильного отражения" $\Theta = CPT$, но не инвариантно относительно P-, C- и T-преобразований. Инвариантность уравнения (1) относительно любого из этих преобразований можно обеспечить специальным выбором чисел k_l. Так, если в (60) положить $s=0$ и $s=1/2$, $k_1 = 1/s$, а в (61)–(64) положить $k_2 = 1$, $k_3 = 0$, $k_4 = 1$, $k_5 = 0$, то получим C-, P-, T-инвариантные гамильтонианы вида

$$H_0^{\rm III} = \sigma_1\left(m + p^2/2m\right) - i\sigma_2 p^2/2m; \tag{70}$$

$$H_{1/2}^{\rm III} = \sigma_1 m + 2\sigma_3 \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}; \tag{71}$$

$$H_1^{\rm III} = \sigma_1\left(m + p^2/2m\right) + \sigma_2 i/2m\left[2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2 - p^2\right]; \tag{72}$$

$$H_{3/2}^{\rm III} = \sigma_1\left(m + p^2/2m\right) + \sigma_2 i/2m\left[(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2 - 5/4p^2\right]. \tag{73}$$

Оператор (71) совпадает с гамильтонианом Дирака, а операторы (70), (72) — с гамильтонианами ТСТ [49, 50] для частиц со спином $s = 0, 1$. Оператор (60) для $s = 1/2$ рассматривался ранее в [44]. Преобразования P, C и T на множестве решений уравнения (1) с гамильтонианами (70), (72), (73) можно определить формулами (14), где

$$r_1^{\rm III} = I, \qquad r_2^{\rm III} = \sigma_1, \qquad r_3^{\rm II} = \sigma_2.$$

Нетрудно убедиться, что гамильтонианы (60)–(64) в общем случае неэрмитовы относительно скалярного произведения (5). Однако всегда можно подобрать такие значения коэффициентов k_1, чтобы операторы $H_s^{\rm III}$ были эрмитовы в индефинитной метрике

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x\ \Psi_1^+ \sigma_1 \Psi_2, \tag{74}$$

а именно, операторы (60)–(64) эрмитовы относительно (74), если k_l удовлетворяют следующим условиям:

$$k_1^* = -k_1, \qquad k_3^* = -k_3, \qquad k_5^* = -k_5, \qquad k_2^* = k_2, \qquad |k_2| < 1,$$
$$k_2 > 0, \qquad k_4^* = k_4, \qquad |k_4| < 1, \qquad k_4 > 0.$$

Гамильтонианы H_s^{III} при произвольных значениях коэффициентов k_l эрмитовы также относительно скалярного произведения (4), где

$$M_s = \left[\left(U_s^{\mathrm{III}}\right)^{-1}\right]^{\dagger}\left(U_s^{\mathrm{III}}\right)^{-1},$$

а U_s^{III} — оператор, связывающий представление (25) с каноническим представлением Широкова–Фолди [18, 20]. Явный вид операторов U_s^{III} приведен ниже [см. (133), (134)].

Отметим еще, что не только гамильтониан (60), но и все остальные генераторы (25), (69) принадлежат классу дифференциальных операторов. При $k_1 = 2$ операторы λ_a (69) тождественно равны нулю и генераторы J_{0a} (25) принимают вид

$$J_{0a}^{\mathrm{III}} = tp_a - [x_a, H_s^{\mathrm{III}}]_+/2, \tag{75}$$

совпадающий с (15).

Таким образом, здесь получены все возможные (с точностью до эквивалентности) релятивистские гамильтонианы H_s^{III} частицы с произвольным спином s, включающие производные не выше второго порядка. Оказалось, что такие гамильтонианы существуют для любых значений s и задаются формулами (60)–(64). Возникает естественный вопрос: существуют ли пуанкаре-инвариантные гамильтонианы для частиц с произвольным спином в классе дифференциальных операторов первого порядка? Задача описания таких гамильтонианов решается ниже.

Дифференциальные гамильтоновы уравнения первого порядка

По аналогии с теорией Дирака для электрона постулируем, что гамильтониан релятивистской частицы с произвольным спином является дифференциальным оператором, включающим производные по пространственным переменным не выше первого порядка. Общий вид такого оператора задается формулой

$$H_s = \hat{\Gamma}_a^{(s)} p_a + \hat{\Gamma}_0^{(s)} m, \qquad p_a = -i\partial/\partial x_a, \tag{76}$$

где $\hat{\Gamma}_\mu^{(s)}$ — некоторые числовые матрицы.

Генераторы представления группы Пуанкаре, которое реализуется на решениях уравнения (1) с гамильтонианом (76), выберем в виде:

$$\begin{aligned} &P_0 = H_s, \qquad P_a = p_a = -i\partial/\partial x_a, \\ &J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \qquad J_{0a} = x_0 p_a - x_a p_0 + S_{0a}, \end{aligned} \tag{77}$$

где $S_{\mu\nu}$ — матрицы, образующие конечномерное представление (в общем случае приводимое) алгебры Лоренца $O(1,3)$. Формулы (77) задают самый общий вид генераторов группы $P(1,3)$, соответствующий локальным преобразованиям волновой функции при переходе к новой инерциальной системе отсчета:

$$\begin{aligned} &\Psi(x) \to \Psi'(x') = \mathcal{D}(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x - b), \\ &x' = \Lambda x + b, \qquad x = (x_0, x_1, x_2, x_3), \end{aligned}$$

где Λ — матрица, задающая преобразование Лоренца; $\mathcal{D}(\Lambda)$ — произвольное конечномерное представление этого преобразования.

Определить все возможные гамильтонианы вида (76) означает найти такие матрицы $\hat{\Lambda}^s_\mu$ и $S_{\mu\nu}$, что операторы (76), (77) будут удовлетворять алгебре Пуанкаре (6)–(13).

Потребуем, чтобы гамильтониан (76) удовлетворял соотношению (12):

$$H_s^2 = p^2 + m^2. \tag{78}$$

Подставляя (76) в (78) и приравнивая линейно-независимые слагаемые заключаем, что матрицы $\hat{\Gamma}^{(s)}_\mu$ должны удовлетворять алгебре Клиффорда

$$\hat{\Gamma}^{(s)}_\mu \hat{\Gamma}^{(s)}_\nu + \hat{\Gamma}^{(s)}_\nu \hat{\Gamma}^{(s)}_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3. \tag{79}$$

Представления алгебры (79) хорошо известны и задаются матрицами размерности $2^n \times 2^n$, $n = 2,3,\ldots$. При этом матрицы

$$\tau_{ab} = i\hat{\Gamma}^{(s)}_a \hat{\Gamma}^{(s)}_b/2, \qquad \tau_{0a} = i\hat{\Gamma}^{(s)}_a/2 \tag{80}$$

реализуют 2^{n-2}-кратно вырожденное представление $\mathcal{D}(1/2,0)\oplus\mathcal{D}(0,1/2)$ алгебры $O(1,3)$.

Определим теперь матрицы $S_{\mu\nu}$ из (77). Представляем их в виде

$$S_{\mu\nu} = \tau_{\mu\nu} + j_{\mu\nu}, \tag{81}$$

где $j_{\mu\nu}$ — неизвестные матрицы, подлежащие определению. Подставив (76), (77), (81), (80) в (6)–(13), получаем, что матрицы $j_{\mu\nu}$ должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$[j_{\mu\nu}, j_{\lambda\rho}]_- = i(g_{\mu\rho}j_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}j_{\mu\rho} - g_{\mu\lambda}j_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}j_{\mu\lambda}), \tag{82}$$

$$[j_{\mu\nu}, \hat{\Gamma}^{(s)}_\lambda]_- = [j_{\mu\nu}, \tau_{\rho\lambda}]_- = 0, \qquad g_{\mu\nu} = \begin{cases} 0, & \mu\neq\nu, \\ 1, & \mu=\nu=0, \\ -1, & \mu=\nu\neq 0, \end{cases} \tag{83}$$

т.е. матрицы $j_{\mu\nu}$ должны реализовать конечномерное представление алгебры $O(1,3)$ и коммутировать с $\hat{\Gamma}^{(s)}_\mu$.

Рассмотрим случай, когда $j_{\mu\nu}$ образуют неприводимое представление $\mathcal{D}(j,0)$ алгебры $O(1,3)$. Это означает, что

$$\begin{aligned} &j_{ab} = ij_c, \qquad j_{0a} = ij_a, \qquad (abc) \text{ — цикл } (1,2,3), \\ &[j_a, j_b]_- = ij_c, \qquad j_a^2 = j(j+1). \end{aligned} \tag{84}$$

Тогда из (81), (83) по теореме Клебша–Гордона заключаем, что матрицы $S_{\mu\nu}$ должны реализовать представление

$$[\mathcal{D}(1/2,0)\oplus\mathcal{D}(0,1/2)]\otimes\mathcal{D}(j,0) = \mathcal{D}(j+1/2,0)\oplus\mathcal{D}(j-1/2,0)\oplus\mathcal{D}(j,1/2). \tag{85}$$

При редукции (85) по представлениям подгруппы $O(3)\subset O(1,3)$ получаем представление

$$\mathcal{D}(j+1/2)\oplus\mathcal{D}(j+1/2)\oplus\mathcal{D}(j-1/2)\oplus\mathcal{D}(j-1/2), \tag{86}$$

что соответствует двум возможным значениям спина

$$s_1 = s = j+1/2 \qquad \text{и} \qquad s_2 = s-1 = j-1/2. \tag{87}$$

Нетрудно подсчитать, что размерность матриц $S_{\mu\nu}$, входящих в представление (85), равна $8s \times 8s$; такова же должна быть размерность матриц $\hat{\Gamma}_\mu^{(s)}$ из (80), (81). При этом волновая функция $\Psi(t, \boldsymbol{x})$ удовлетворяющая уравнению (1) с гамильтонианом (75), имеет $8s$ компонент. Можно показать, что если матрицы $j_{\mu\nu}$ из (81) образуют неприводимое представление $\mathcal{D}(j_1, j_2)$ алгебры $O(1,3)$, где $j_1 \neq 0$ и $j_2 \neq 0$, или приводимое представление этой алгебры, то при заданном фиксированном s размерность матриц $S_{\mu\nu}$ всегда будет больше, чем $8s \times 8s$.

Таким образом, гамильтониан (76) и генераторы (77) удовлетворяют условиям пуанкаре-инвариантности (6)–(14), а волновая функция $\Psi(t, \boldsymbol{x})$ имеет минимальное число компонент тогда и только тогда, когда матрицы $\hat{\Gamma}_\mu^{(s)}$ в (76) реализуют $8s$-рядное представление алгебры Клиффорда (79), а матрицы $S_{\mu\nu}$ в (77) имеют вид (80)–(84), где $j = s - 1/2$.

Уравнение (1) с гамильтонианом (76) описывает частицу, спин которой может принимать два значения (87). Для того чтобы получить описание частицы с фиксированным спином s, на волновую функцию $\Psi(t, \boldsymbol{x})$ следует наложить пуанкаре-инвариантное дополнительное условие, исключающее лишние компоненты, которые соответствуют значению спина $s_2 = s - 1$. Такое дополнительное условие всегда можно выбрать в виде (13):

$$W_\mu W^\mu \Psi(t, \boldsymbol{x}) = m^2 s(s+1)\Psi(t, \boldsymbol{x}). \tag{88}$$

Эквивалентной формой записи условия (88) служит формула

$$\hat{P}_s \Psi = \Psi, \tag{89}$$

где $\hat{P}_s$ — оператор проектирования на подпространство, соответствующее фиксированному спину:

$$\hat{P}_s = \frac{1}{2s}\left[\frac{1}{m^2} W_\mu W^\mu - s(s-1)\right]. \tag{90}$$

Используя явный вид генераторов P_μ, $J_{\mu\nu}$ (77), получаем проектор $\hat{P}_s$ в форме

$$\hat{P}_s = P_s + \left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right)\left[\Gamma_\mu^{(s)} p^\mu, P_s\right]_- /2m, \tag{91}$$

где введены обозначения

$$\begin{gathered} \Gamma_a^{(s)} = \hat{\Gamma}_0^{(s)} \hat{\Gamma}_a^{(s)}, \qquad \Gamma_0^{(s)} = \hat{\Gamma}_0^{(s)}, \qquad \Gamma_4^{(s)} = i\Gamma_0^{(s)}\Gamma_1^{(s)}\Gamma_2^{(s)}\Gamma_3^{(s)}, \\ P_s = \frac{1}{4s}\left[S_{ab}^2 - 2s(s-1)\right], \qquad S_{ab}^2 = \sum_{a,b=1}^{3} S_{ab} S_{ab}. \end{gathered} \tag{92}$$

Таким образом, получены уравнения движения свободной релятивистской частицы с произвольным спином в виде:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H_s \Psi, \qquad H_s = \Gamma_0^{(s)}\Gamma_a^{(s)} p_a + \Gamma_0^{(s)} m, \tag{93}$$

$$\hat{P}_s \Psi = \Psi. \tag{94}$$

Отметим, что выражения (93), (94) можно записать в явно ковариантной форме [39]:

$$\left(\Gamma_\mu^{(s)}p^\mu - m\right)\Psi = 0, \tag{95}$$

$$\left(\Gamma_\mu^{(s)}p^\mu + m\right)\left(1+\Gamma_4^{(s)}\right)\left[S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - 4s(s-1)\right]\Psi = 16ms\Psi. \tag{96}$$

Уравнение (95) получается из (93) простым умножением на $\Gamma_0^{(s)}$, а уравнение (96) сводится к (94), если принять во внимание тождество

$$\left(1+\Gamma_4^{(s)}\right)P_s \equiv \left(1+\Gamma_4^{(s)}\right)\left[S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - 4s(s-1)\right]/8s. \tag{97}$$

Полученные результаты можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3. *Системы уравнений (93), (94) и (95), (96) пуанкаре-инвариантны и описывают свободное движение частицы с фиксированным спином s и массой m.*

Система уравнений (95), (96) имеет ряд преимуществ перед другими известными уравнениями для частиц с произвольным спином [3–17]. Действительно, уравнения (95), (96) имеют достаточно простую форму, которая не усложняется с ростом спина (алгебра Г-матриц, безусловно, проще алгебры матриц, входящих в другие известные в литературе уравнения для высших спинов); предельный переход $m \to 0$ позволяет получить из (95), (96) уравнения для безмассовых частиц (см. разд. 2), в то время как уравнения Кеммера–Деффина и Баба не допускают такого перехода [60]; наконец, как будет показано ниже, уравнения (95), (96) допускают непротиворечивое обобщение для частиц, взаимодействующих с внешним электромагнитным полем.

Отметим, что в работах [61, 62] также предлагались $8s$–компонентные дифференциальные уравнения первого порядка, описывающие движение свободной частицы с произвольным спином s и массой m. Однако системы уравнений, полученные в работах [61, 62], несовместны при учете взаимодействия частицы с внешним полем.

Конечные преобразования операторов координаты и спина

Задание явного вида генераторов $Q_l \ni \{P_\mu, J_{\mu\nu}\}$ $(l = 1, 2, \ldots, 10)$ группы Пуанкаре однозначно определяет закон преобразования волновой функции при переходе к новой инерциальной системе координат:

$$\Psi(t, \boldsymbol{x}) \to \Psi'(t, \boldsymbol{x}) = \exp(iQ_l\theta_l)\Psi(t, \boldsymbol{x}), \tag{98}$$

где θ_l — параметры преобразования. При этом операторы физических величин (координаты, спина, импульса и т.п.) преобразуются следующим образом:

$$\hat{N} \to \hat{N}' = \exp(iQ_l\theta_l)\tilde{N}\exp(-iQ_l\theta_l). \tag{99}$$

Формула (99) в принципе дает исчерпывающий ответ о связи операторов динамических переменных в старой и новой системах координат и в случае, когда генераторы P_μ, $J_{\mu\nu}$ имеют локально-ковариантную форму (77), конкретные вычисления с использованием (99) не вызывают никаких затруднений. Однако в представлениях типа (15), (25), когда генераторы J_{0a} не имеют вида суммы коммутирующих “спиновой” и “орбитальной” частей, вычисление явного вида преобразованных операторов $\hat{N}'$ является нетривиальной задачей [76].

В этом разделе получен закон преобразования операторов координаты и спина частицы, генерируемых операторами J_{0a} вида (74). Тем самым, в принципе, решена задача для произвольного представления вида (25), (69), поскольку генераторы (94) и (25) связаны преобразованием эквивалентности $J_{0a}^{\rm III} \to VJ_{0a}^{\rm III}V^{-1}$, где

$$\begin{aligned} &V = 1 + (\sigma_1 - i\sigma_2)(2-k_1)\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{2m},\\ &V^{-1} = 1 - (\sigma_1 - i\sigma_2)(2-k_1)\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{2m}. \end{aligned} \tag{100}$$

Найдем сначала в явном виде закон конечных преобразований (99) для оператора x_a. Для этого воспользуемся тождеством Хаусдорфа–Камбела:

$$\begin{aligned} &\exp(A)B\exp(-A) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{A,B\}^n}{n!},\\ &\{A,B\}^n = [A,\{A,B\}^{n-1}]_-, \qquad \{A,B\}^0 = B. \end{aligned} \tag{101}$$

Принимая во внимание тот факт, что генераторы J_{0a} (75) на множестве решений уравнений (1), (60) можно представить в форме

$$J_{0a} = x_0p_a - x_ap_0 + \eta_a. \tag{102}$$

где

$$\begin{aligned} &\eta_a = -\frac{1}{2}[H_s^{\rm III}, x_a]_-/2 = i\sigma_3 S_a + \frac{1}{2m}(\sigma_1 - i\sigma_2)\{iP_a - 2i[S_a, \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}]_+\},\\ &p_0 = i\partial/\partial x_0 = i\partial/\partial t, \end{aligned} \tag{103}$$

и полагая $B = x_a$, $A = iJ_{0b}v_b$, где J_{0b} — генераторы (102), а v_b — параметры преобразования Лоренца, получаем по индукции

$$\begin{aligned} &\{A,B\}^n = v_ax_bv_bv^{n-2} - (i\sigma_1 + \sigma_2)(-v_aS_bv_bv^{n-2} + \mathcal{D}_n)/m,\\ &n = 2k, \qquad k = 0,1,\ldots, \qquad v = \left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{104}$$

$$\{A,B\}^n = x_0v_av^{n-1} + \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{2m}\left(v_av^{n-1} - 2\mathcal{D}_n\right), \qquad n = 2k+1, \tag{105}$$

где

$$\mathcal{D}_n = [S_bv_b, \mathcal{D}_{n-1}]_+, \qquad \mathcal{D}_1 = [S_bv_b, S_a]_+. \tag{106}$$

Подставляя (104)–(106) в (101) и используя тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathcal{D}_n \equiv \left[S_a\operatorname{ch}v + i\frac{\varepsilon_{abc}S_bv_c}{v}\operatorname{sh}v - \frac{v_aS_bv_b}{v^2}(\operatorname{ch}v - 1)\right]\exp(2S_bv_b) - S_a, \tag{107}$$

получаем закон преобразования x_a в виде

$$\begin{aligned} x_a' = {} & x_a + \frac{v_ax_bv_b}{v^2}(\operatorname{ch}v - 1) + x_0\frac{v_a}{v}\operatorname{sh}v + \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{m}\left\{\frac{v_aS_bv_b}{v^2}(\operatorname{ch}v - 1) + \right.\\ & \left. + \frac{v_a}{2v}\operatorname{sh}v + S_a - \left[S_a\operatorname{ch}v + i\frac{\varepsilon_{abc}S_bv_c}{v}\operatorname{sh}v - \frac{v_aS_bv_b}{v^2}(\operatorname{ch}v - 1)\right]\exp(2S_bv_b)\right\}. \end{aligned} \tag{108}$$

Для x_0 находим аналогичным способом

$$x_0' = x_0 \operatorname{ch} v + \frac{x_b v_b}{v} \operatorname{ch} v - \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{2m} \left[\exp(2S_b v_b) - \operatorname{ch} v - \frac{2S_b v_b}{v} \operatorname{sh} v \right]. \qquad (109)$$

Из (108), (109) видно, что x_μ преобразуются по закону, отличному от преобразований Лоренца для 4-вектора; при этом интервал $x_\mu x^\mu = x_0^2 - x_a^2$ не сохраняется. Следовательно, x_μ нельзя выбрать в качестве оператора координаты частицы.

Чтобы определить ковариантный оператор координаты, перейдем к представлению, в котором генераторы J_{0a} (102) имеют локально-ковариантную форму:

$$\hat{J}_{0a} = x_0 p_a - x_a p_0 + S_{0a}, \qquad S_{0a} = i\sigma_3 S_a, \qquad (110)$$

что достигается посредством преобразования

$$J_{0a} \to \hat{J}_{0a} = V J_{0a} V^{-1}, \qquad (111)$$

где

$$V = 1 + \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{2m}(2\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{p} - p_0), \qquad V^{-1} = 1 - \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{2m}(2\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{p} - p_0). \qquad (112)$$

В представлении (110) ковариантный оператор координаты можно выбрать в виде

$$\hat{X}_\mu = x_\mu. \qquad (113)$$

Используя (112), получаем явный вид этих операторов в исходном представлении (102):

$$X_\mu = V^{-1} \hat{X}_\mu V = x_\mu + \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{m} \xi_\mu, \qquad \xi_a = S_a, \qquad \xi_0 = 1. \qquad (114)$$

При переходе к новой инерциальной системе координат оператор X_μ преобразуется как 4-вектор:

$$\begin{aligned} X_a' &= X_a + \frac{v_a (v_b X_b)}{v^2} (\operatorname{ch} v - 1) + \frac{v_a}{v} X_0 \operatorname{sh} v, \\ X_0' &= X_0 \operatorname{ch} v + \frac{(X_b v_b)}{v} \operatorname{sh} v. \end{aligned} \qquad (115)$$

При этом, очевидно, выполняется

$$X_0^2 - X_a^2 = (X_0')^2 - (X_a')^2. \qquad (116)$$

Операторы X_μ удовлетворяют каноническим перестановочным соотношениям

$$[p_\mu, X_\nu]_- = i g_{\mu\nu}, \qquad [X_\mu, X_\nu]_- = 0. \qquad (117)$$

При этом, однако

$$\ddot{X}_a = -[H_s^{\mathrm{III}}, [H_s^{\mathrm{III}}, X_a]_-]_- \neq 0.$$

В случае $s = 1/2$ операторы (114) принимают явно ковариантную форму

$$X_\mu = x_\mu + \frac{i}{2m}(1 + \gamma_4)\gamma_\mu, \qquad (118)$$

где

$$\gamma_4 = \sigma_3, \qquad \gamma_a = -2i\sigma_2 S_a, \qquad \gamma_0 = \sigma_1 \tag{119}$$

— матрицы Дирака.

В силу изложенного выше оператор (118) можно выбрать в качестве ковариантного оператора координаты дираковской частицы. Интересно отметить, что при таком определении оператор скорости

$$\dot{X}_a = -i[H_{1/2}, X_a]_- = (1+\gamma_4)\gamma_0 p_a/m \tag{120}$$

(где

$$H_{1/2} = \gamma_0\gamma_a p_a + \gamma_0 m \tag{121}$$

— гамильтониан Дирака) имеет сплошной спектр.

Подчеркнем, что полученный оператор (118) принципиально отличается от операторов координаты, предложенных Ньютоном и Вигнером [63] и Фолди и Воутуйзеном [64]. Это отличие заключается в том, что оператор (118) локален и преобразуется как ковариантный 4-вектор, в то время как операторы координаты, предложенные в работах [63, 64], принадлежат классу нелокальных интегро-дифференциальных операторов с нековариантным законом преобразования при переходе к новой инерциальной системе отсчета.

Приведем без доказательства закон преобразования операторов S_{ab} и явный вид ковариантного оператора спина $\Sigma_{\mu\nu}$ частицы, описываемой уравнениями (1), (60) [40, 41]:

$$S'_{ab} = J_{ab}\operatorname{ch} v + \frac{v_c J_d v_d}{v^2}(\operatorname{ch} v - 1) + \frac{J_{0a}v_b - J_{0b}v_a}{v}\operatorname{sh} v - x'_a p'_b + x'_b p'_a, \tag{122}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{ab} &= S_{ab} + \frac{i\sigma_1+\sigma_2}{m}S_{cd}p_d, \\ \Sigma_{0a} &= i\sigma_3 S_{bc} - \frac{i\sigma_1+\sigma_2}{m}[(2S_d p_d - p_0), S_{bc}]_+, \end{aligned} \tag{123}$$

где

$$p'_a = p_a + \frac{v_a x_b v_b}{v^2}(\operatorname{ch} v - 1) + \frac{v_a}{v}p_0\operatorname{sh} v, \qquad J_d = \frac{1}{2}\varepsilon_{abd}J_{ab}, \qquad S_d = \frac{1}{2}\varepsilon_{abd}S_{ab},$$

где x'_a, J_{ab}, J_{0a}, S_{ab} — операторы, определенные в (108), (25), (26), (102). По аналогии с (110)–(115) можно показать, что оператор $\Sigma_{\mu\nu}$ (123) преобразуется, как ковариантный тензор второго ранга.

Преобразование к каноническому представлению

Генераторы P_μ, $J_{\mu\nu}$ группы $P(1,3)$ в каноническом представлении Широкова–Фолди [18, 20] имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &P_0^k = H^k = \sigma_1 E, \qquad P_a^k = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \\ &J_{ab}^k = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \qquad J_{0a}^k = tp_a - \frac{1}{2}[x_a, P_0^k]_+ - \frac{\sigma_1 S_{ab}p_b}{E+m}. \end{aligned} \tag{124}$$

Представление (124) реализуется на множестве $2(2s+1)$-компонентных волновых функций $\Phi(t,\boldsymbol{x})$, удовлетворяющих уравнению [18]

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,\boldsymbol{x}) = H^k\Phi(t,\boldsymbol{x}). \tag{125}$$

Поскольку на множествах решений уравнения (1) и уравнения (125) реализуется одно и то же представление $\mathcal{D}^+(s)\oplus\mathcal{D}^-(s)$ алгебры $P(1,3)$, то между волновыми функциями Ψ и Φ должна существовать связь

$$\Phi(t,\boldsymbol{x}) = U_s^\alpha\Psi(t,\boldsymbol{x}), \qquad \alpha = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \ \mathrm{III}, \tag{126}$$

где U_s^α — некоторый обратимый оператор, удовлетворяющий соотношениям

$$U_s^\alpha J_{\mu\nu}^\alpha (U_s^\alpha)^{-1} = J_{\mu\nu}^k, \qquad U_s^\alpha P_\mu^\alpha (U_s^\alpha)^{-1} = P_\mu^k. \tag{127}$$

Преобразование (126), (127) можно рассматривать как обобщение преобразования Фолди–Воутуйзена [64] для уравнения Дирака в случае релятивистских уравнений для частиц произвольного спина.

В работах [30, 37, 40] найден явный вид операторов U_s для представлений (15), (17), (25). Для уравнений, полученных в подходе I, этот оператор задается формулой [37, 39]

$$U_s^{\mathrm{I}} = \exp\left[\frac{i}{2}\sigma_2\sum_l \varphi_l\Lambda_l\right], \tag{128}$$

где коэффициенты φ_l определяются соотношениями (35), (37), (38); Λ_l — операторы проектирования (27). В случае, когда гамильтониан частицы с произвольным спином имеет вид (41), оператор (128) принимает форму [36, 37]

$$U_s^{\mathrm{I}} = (E+\sigma_1 H_s^{\mathrm{I}})/\sqrt{2E(E+m)}, \tag{129}$$

а для гамильтонианов (42) оператор (128) имеет вид

$$U_s^{\mathrm{I}} = \exp\left(i\sigma_2\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{p}\operatorname{arctg}\frac{p}{m}\right). \tag{130}$$

При $s=1/2$ операторы (129) и (130) совпадают с оператором Фолди–Воутуйзена [64].

Переход от представления (17) к каноническому осуществляется с помощью изометрического оператора [30]

$$U_s^{\mathrm{II}} = \frac{E}{m}\left[\left(U_s^{\mathrm{II}}\right)^{-1}\right]^+ \operatorname{sech}\left[2\frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})}{p}\theta^{\mathrm{II}}\right], \tag{131}$$

$$\left(U_s^{\mathrm{II}}\right)^{-1} = \sqrt{\frac{m}{E}}\left\{\operatorname{ch}\left[\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{p}\theta^{\mathrm{II}}\right] + i\sigma_2\left[\operatorname{sh}\frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})}{p}\theta^{\mathrm{II}}\right]\right\} \tag{132}$$

для случая, когда гамильтониан H_s^{II} задается формулой (53).

Наконец, для представления (25) операторы U_s имеют вид:

$$U_s^{\mathrm{III}} = V_1V_2V_3, \tag{133}$$

$$V_1 = \exp\left(\sigma_1 \frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{p} \operatorname{Arcth}\frac{p}{m}\right),$$

$$V_2 = \frac{1}{2m}[E(1+\sigma_3) + (1-\sigma_3)(m - 2\sigma_2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})],$$

$$V_3 = 1 + (\sigma_1 - i\sigma_2)(k_1 - 2)\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{2m}$$

для $H_s^{\rm III}$ из (60) и

$$U_s^{\rm III} = \left(E + \sigma_1 H_s^{\rm III}\right)/\sqrt{2E\left(E + [\sigma_1, H_s^{\rm III}]_+/2\right)} \tag{134}$$

для гамильтонианов (61)–(64). В случае $s = 1/2$ операторы (131)–(134) также совпадают с оператором преобразования Фолди–Воутуйзена [64].

Дифференциальные уравнения первого порядка для частицы с произвольным спином, полученные выше, и генераторы группы Пуанкаре (76), (81) в свою очередь можно привести к канонической форме (124), (125). Это достигается преобразованием, осуществляемым оператором

$$\hat{U}_s = \exp\left(\frac{\Gamma_a^{(s)} p_a}{2p} \operatorname{arctg}\frac{p}{m}\right) \exp\left(\frac{\Gamma_0^{(s)} j_a p_a}{p} \operatorname{Arcth}\frac{p}{E}\right). \tag{135}$$

Уравнения (93) и (94) в результате преобразования (126), (135) принимают следующую форму:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi = \Gamma_0 E\Phi, \qquad \Phi = \hat{U}_s\Psi, \tag{136}$$

$$P_s\Phi = \Phi \qquad \text{или} \qquad \frac{1}{2}S_{ab}^2\Phi = s(s+1)\Phi, \tag{137}$$

где P_s — проектор, определенный в (92). Из (137), (86), (87) следует, что волновая функция $\Phi(t, \boldsymbol{x})$ имеет $2(2s+1)$ отличных от нуля компонент.

Преобразования (126) и (127)–(135) можно использовать, чтобы определить операторы средней координаты и среднего спина [64] для частицы с произвольным спином. Действительно, в каноническом представлении (124) эти параметры можно выбрать в виде [64]

$$X_a^k = x_a, \qquad S_{ab}^k = S_{ab}. \tag{138}$$

С помощью преобразования, обратного (126), получаем эти операторы в представлениях (15), (17), (25), (76):

$$\hat{X}_a = \hat{U}_s^{-1} x_a \hat{U}_s, \qquad \check{S}_{ab} = \hat{U}_s^{-1} S_{ab} \hat{U}_s. \tag{139}$$

Приведем явный вид операторов $\hat{X}_a$ и $\check{S}_{ab}$, соответствующих гамильтонианам (41), (42), (93):

$$\begin{aligned}
&\left(\hat{X}_a^{\rm I}\right)_1 = x_a + \frac{1}{p^2E^2}\left\{ES_{ab}p_b\left[E - \sigma_1\left(H_s^{\rm I}\right)_1\right] + ip_a m\left[\sigma_1\left(H_s^{\rm I}\right)_1 - m\right]\right\},\\
&\left(\check{S}_{ab}^{\rm I}\right)_1 = \sigma_1 S_{ab}\frac{\left(H_s^{\rm I}\right)_1}{E} + p_c\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{p^2}\left[1 - \sigma_1\frac{\left(H_s^{\rm I}\right)_1}{E}\right];
\end{aligned} \tag{140}$$

$$\begin{aligned}
\left(\hat{X}_a^{\mathrm{I}}\right)_2 &= x_a + \sigma_2 \frac{S_a}{E} + \frac{E S_{ab} p_b - i\sigma_2 p_a \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{E^2(E+m)}, \\
\left(\check{S}_{ab}\right)_2 &= S_{ab} + \sigma_2 \frac{S_{cd} p_d}{E} + \frac{p_c \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} - S_{ab} p^2}{E(E+m)};
\end{aligned} \tag{141}$$

$$\begin{aligned}
\hat{X}_a &= x_a - i\frac{H_s \tau_a}{mE} + \sigma_2 \frac{j_a}{E} + \frac{j_{ab} p_b E - i\sigma_2 p_a (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{j})}{E^2(E+m)} + \frac{E\tau_{ab} p_b - i p_a (\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{p})}{mE(E+m)}, \\
\check{S}_{ab} &= S_{ab} - i\frac{H_s \tau_{cd} p_d}{mE} + \sigma_2 \frac{j_{cd} p_d}{E} + \frac{p_c (\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{p}) - j_{ab} p^2}{E(E+m)} + \frac{p_c (\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{p}) - \tau_{ab} p^2}{m(E+m)},
\end{aligned} \tag{142}$$

где $S_a = S_{bc}$, $\tau_a = \tau_{bc}$, $j_a = j_{bc}$, (a,b,c) — цикл $(1,2,3)$.

В заключение сделаем следующие замечания.

1. В работах [65–67] обнаружена двойственная инвариантность уравнений Максвелла, Дирака, Клейна–Гордона. С одна стороны, эти уравнения инвариантны относительно преобразований Лоренца, сохраняющих квадратичную форму как в конфигурационном пространстве

$$S^2(x) = x_0^2 - x_a^2 = S^2(x') = (x_0')^2 - (x_a')^2, \tag{143}$$

так и в импульсном пространстве

$$S^2(p) = p_0^2 - p_a^2 = S^2(p') = (p_0')^2 - (p_a')^2. \tag{144}$$

С другой стороны, эти уравнения допускают нелокальные преобразования для координат (не совпадающие с преобразования Лоренца) и локальные преобразования Лоренца для импульсов, относительно которых сохраняется форма (144), но не сохраняем форма (143). Важно подчеркнуть, что при этих преобразованиях время не изменяется ($x_0' = x_0$). Этот последний факт, а именно инвариантность уравнения Дирака относительно преобразований координат, не изменяющих время и не сохраняющих квадратичную форму (143), является следствием того [67, 68], что оператор $i\partial/\partial t$ в пространстве решений уравнения (1) имеет такой же спектр, как и гамильтониан Дирака (121). Спектр оператора (121) лежит, за исключением интервала $(-m, m)$, на всей действительной оси.

Аналогичная ситуация имеет место и в случае уравнений движения для частиц произвольного спина. Выведенные нами в подходах I и III уравнения инвариантны относительно преобразований координат и импульсов, которые сохраняют (144), но не сохраняют (143). Дифференциальные уравнения первого порядка, выведенные выше, инвариантны относительно преобразований (143) и (144), сохраняющих обе формы.

2. Во многих статьях по релятивистским уравнениям движения всякий оператор, диагонализующий гамильтониан Дирака или другие гамильтонианы для частиц со спином $s > 1/2$, называют обобщенным оператором Фолди–Воутуйзена. Такое название не вполне последовательно, и нам представляется более логичным называть преобразованиями типа Фолди–Воутуйзена только такие преобразования, которые диагонализуют гамильтониан и одновременно приводят операторы алгебры Пуанкаре P_μ, $J_{\mu\nu}$ к представлению Фолди (124). Если это последнее условие не накладывается, то существует очень много (континуум) операторов, которые можно использовать для диагонализации гамильтониана. Операторы,

приведенные нами в (128)–(135), являются обобщенными операторами Фолди–Воутуйзена в указанном выше смысле.

Примером оператора, диагонализирующего гамильтониан Дирака, но не приводящего генераторы $J_{\mu\nu}$ к форме Фолди–Широкова, может служить оператор [68]:

$$V = \left[1 + \gamma_0 H_D/(H_D)^{1/2}\right]/\sqrt{2}, \qquad H_D = \gamma_0\gamma_a p_a + \gamma_0\gamma_4 m.$$

В этом случае

$$J'_{ab} = V J_{ab} V^{-1} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab},$$
$$J'_{0a} = V J_{0a} V^{-1} = x_0 p_a - \gamma_0(x_a E + E x_a)/2 + \gamma_0(S_{ab}p_b + S_{4a}m)/E,$$
$$S_{4a} = i\gamma_4\gamma_a/2.$$

2. Уравнения для безмассовых частиц

Уравнениям для частиц с нулевой массой посвящено большое количество работ, опубликованных в последние годы [51–54]. В этих работах были предложены различные уравнения для таких частиц и в то же время описаны не все возможные неэквивалентные уравнения такого класса. Здесь, основываясь на результатах работ [45–48], опишем все неэквивалентные в рамках группы Пуанкаре уравнения для безмассовых частиц и исследуем их свойства при P-, C- и T-преобразованиях.

Уравнение типа Вейля для частиц произвольного спина

Хорошо известно, что уравнение Вейля для нейтрино [69] эквивалентно уравнению Дирака (с $m = 0$), если на решения последнего наложить пуанкаре-инвариантное дополнительное условие

$$\left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right)\Psi = 0. \tag{145}$$

Здесь получим уравнение типа Вейля для частиц произвольного спина, исходя из уравнений (95), (96).

Систему уравнений (95), (96) для случая $m = 0$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} & i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \Gamma_0^{(s)}\Gamma_a^{(s)} p_a\Psi, \\ & \left(i\frac{\partial}{\partial t} - \Gamma_0^{(s)}\Gamma_a^{(s)} p_a\right)\left(1 + \Gamma_4^{(s)}\right)\left[S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - 4s(s-1)\right]\Psi = 0. \end{aligned} \tag{146}$$

Из явного вида генераторов группы $P(1,3)$ (77), (80), (82), (83 следует, что при $m = 0$ оператор $\left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right)$ коммутирует с P_μ, $J_{\mu\nu}$ и, следовательно, уравнение (145) пуанкаре-инвариантно для любого значения спина. Добавляя условие (145) к уравнения (146) и выбирая матрицы $\Gamma_\mu^{(s)}$ в виде

$$\Gamma_0^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_4^{(s)} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_a^{(s)} = i\begin{pmatrix} 0 & 2\tau_a \\ -2\tau_a & 0 \end{pmatrix}, \tag{147}$$

где I и 0 — $4s$-рядные единичная и нулевая матрицы; τ_a — $4s$-рядные матрицы, удовлетворяющие соотношениям

$$[\tau_a, \tau_b]_- = i\varepsilon_{abc}\tau_c, \qquad \sum_a \tau_a^2 = 3/4, \tag{148}$$

приходим к системе уравнений

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{p}\varphi(t,\boldsymbol{x}), \tag{149}$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - 2\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{p}\right)\left[S_{ab}^2 - 2s(s-1)\right]\varphi(t,\boldsymbol{x}) = 0, \qquad S_{ab} = j_c + \tau_c, \tag{150}$$

где φ — $4s$-компонентная волновая функция, связанная с Ψ соотношением

$$\varphi = \left(1 + \Gamma_4^{(s)}\right)\Psi/2. \tag{151}$$

Матрицы S_{ab}, входящие в (150), согласно (82), (83) имеют следующую структуру:

$$S_{ab} = j_c + \tau_c, \qquad [j_c, \tau_a]_- = 0, \tag{152}$$

где матрицы j_c с точностью до преобразований эквивалентности задаются соотношениями

$$[j_a, j_b]_- = i\varepsilon_{abc}j_c, \qquad \sum_a j_a^2 = s(s-1). \tag{153}$$

Уравнение (149), очевидно, описывает частицы с нулевой массой покоя. Неприводимые представления группы Пуанкаре II класса (для $P_\mu P^\mu = 0$, $P_\mu \neq 0$) $D^\varepsilon(\lambda)$ задаются собственными значениями ε и λ инвариантных операторов знака энергии $\hat{\varepsilon} = P_0/|P_0|$ и спиральности $\Lambda = \sum\limits_{a\neq b\neq c} J_{ab}P_c/P$.

Покажем, что система уравнений (149), (150) описывает частицу со спиральностью $\lambda = \pm s$. Обозначим

$$\frac{1}{2}S_{ab}^2 - s^2 = g. \tag{154}$$

Подставляя (154) в (150) и используя (149), получаем после несложных преобразований

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - 2\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{p}\right)g\varphi = \left[i\frac{\partial}{\partial t} - 2\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{p}, g\right]_- \varphi = [g, 2\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{p}]_-\varphi. \tag{155}$$

Принимая во внимание тождества

$$[g, \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{p}]_+ = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}, \qquad g^2 = s^2, \qquad [f, \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}]_- = 0, \tag{156}$$

получаем из (155)

$$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}\varphi = 2s\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{p}\varphi. \tag{157}$$

Из (149), (157), (148) заключаем, что оператор знака энергии $\varepsilon = 2\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{p}/p$ имеет на множестве решений уравнений (149), (150) значения $\varepsilon = \pm 1$, а значения оператора спиральности $\Lambda = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}/p$ при этом $\lambda = \pm s$. Следовательно, на решениях уравнений (149), (150) реализуется прямая сумма неприводимых представлений $D^+(s) \oplus D^-(s)$ группы Пуанкаре и их можно рассматривать как обобщение уравнений Вейля на случай частиц с произвольным спином. Ниже покажем, что уравнения (149), (150) C-, P-, T-инвариантны, но C-, P-неинвариантны.

Рассмотрим примеры уравнений (149), (150) для $s = 0, 1/2, 1, 3/2, 2$.

а) $s = 1/2$. В этом случае, согласно (152), (153),

$$S_a = \tau_a, \qquad j_a = 0, \tag{158}$$

где τ_a — матрицы размерности 2×2, удовлетворяющие (148). Подставляя (158) в (149) и (150), убеждаемся, что уравнение (150) обращается в тождество [если имеет место (149)], а (149) совпадает с уравнением Вейля:

$$\rho_\mu p^\mu \varphi(t, \boldsymbol{x}) = 0, \tag{159}$$

где ρ_μ — матрицы Паули:

$$\rho_a = 2\tau_a, \qquad \rho_0 = I. \tag{160}$$

б) $s = 1$. В этом случае матрицы τ_a, j_b, удовлетворяющие (148), (152), (153), не умаляя общности, можно выбрать в виде

$$\begin{gathered}
\tau_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\tau_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \qquad j_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
j_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad j_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{161}$$

Обозначая

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} \tag{162}$$

и подставляя (161), (162) в (149), (157), приходим к системе уравнений для φ

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi} = \partial \boldsymbol{\varphi}/\partial t, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = 0, \qquad \varphi_4 = \text{const}, \tag{163}$$

где константу φ_4, не умаляя общности, можно приравнять нулю.

Полагая в (163) $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{H} - i\boldsymbol{E}$, где $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{E}$ — векторы напряженности магнитного и электрического полей, приходим к уравнениям Максвелла для электромагнитного поля в вакууме. Такая формулировка уравнений Максвелла была впервые предложена в работах [70, 71].

в) $s = 0$. Уравнения для бесспиновых и безмассовых частиц можно получить из (149), (157), (161), если положить там $s = 0$. Используя обозначение (162), получаем в этом случае систему уравнений

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = i\frac{\varphi_4}{\partial t}, \qquad \operatorname{grad} \varphi_4 = i\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}. \tag{164}$$

Уравнения имеют решения вида

$$\varphi_l(t,\boldsymbol{x}) = k_l\varphi(\omega)\exp[i(\boldsymbol{kx}-\omega t)], \qquad k_4=\omega=\pm\sqrt{k_a^2}, \tag{165}$$

где $\varphi(\omega)$ — произвольная функция, и описывают распространение продольной волны.

г) $s=3/2$. Выбирая матрицы τ_a и j_b в виде:

$$j_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&-i&0&0\\0&i&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-i\\0&0&0&i&0\end{pmatrix}, \qquad j_2=\begin{pmatrix}0&0&i&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\-i&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&i\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&-i&0&0\end{pmatrix},$$

$$j_3=\begin{pmatrix}0&-i&0&0&0&0\\i&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-i&0\\0&0&0&i&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}, \qquad \tau_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}, \tag{166}$$

$$\tau_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&-i&0&0\\0&0&0&0&-i&0\\0&0&0&0&0&-i\\i&0&0&0&0&0\\0&i&0&0&0&0\\0&0&i&0&0&0\end{pmatrix}, \qquad \tau_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

и представляя волновую функцию φ в форме

$$\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\end{pmatrix}, \qquad \varphi_\alpha=\begin{pmatrix}\varphi_\alpha^1\\\varphi_\alpha^2\\\varphi_\alpha^3\end{pmatrix}, \qquad \alpha=1,2, \tag{167}$$

получаем из (166), (167), (149), (150) и (157) уравнение для φ_α^a

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{\varphi}_\alpha = i\frac{\boldsymbol{\varphi}_\alpha}{\partial t}, \tag{168}$$

$$(\rho_\mu)_{\alpha\alpha'}p^\mu\boldsymbol{\varphi}_{\alpha'}=0. \tag{169}$$

Таким образом, волновая функция φ_α^a частицы с $m=0$ и $s=3/2$ удовлетворяет уравнению типа Максвелла (168) по векторному индексу a и уравнению типа Вейля (169) по спинорному индексу α.

д) $s=2$. Выберем матрицы τ_a и j_b в виде

$$j_a=\hat{j}_a\otimes\hat{I}, \qquad \tau_a=\frac{1}{2}I\otimes\hat{\rho}_a, \tag{170}$$

где $\hat{I}$ и I — двухрядная и четырехрядная единичные матрицы;

$$
j_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad j_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
j_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{171}
$$

$$
\rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},
$$

Волновая функция $\varphi(x)$ имеет, согласно (170), (171), восемь компонент φ_α^k; $\alpha = 1,2$; $k = 1,2,3,4$, причем матрицы j_a действуют только на индекс k, а τ_a — на индекс α.

Из (149), (156), (157) и (170) получаем уравнения для φ_α^k в виде

$$
(\rho_\mu)_{\alpha\alpha'} p^\mu \varphi_{\alpha'}^k = 0, \qquad \frac{2}{3}(j_a)_{kk'} p_a \varphi_\alpha^{k'} = i\frac{\partial \varphi_\alpha^k}{\partial t}, \tag{172}
$$

которые из изложенного выше можно интерпретировать как уравнения для безмассовых частиц со спином 2.

Другие типы уравнений для частиц с нулевой массой

Как показано в работе [45], уравнение Вейля не является единственно возможным пуанкаре-инвариантным двухкомпонентным уравнением для безмассовых частиц со спином $s = 1/2$. В работах [45–47] получены все неэквивалентные уравнения для таких частиц и исследованы их свойства относительно P-, C-, T-преобразований.

Аналогичная ситуация имеет место и для частиц произвольного спина, т.е. уравнения (62), (63) не исчерпывают всех неэквивалентных уравнений для безмассовых частиц. Получим здесь все возможные (с точностью до эквивалентности) уравнения для частиц с $m = 0$ и произвольным спином s.

Будем исходить из следующей системы $8s$-компонентных уравнений:

$$
i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\Psi, \tag{173}
$$

$$
\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\right)\hat{S}_{ab}^2\Psi = 0, \tag{174}
$$

где $\Psi(t,\vec{x})$ — $8s$-компонентная волновая функция; α_a и $\hat{S}_{ab}$ — матрицы размерности $8s \times 8s$

$$
\alpha_a = i\begin{pmatrix} 0 & -2\tau_a \\ 2\tau_a & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{S}_{ab} = \begin{pmatrix} S_{ab} & 0 \\ 0 & S_{ab} \end{pmatrix}, \tag{175}
$$

а матрицы S_{ab}, τ_a, по-прежнему, определяются соотношениями (148), (152), (153).

Уравнения (173), (174) пуанкаре-инвариантны. Генераторы группы $P(1,3)$ на множестве решений уравнений (174), (173) имеют вид:

$$\begin{aligned} &P_0 = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}, \qquad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \\ &J_{0a} = x_0 p_a - x_a p_0 + \frac{i}{2}\alpha_a + i\beta_a, \end{aligned} \tag{176}$$

где

$$\beta_a = i\begin{pmatrix} 0 & -j_a \\ j_a & 0 \end{pmatrix} = \Gamma_4 j_a, \qquad \Gamma_4 = i\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \tag{177}$$

а матрицы j_a определены в (152), (153).

Повторяя почти дословно выкладки (154)–(157), нетрудно убедиться, что уравнение (174) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{p}\Psi = \Gamma_4 s\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\Psi. \tag{178}$$

Из (176), (178) заключаем, что на множестве решений уравнений (173), (174) реализуется прямая сумма

$$\mathcal{D}^+(s)\oplus\mathcal{D}^-(-s)\oplus\mathcal{D}^-(s)\oplus\mathcal{D}^+(-s) \tag{179}$$

неприводимых представлений группы $P(1,3)$. Таким образом, уравнения (173), (174) неэквивалентны (177), (178).

Для получения всех других неэквивалентных уравнений для безмассовых частиц произвольной спиральности воспользуемся тем фактом, что система (173), (174) не исчерпывает всех пуанкаре-инвариантных уравнений в представлении (176). Действительно, как и в случае $s = 1/2$, помимо (174), на волновую функцию Ψ можно наложить одно из следующих инвариантных дополнительных условий:

$$L_1\Psi \equiv (1 + \varepsilon\Gamma_4\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \varepsilon'\Gamma_4 + \varepsilon\varepsilon'\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})\,\Psi = 0, \tag{180}$$

$$L_2\Psi \equiv (1 + \varepsilon\Gamma_4)\Psi = 0, \tag{181}$$

$$L_3\Psi \equiv (1 + \varepsilon\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})\,\Psi = 0, \tag{182}$$

$$L_4\Psi \equiv (1 + \varepsilon\Gamma_4\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})\,\Psi = 0, \tag{183}$$

$$L_5\Psi \equiv (-3 + \varepsilon\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + \varepsilon'\Gamma_4 + \varepsilon\varepsilon'\Gamma_4\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})\,\Psi = 0, \tag{184}$$

где

$$\hat{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}/p, \qquad \varepsilon, \varepsilon' = \pm 1. \tag{185}$$

Уравнения (180)–(185) пуанкаре-инвариантны, поскольку операторы $\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}$ и Γ_4 (а значит, и $L_1, L_2, \ldots, L_5$) коммутируют со всеми генераторами (176) группы $P(1,3)$. С другой стороны, эти уравнения исчерпывают все возможные с точностью до эквивалентности пуанкаре-инвариантные дополнительные условия, которые можно наложить на решения системы (173), (174). Действительно, операторы L_n можно представить в виде:

$$
\begin{aligned}
&L_1 = 4P_1^{\varepsilon}P_2^{\varepsilon'}, \quad L_2 = 2P_1^{\varepsilon}, \quad L_3 = 2P_2^{\varepsilon},\\
&L_4 = 2\left(P_1^{\varepsilon}P_2^{\varepsilon'} + P_1^{-\varepsilon}P_2^{-\varepsilon'}\right), \qquad L_5 = -4\left(1 - P_1^{\varepsilon}P_2^{\varepsilon'}\right),
\end{aligned}
\tag{186}
$$

где P_1^{ε} и $P_2^{\varepsilon'}$ — операторы проектирования на подпространства $\mathcal{D}^{\varepsilon}(s)\oplus\mathcal{D}^{\varepsilon}(-s)$ и $\mathcal{D}^{+}(\varepsilon',s)\oplus\mathcal{D}^{-}(\varepsilon',s)$ соответственно:

$$
P_1^{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(1 + \varepsilon\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}}{p}\right), \qquad P_2^{\varepsilon'} = \frac{1}{2}\left(1 + \varepsilon'\Gamma_4\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}}{p}\right). \tag{187}
$$

Из (179), (186), (187) следует, что на решениях уравнений (173), (174) с одним из дополнительных условий (180)–(184) реализуются следующие представления группы $P(1,3)$:

$$
\mathcal{D}^{-\varepsilon}(\varepsilon's)\oplus\mathcal{D}^{-\varepsilon}(-\varepsilon's)\oplus\mathcal{D}^{\varepsilon}(-\varepsilon's), \tag{188}
$$

$$
\mathcal{D}^{-\varepsilon}(s)\oplus\mathcal{D}^{\varepsilon}(-s), \tag{189}
$$

$$
\mathcal{D}^{-\varepsilon}(s)\oplus\mathcal{D}^{-\varepsilon}(-s), \tag{190}
$$

$$
\mathcal{D}^{+}(-\varepsilon s)\oplus\mathcal{D}^{-}(-\varepsilon s), \tag{191}
$$

$$
D^{\varepsilon}(\varepsilon's). \tag{192}
$$

Нетрудно убедиться, что формулы (179), (188)–(192) исчерпывают все возможные невырожденные прямые суммы неприводимых представлений $\mathcal{D}^{\varepsilon}(\varepsilon's)$ группы $P(1,3)$, откуда и следует вывод, что уравнения (173), (174) с одним из дополнительных условий (180)–(184) (и без дополнительных условий) исчерпывают все возможные (с точностью до эквивалентности) релятивистские уравнения для безмассовой частицы с произвольным спином s.

Исследуем свойства полученных уравнений относительно P-, C- и T-преобразований. Для этого воспользуемся следующей схемой [46]:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{D}^{+}(s) \arrow[rr, leftrightarrow, "C"] \arrow[d, leftrightarrow, "P"'] & & \mathcal{D}^{-}(s) \arrow[d, leftrightarrow, "P"] \\
\mathcal{D}^{+}(-s) \arrow[rr, leftrightarrow, "C"'] & & \mathcal{D}^{-}(-s)
\end{tikzcd}
\qquad
\mathcal{D}^{+}(\varepsilon's) \xleftrightarrow{\;T\;} \mathcal{D}^{+}(\varepsilon's)
$$

где символ $\mathcal{D}^{+}(s)\overset{P}{\leftrightarrow}\mathcal{D}^{+}(-s)$ означает, что операция пространственной инверсии преобразует пространство неприводимого $\mathcal{D}^{\varepsilon}(s)$ представления в пространство $\mathcal{D}^{-\varepsilon}(s)$ представления и т.д.

Из (179), (188)–(192) заключаем, что уравнения (173), (174) P-, C-, T-инварианты; уравнения (173), (174) с дополнительным условием (180) T-инвариантны, но C-, P-, CP-неинвариантны; уравнения (173), (174), (181) T-, CP-инвариантны, но C-, P-неинвариантны; уравнения (173), (174), (182) P-, T-инвариантны, но C-неинвариантны; уравнения (173), (174), (183) C-, T-инвариантны, но P-неинвариантны; наконец, уравнения (173), (174), (184) T-инвариантны, но P-, C-, PC-неинвариантны.

Отметим, что уравнения (173), (174) с одним из дополнительных условий (180), (183) или (184) неинвариантны относительно PCT- и PT-преобразований. Этот факт не противоречит известной CPT-теореме Паули–Людерса, поскольку дополнительные условия (180), (183), (184) в x-пространстве нелокальны.

В заключение этого раздела приведем явный вид всех возможных неэквивалентных уравнений для безмассовых частиц со спином $s = 1$. Выбирая матрицы τ_a и j_a из (175), (152) в форме (161) и представляя волновую функцию Ψ в виде

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \tag{193}$$

где

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}, \qquad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \end{pmatrix}, \tag{194}$$

φ_μ и χ_μ — однокомпонентные функции, приходим, согласно (173), (174), (178), к уравнениям для φ и χ в форме:

$$\begin{gathered} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\varphi} = -\partial\boldsymbol{\chi}/\partial t, \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi} = 0, \\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\chi} = \partial\boldsymbol{\varphi}/\partial t, \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{\chi} = 0, \qquad \varphi_4 = c_1, \qquad \chi_4 = c_2, \end{gathered} \tag{195}$$

где c_1 и c_2 — константы, которые, не умаляя общности, можно считать равными нулю.

Уравнения (195) совпадают с уравнениями Максвелла для электромагнитного поля в вакууме. Найдем теперь явный вид дополнительных условий (180)–(185), которые можно наложить на решения уравнений (195), не нарушив их ковариантности. Подставляя (152), (161), (175) в (180)–(185), получаем

$$p(\boldsymbol{\varphi} - i\varepsilon'\boldsymbol{\chi}) = -\varepsilon\,\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{\varphi} - i\varepsilon'\boldsymbol{\chi}), \tag{196}$$

$$\boldsymbol{\varphi} = i\varepsilon\boldsymbol{\chi}, \tag{197}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\varphi} = i\varepsilon p\boldsymbol{\chi}, \qquad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\chi} = -i\varepsilon p\boldsymbol{\varphi}, \tag{198}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\varphi} = -\varepsilon p\boldsymbol{\varphi}, \qquad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\chi} = -\varepsilon p\boldsymbol{\chi}, \tag{199}$$

$$p(-\boldsymbol{\varphi} + i\varepsilon'\boldsymbol{\chi}) = -\varepsilon\,\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{\varphi} - i\varepsilon'\boldsymbol{\chi}), \qquad p(\boldsymbol{\varphi} + i\varepsilon'\boldsymbol{\chi}) = 0. \tag{200}$$

Таким образом, помимо уравнений Максвелла (195) для безмассовых частиц со спином 1 существует еще пять типов пуанкаре-инвариантных уравнений, которые имеют вид (195) с одним из дополнительных условий (196)–(200). Подчеркнем, что все дополнительные условия (196)–(200), за исключением (197), в x-пространстве имеют форму нелокальных интегродифференциальных уравнений.

3. Частица с произвольным спином во внешнем электромагнитном поле

Уравнения движения свободных релятивистских частиц представляют реальный физический интерес только в том случае, если их можно использовать для решения конкретных задач физики. Одной из самых важных является задача о движении заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Как уже говорилось, многие из широко известных релятивистских уравнений приводят при решении этой задачи к большим трудностям.

В настоящем разделе задача о движении частицы с произвольным спином во внешнем электромагнитном поле решается с использованием уравнений, полученных выше. При этом оказывается, что уравнения (93)–(96) не приводят к нарушению причинности.

Введение взаимодействия в уравнения без лишних компонент

Обобщение уравнений без лишних компонент, полученных выше, для заряженных частиц во внешнем поле представляет собой довольно трудную задачу ввиду сложной зависимости гамильтонианов $H_s^{\rm I}$, $H_s^{\rm II}$ импульсов. Здесь эту задачу решим в предположении, что импульсы частиц малы по сравнению с их массами.

Для $p \ll m$ гамильтонианы $H_s^{\rm I}$ (42) и $H_s^{\rm II}$ (53) можно представить в виде ряда по степеням $1/m$ (комптоновской длины волны) [38, 39]:

$$
\begin{aligned}
H_s^\alpha = \delta_1 &\left[m + \frac{1}{4m} \sum_{a,b} d_{ab}(p_a p_b + p_b p_a) \right] + \\
&+\sigma_3 \left[\sum_a b_a p_a + \frac{1}{m^2} h^\alpha(\boldsymbol{p}) \right] + O\left(\frac{1}{m^3}\right),
\end{aligned} \tag{201}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\alpha = {\rm I},\ {\rm II}, \qquad d_{ab} = \delta_{ab}/4 - S_a S_b, \qquad b_a = 2S_a, \\
&h^{\rm I}(\boldsymbol{p}) = -2h^{\rm II}(\boldsymbol{p}) = \frac{2}{3} \sum_{a,b,c} S_a d_{bc} p_a p_b p_c, \qquad a,b,c = 1,2,3.
\end{aligned} \tag{202}
$$

Как видно из (201), гамильтонианы $H_s^{\rm I}$ и $H_s^{\rm II}$ совпадают с точностью до членов порядка $1/m$ и являются полиномами по p_a.

Для того чтобы перейти к описанию заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле, сделаем в (201) обычную замену $p_\mu \to \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$, где e — заряд частицы; A_μ — вектор-потенциал электромагнитного поля. В результате придем к следующему уравнению:

$$
\begin{aligned}
&H_s^\alpha(\boldsymbol{\pi})\psi(t,\boldsymbol{x}) = i\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\boldsymbol{x}), \\
&H_s^\alpha(\boldsymbol{\pi}) = \sigma_1 \left[m + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - \frac{2}{m}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - \frac{e}{m}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H} \right] + eA_0 + \\
&\qquad +\sigma_3 \left[2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi} + \frac{h^\alpha(\boldsymbol{\pi})}{m^2} \right] + O\left(\frac{1}{m^3}\right), \qquad \boldsymbol{\pi}^2 = \sum_a \pi_a^2,
\end{aligned} \tag{203}
$$

где $\boldsymbol{H} = {\rm rot}\,\boldsymbol{A}$ — вектор напряженности магнитного поля.

Можно убедиться непосредственно, что собственные значения гамильтониана (203) могут быть как положительными, так и отрицательными. Из (203) получим уравнение для состояний с положительной энергией, подобно тому, как это было сделано Фолди и Воутуйзеном [64] для дираковской частицы с $s = 1/2$. Это достигается с помощью серии приближенных унитарных преобразований, приводящих гамильтониан (203) к виду, не содержащему "нечетных" (не коммутирующих с σ_1) членов.

Подвергнем гамильтониан $H_s^\alpha(\boldsymbol{\pi})$ и волновую функцию $\Psi(t, \boldsymbol{x})$ преобразованию:

$$\Psi \to \Psi' = U\Psi, \qquad H_s^\alpha(\boldsymbol{\pi}) \to H_s'^\alpha(\boldsymbol{\pi})U^{-1} - i\frac{\partial U}{\partial t}U^+. \tag{204}$$

Используя оператор

$$U_1 = \exp(-i\sigma_2 \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}/m), \tag{205}$$

получаем

$$\begin{gathered} H_s'^\alpha(\boldsymbol{\pi}) = \sigma_1\left(m + \frac{\pi^2}{2m} - e\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}}{m}\right) + eA_0 - \\ -i\sigma_2\frac{e\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}}{m} + \frac{e}{2m^2}[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}, \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}]_- + \sigma_3\frac{h'^\alpha(\boldsymbol{\pi})}{m^2} + O\left(\frac{1}{m^3}\right), \\ h'^\alpha(\boldsymbol{\pi}) = h^\alpha(\boldsymbol{\pi}) - [\pi^2, (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})]_+ + e[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}, \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}]_+ + \frac{4}{3}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^3, \\ E_a = -\frac{\partial A_0}{\partial x_a} - \frac{\partial A_a}{\partial t}. \end{gathered} \tag{206}$$

Гамильтониан $H_s'^\alpha(\boldsymbol{\pi})$ является "четным" с точностью до членов порядка $1/m^0$. В свою очередь, унитарный оператор

$$U_2 = \exp\left(i\sigma_3 e\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}}{2m^2}\right) \tag{207}$$

приводит $H_s'^\alpha(\boldsymbol{\pi})$ к следующему виду ("четному" с точностью до членов порядка $1/m$):

$$\begin{gathered} H_s''^\alpha(\boldsymbol{\pi}) = \sigma_1\left(m + \frac{\pi^2}{2m} - e\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}}{m}\right) + eA_0 + \frac{2}{2m^2}[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}, \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}]_- + \\ +\sigma_3\frac{1}{m^2}h''^\alpha(\boldsymbol{\pi}) + O\left(\frac{1}{m^3}\right), \qquad h''^\alpha(\boldsymbol{\pi}) = h'^\alpha(\boldsymbol{\pi}) + \frac{e}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}). \end{gathered} \tag{208}$$

Наконец, с помощью оператора

$$U_3 = \exp\left(-i\sigma_2\frac{h''^\alpha(\boldsymbol{\pi})}{m^3}\right) \tag{209}$$

получаем из (208) гамильтониан [38, 39]

$$H_s'''(\boldsymbol{\pi}) = \sigma_1\left(m + \frac{\pi^2}{2m} - e\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}}{m}\right) + eA_0 + \frac{e}{2m^2}[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}, \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}]_-, \tag{210}$$

“четный” с точностью до членов порядка $1/m^2$.

Таким образом, три последовательных преобразования, осуществляемых операторами (205), (207), (209), приводят уравнение (203) к виду

$$H_s'''(\boldsymbol{\pi})\Phi(t,\boldsymbol{x}) = i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,\boldsymbol{x}), \qquad \Phi(t,\boldsymbol{x}) = U_3U_2U_1\Psi(t,\boldsymbol{x}). \tag{211}$$

Оператор H_s''' в приближении $1/m^2$ коммутирует с σ_1. На множестве функций Ψ^+, удовлетворяющих условию

$$\sigma_1\Phi^+ = \Phi^+, \tag{212}$$

гамильтониан (211) положительно определен и равен [38]:

$$\begin{gathered} H_s'''(\boldsymbol{\pi})\Phi^+ = \left\{m + \frac{\pi^2}{2m} - e\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}}{m} + eA_0 + \right. \\ \left. + \frac{e}{2m^2}[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}, \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}]_-\right\}\Phi^+ = i\frac{\partial}{\partial t}\Phi^+. \end{gathered} \tag{213}$$

Формула (213) представляет собой обобщение уравнения Паули для частицы со спином 1/2 на случай частицы с произвольным спином.

Для того чтобы выяснить физический смысл входящих в (213) слагаемых, воспользуемся тождеством

$$\begin{gathered} \frac{e}{2m^2}[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}, \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}]_- \equiv \frac{e}{12m^2}Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b} - e\frac{s(s+1)\operatorname{div}\vec{E}}{6m^2} - \\ - \frac{e}{4m^2}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}); \qquad Q_{ab} = 3[S_a, S_b]_+ - 2\delta_{ab}s(s+1), \end{gathered} \tag{214}$$

Согласно (213), (214), квазирелятивистский гамильтониан $H_s'''(\boldsymbol{\pi})$ частицы с произвольным спином во внешнем электромагнитном поле включает члены, соответствующие дипольному $\left(-\frac{e}{m}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}\right)$, квадрупольному $\left(-\frac{1}{12m^2}Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b}\right)$ и спин-орбитальному $\left(-\frac{e}{4m^2}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p})\right)$ взаимодействиям.

Таким образом, используя полученные выше уравнения для свободных частиц произвольного спина, получим квазирелятивистские уравнения (213) для заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле. В рассматриваемом приближении $1/m^2$ гамильтонианы $H_s'(\boldsymbol{\pi})$ и $H_s''(\boldsymbol{\pi})$ (203) эквивалентны $H_s'''(\boldsymbol{\pi})$ (213). Однако операторы H_s^{I} определены в гильбертовом пространстве, в котором скалярное произведение имеет сложную структуру (4), поэтому гамильтонианы $H_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi})$ представляются более удобными для описания движения заряженной частицы во внешнем поле.

Для $s = 1/2$ формула (213) совпадает с уравнением, полученным Фолди и Воутуйзеном [64]. При $s = 1$ (213) имеет такую же структуру, как и уравнение, полученное в работе [72], но дополнительно учитывает квадрупольное взаимодействие частицы с полем.

Введение взаимодействия в дифференциальные уравнения движения

Полученные выше дифференциальные уравнения движения свободных частиц произвольного спина допускают непротиворечивое обобщение для заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле. Ниже будет осуществлено такое обобщение и будет показано, что при этом не возникает парадоксов с нарушением причинности, которые имеют место в других релятивистских уравнениях для частиц со спином $s \neq 1/2$ [23, 24].

Будем исходить из системы уравнений первого порядка (93), (94) или (95), (96). Можно показать, что введение минимального электромагнитного взаимодействия непосредственно в уравнения (93), (94) или в явно ковариантную систему (95), (96) приводит к тому, что как уравнения (93), (94), так и уравнения (95), (96) становятся несовместными. Чтобы преодолеть эту трудность, запишем (93), (94) в виде единого уравнения

$$\left[\hat{P}_s\left(i\frac{\partial}{\partial t} - H_s\right) + \varkappa\left(1 - \hat{P}_s\right)\right]\Psi(t, \boldsymbol{x}) = 0, \tag{215}$$

где $\varkappa$ — произвольный параметр. Эквивалентность (215) и (93), (94) следует из соотношений

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - H_s, \hat{P}_s\right]_- = 0, \qquad \hat{P}_s\hat{P}_s = \hat{P}_s. \tag{216}$$

Явно ковариантную систему (95), (96) также можно представить в виде одного уравнения

$$\begin{gathered}\left[B_s\left(\Gamma_\mu^{(s)}p^\mu - m\right) + \varkappa(1 - B_s)\right]\Psi = 0,\\ B_s = \frac{1}{16ms}\left(\Gamma_\mu^{(s)} + m\right)\left(1 + \Gamma_4^{(s)}\right)\left[S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - 4s(s-1)\right],\end{gathered} \tag{217}$$

поскольку

$$\left[B_s, \left(\Gamma_\mu^{(s)}p^\mu - m\right)\right]_-\Psi = 0, \qquad B_sB_s = B_s. \tag{218}$$

Сделаем в (215) и (217) замену $p_\mu \to \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$, где A_μ — вектор-потенциал электромагнитного поля, и покажем, что такая замена позволяет получить систему уравнений первого порядка, описывающих движение заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Поскольку уравнения (215) и (217) после замены $p_\mu \to \pi_\mu$ в конечном итоге приводят к одинаковым результатам, рассмотрим только уравнение (215), которое принимает вид

$$\hat{P}_s(\boldsymbol{\pi})[\pi_0 - H_s(\boldsymbol{\pi})] + \varkappa\left[1 - \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi})\right]\Psi(t, \boldsymbol{x}) = 0, \tag{219}$$

где

$$H_s(\boldsymbol{\pi}) = \Gamma_0^{(s)}\Gamma_a^{(s)}\pi_a + \Gamma_0^{(s)}m, \qquad \hat{P}_s(\boldsymbol{x}) = P_s + (1 - \Gamma_4)[\Gamma_\mu\pi_\mu, P_s]_-/2m. \tag{220}$$

Умножая (219) на $\hat{P}_s(\boldsymbol{\pi})$ и $\left[1 - \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi})\right]$ и используя тождества

$$\begin{gathered}\left[\pi_0 - H_s(\boldsymbol{\pi}), \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi})\right]_- \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi}) \equiv\\ \equiv \frac{e}{4m}\Gamma_0^{(s)}\left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right)\left(\frac{1}{s}S_{\mu\nu} - i\Gamma_\mu^{(s)}\Gamma_\nu^{(s)}\right)F^{\mu\nu}\hat{P}_s(\boldsymbol{\pi}),\end{gathered} \tag{221}$$

$$\hat{P}_s(\boldsymbol{\pi}) \cdot \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi}) = \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi}), \qquad eF_{\mu\nu} = -i[\pi_\mu, \pi_\nu],$$

приходим к системе уравнений

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H_s(\boldsymbol{\pi}, \pi_0)\Psi, \qquad H_s(\boldsymbol{\pi}, \pi_0) = \Gamma_0^{(s)}\Gamma_a^{(s)}\pi_a + \Gamma_0^{(s)}m + \\ +eA_0 + \frac{e}{4m}\Gamma_0^{(s)}\left(1-\Gamma_4^{(s)}\right)\left(\frac{1}{s}S_{\mu\nu} - i\Gamma_\mu^{(s)}\Gamma_\nu^{(s)}\right)F^{\mu\nu}, \tag{222}$$

$$\left\{P_s + \left(1-\Gamma_4^{(s)}\right)\frac{[\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu, P_s]_-}{2m}\right\}\Psi = \Psi, \tag{223}$$

которую, как и (93), (94), можно записать в эквивалентной явно ковариантной форме:

$$\left[\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu - m + \frac{e}{4m}\left(1-\Gamma_4^{(s)}\right)\left(\frac{1}{s}S_{\mu\nu} - i\Gamma_\mu^{(s)}\Gamma_\nu^{(s)}\right)F^{\mu\nu}\right]\Psi = 0, \tag{224}$$

$$\left(m + \Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu\right)\left(1+\Gamma_4^{(s)}\right)\left[S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - 4s(s-1)\right]\Psi = 16ms\Psi. \tag{225}$$

Покажем, что уравнения (222), (223) [или (224), (225)] не приводят к парадоксам с нарушением причинности. Для этого преобразуем (224), (225) к такой форме, чтобы каждое решение системы удовлетворяло уравнению Зайцева–Фейнмана–Гелл-Мана [77], которое, как известно [12], описывает причинное распространение волн. Это достигается переходом к новой волновой функции

$$\Psi(t, \boldsymbol{x}) = V\Phi(t, \boldsymbol{x}), \tag{226}$$

где V — обратимый оператор:

$$V = 1 + \frac{\lambda^-}{m}\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu, \qquad V^{-1} = 1 - \frac{\lambda^-}{m}\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu, \qquad \lambda^\pm = \frac{1}{2}\left(1 \pm \Gamma_4^{(s)}\right). \tag{227}$$

Подставляя (226), (227) в (223), (224) и используя тождество

$$\left(\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu\right)^2 \equiv \pi_\mu\pi^\mu + ie\Gamma_\mu^{(s)}\Gamma_\nu^{(s)}F^{\mu\nu}/2, \tag{228}$$

получаем уравнения для $\Phi(t, \boldsymbol{x})$:

$$\left[\lambda^+\left(\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu + \frac{e}{2sm}S_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{m}\pi_\mu\pi^\mu\right) - m\right]\Phi(t, \boldsymbol{x}) = 0, \tag{229}$$

$$P_s\Phi = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{1}{2}S_{ab}^2\Phi = s(s+1)\Phi. \tag{230}$$

Наконец, умножая (229) слева на оператор

$$F = m + \left(\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu - \frac{e}{2sm}\widetilde{S}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{m}\pi_\mu\pi^\mu\right)\lambda^-, \tag{231}$$

где

$$\widetilde{S}_{ab} = S_{ab}, \qquad \widetilde{S}_{0a} = iS_{bc}, \tag{232}$$

приходим к уравнению

$$\left(\pi_\mu \pi^\mu - m^2 - \frac{e}{2s}\widetilde{S}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)\Phi(t,\boldsymbol{x}) = 0. \tag{233}$$

Формулы (230), (232), (233) задают уравнение Зайцева–Фейнмана–Гелл-Мана для частицы с произвольным спином. Решения $\Phi(t,\boldsymbol{x})$ этого уравнения описывают причинное распространение волн с досветовой скоростью [12]. Таковы же, очевидно, свойства решений $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ уравнений (222), (223) и (224), (225), связанных с $\Phi(t,\boldsymbol{x})$ преобразованием эквивалентности (226).

К этому результату можно прийти и другим путем, воспользовавшись критерием Вайтмана [25]. Умножая (224) на $(\Gamma_\mu \pi^\mu + m)$ получаем уравнение

$$(p_\mu p^\mu + B)\Psi(t,\boldsymbol{x}) = 0, \tag{234}$$

где B — дифференциальный оператор, содержащий производные не выше первого порядка и равный в отсутствие взаимодействия $-m^2$. Как показано в работе [25], это означает, что $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ описывает распространение волн с досветовой скоростью.

Таким образом, приходим к выводу: уравнения (224), (225) описывают движение заряженной релятивистской частицы с произвольным спином во внешнем электромагнитном поле и не приводят к парадоксам с нарушением причинности.

Отметим еще, что уравнения (95), (96) можно получить из принципа минимального действия, если плотность лагранжиана $L(x)$ выбрать в виде

$$\begin{aligned} L(x) = \left(m\bar{\Psi}' + i\frac{\partial\bar{\Psi}'}{\partial x_\mu}\check{\Gamma}_\mu\right)\left(1 + \check{\Gamma}_4^{(s)}\right) \times \\ \times \left[\check{S}_{\mu\nu}\check{S}^{\mu\nu} - 4s(s-1)\right] i\hat{\Gamma}_\lambda \frac{\partial\Psi'}{\partial x_\lambda} + 16m^2 s\bar{\Psi}'\Psi', \end{aligned} \tag{235}$$

где Ψ', $\bar{\Psi}'$ — компонентная волновая функция:

$$\Psi' = \begin{pmatrix} \Psi \\ \chi \end{pmatrix}, \qquad \bar{\Psi}' = \Psi' i\hat{\Gamma}_0^{(s)}\hat{\Gamma}_5^{(s)}, \tag{236}$$

$\check{\Gamma}_\mu^{(s)}$, $\check{S}_{\mu\nu}$ — матрицы размерности $16s \times 16s$:

$$\begin{aligned} &\check{\Gamma}_k^{(s)} = \begin{pmatrix} \Gamma_k^{(s)} & 0 \\ 0 & \Gamma_k^{(s)} \end{pmatrix}, \quad k = 1,2,3,4, \qquad \check{\Gamma}_0^{(s)} = \begin{pmatrix} \Gamma_0^{(s)} & 0 \\ 0 & -\Gamma_0^{(s)} \end{pmatrix}, \\ &\check{\Gamma}_5^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_0^{(s)} \\ \Gamma_0^{(s)} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \check{S}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} S_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & S_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{237}$$

При этом для функции $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ получаем уравнения (95), (96), а для $\chi(t,\boldsymbol{x})$ — уравнения, комплексно-сопряженные с (95), (96). Сделав в (235) минимальную замену $-i\partial/\partial x_\mu \to -i\partial/\partial x_\mu - eA_\mu$, придем к уравнениям (224), (225). Таким образом, уравнения (224), (225) допускают лагранжеву формулировку.

Замечание. Можно показать, что уравнения (93)–(96) инвариантны относительно операции зарядового сопряжения C, но не инвариантны относительно обращения времени T и отражения пространственных координат P. P-, C-, T-инвариантные уравнения для частиц произвольного спина можно получить из (95), (96) удвоением числа компонент и заменой $\Gamma_\mu^{(s)} \to \check{\Gamma}_\mu^{(s)}$ согласно (237).

Разложение по степеням $1/m$

Гамильтониан $H_s(\boldsymbol{\pi}, \pi_0)$ (222) может иметь положительные и отрицательные собственные значения. С помощью серии последовательных приближенных преобразований, подобных (204)–(213), получим из (222), (223) уравнение для состояний с положительной энергией. При этом гамильтониан частицы произвольного спина будет представлен в виде ряда по степеням $1/m$, удобном для вычислений по теории возмущений.

Основная трудность при диагонализации уравнений (222), (223) состоит в том, что необходимо найти преобразования, одновременно приводящие к диагональной форме два различных уравнения. Сначала диагонализуем дополнительное условие (223), а затем, используя операторы, коммутирующие с преобразованным уравнением (221), приведем к диагональной форме уравнение (222).

Подвергнем волновую функцию $\Psi(t, \boldsymbol{x})$ из (222), (223) преобразованию

$$\Psi \to \Psi'' = V\Psi, \tag{238}$$

где V — обратимый оператор:

$$\begin{aligned} V &= 1 + \frac{1}{2m}\left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right)\left(\Gamma_a^{(s)}\pi_a - \Gamma_0^{(s)} S_a \pi_a k_1\right), \\ V^{-1} &= 1 - \frac{1}{2m}\left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right)\left(\Gamma_a^{(s)}\pi_a - \Gamma_0^{(s)} S_a \pi_a k_1\right). \end{aligned} \tag{239}$$

Подействовав оператором (239) слева на (220), (221), получим уравнения для Ψ'':

$$\begin{aligned} &H_s(\boldsymbol{\pi}, A_0)\Psi'' = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi'', \\ &H_s(\boldsymbol{\pi}, A_0) = \Gamma_0^{(s)} m + k_1 \Gamma_4^{(s)}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}) + \\ &\quad + \Gamma_0^{(s)}\left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right)\frac{1}{2m}\left\{\boldsymbol{\pi}^2 - k_1^2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - \frac{1}{s}\boldsymbol{S}\cdot[\boldsymbol{H} - i(1 - k_1 s)\boldsymbol{E}]\right\} + eA_0, \end{aligned} \tag{240}$$

$$P_s\Psi'' = \Psi'' \qquad \text{или} \qquad \frac{1}{2}S_{ab}^2\Psi'' = s(s+1)\Psi'', \tag{241}$$

где $H_a = -i[\pi_b, \pi_c]_-$ и $E_a = -i[\pi_0, \pi_a]_-$ — напряженности магнитного и электрического полей; P_s — проектор, определенный в (92).

Из (241), (84), (85) заключаем, что, не умаляя общности, можно считать, что волновая функция Ψ'' имеет $2(2s+1)$ отличных от нуля компонент. Матрицы S_{ab} и коммутирующие с ними матрицы $\Gamma_0^{(s)}$, $\Gamma_4^{(s)}$ на множестве таких функций всегда можно выбрать в виде

$$S_{ab} = \begin{pmatrix} S_c & 0 \\ 0 & S_c \end{pmatrix}, \quad \Gamma_0^{(s)} = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_4^{(s)} = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{242}$$

где S_c — матрицы, образующие представление $D(s)$ алгебры $O(3)$; 1 и 0 — $(2s+1)$-рядные единичная и нулевая матрицы. Подставляя (242) в (240), получаем гамильтониан $H_s(\boldsymbol{\pi}, A_0)$ в виде

$$\begin{aligned} H_s(\boldsymbol{\pi}, A_0) &= \sigma_1 m + k_1\sigma_3 \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi} + \\ &+ \frac{1}{2m}(\sigma_1 - i\sigma_2)\left\{\boldsymbol{\pi}^2 - k_1^2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - \frac{1}{s}e\boldsymbol{S}\cdot[\boldsymbol{H} - i(1-k_1 s)\boldsymbol{E}]\right\} + eA_0. \end{aligned} \tag{243}$$

Формула (243) обобщает гамильтониан свободной частицы произвольного спина (60) при взаимодействии с внешним электромагнитным полем. Таким образом, используя явно ковариантные уравнения (224), (225), получили рецепт введения взаимодействия в дифференциальные пуанкаре-инвариантные уравнения без лишних компонент, найденные выше.

Задача о диагонализации системы (222), (223) сводится теперь к преобразованию гамильтониана (246) к диагональной форме. Как и для уравнения Дирака [64], такое преобразование можно осуществить только приближенно, для $\pi_\mu \ll m$. Используя для этой цели серию последовательных преобразований

$$H_s(\boldsymbol{\pi}, A_0) \to V_3V_2V_1H_s(\boldsymbol{\pi}, A_0)V_1^{-1}V_2^{-1}V_3^{-1} = H_s'(\boldsymbol{\pi}, A_0), \tag{244}$$

где

$$\begin{aligned} V_1 &= \exp\left\{-i\sigma_2\frac{k_1\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}\right), \\ V_2 &= \exp\left\{\sigma_3\frac{1}{4m^2}\left[\boldsymbol{\pi}^2 - k_1^2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - e\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}}{s} + ie\left(\frac{1}{s}-k\right)\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}\right]\right\}, \\ V_3 &= \exp\left\{-i\frac{\sigma_3}{m^3}\left[\frac{1}{12}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^3 + \right.\right. \\ &\left.\left. + \frac{1}{8}\left[\boldsymbol{\pi}^2 - k_1(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - \frac{e\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}}{s} + ie\left(\frac{1}{s}-k_1\right)\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}, \pi_0\right]_-\right]\right\}, \end{aligned} \tag{245}$$

и пренебрегая членами порядка $1/m^3$, получаем

$$\begin{aligned} H_s'(\boldsymbol{\pi}, A_0) &= \sigma_1\left(m + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - e\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}}{2sm}\right) + A_0 - \frac{e}{16m^2s^2}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{E}) - \\ &- \frac{e}{24m^2s^2}\left[\frac{1}{2}Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b} + s(s+1)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}\right] + \\ &+ \frac{i(2s-1)e}{8m^2s^2}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H}) + \frac{e}{24m^2s^2}Q_{ab}\frac{\partial H_a}{\partial x_b}, \end{aligned} \tag{246}$$

здесь Q_{ab} — тензор квадрупольного взаимодействия, определенный в (214).

Приближенный гамильтониан (246) в точности совпадает с полученным в работе [74], в которой в качестве исходного использовалось уравнение Зайцева–Фейнмана–Гелл-Мана (233) для произвольного спина. Для $s = 1/2$ (246) совпадает с гамильтонианом (210), являющимся нерелятивистским пределом гамильтониана Дирака для электрона [64]. Если же $s \neq 1/2$, то операторы (246) и (210) не совпадают. Следовательно, уравнения (42), (1) и (93), (94), будучи математически эквивалентными в случае свободных частиц, после введения взаимодействия приводят к различным физическим результатам. Так, согласно (213), дипольный момент частицы произвольного спина μ_s (коэффициент при $e\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}/2m$) равен 2, а из (246) получаем $\mu_s = 1/s$.

Релятивистская частица с произвольным спином в однородном магнитном поле

Рассмотрим систему уравнений (222), (223) для частицы в однородном магнитном поле. Не умаляя общности, можно считать, что вектор напряженности этого поля $\boldsymbol{H}$ параллелен третьей проекции импульса частицы p_3. Это означает, что компоненты тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ равны

$$F_{0a} = E_a = 0, \qquad F_{23} = H_1 = 0, \qquad F_{31} = H_2 = 0, \qquad F_{12} = H_3 = H. \tag{247}$$

Из (98) следует, что π_μ, можно выбрать в виде

$$\pi_1 = p_1 - eHx_2, \qquad \pi_2 = p_2, \qquad \pi_3 = p_3, \qquad \pi_0 = i\partial/\partial t. \tag{248}$$

Подставив (247), (248) в (220), (221), придем к уравнениям:

$$\begin{gathered} H_s(\boldsymbol{\pi})\Psi = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi, \\ H_s(\boldsymbol{\pi}) = \Gamma_0^{(s)}\Gamma_a^{(s)}\pi_a + \Gamma_0^{(s)}m + \frac{e\Gamma_0^{(s)}}{2m}\left(1-\Gamma_4^{(s)}\right)\left(i\Gamma_1^{(s)}\Gamma_2^{(s)} - \frac{1}{s}S_{12}\right)H, \end{gathered} \tag{249}$$

$$\left\{P_s + \frac{1}{2m}\left(1-\Gamma_4^{(s)}\right)[\Gamma_\mu\pi^\mu, P_s]_-\right\}\Psi \equiv \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi})\Psi = \Psi. \tag{250}$$

Преобразуем $H_s(\boldsymbol{\pi})$ к такому виду, чтобы он содержал только коммутирующие величины. Это позволит нам, не решая уравнений движения (249), (250), определить спектр собственных значений гамильтониана (249).

Подвергнем волновую функцию Ψ, гамильтониан $H_s(\boldsymbol{\pi})$ и проектор $\hat{P}_s(\boldsymbol{\pi})$ преобразованию

$$\begin{gathered} \Psi \to \Psi' = V\Psi, \qquad H_s(\boldsymbol{\pi}) \to H_s'(\boldsymbol{\pi}) = VH_s(\boldsymbol{\pi})V^{-1}, \\ \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi}) \to \hat{P}_s'(\boldsymbol{\pi}) = V\hat{P}_s(\boldsymbol{\pi})V^{-1}, \end{gathered} \tag{251}$$

где

$$V = \lambda^- + \frac{1}{\hat{\varepsilon}}\lambda^+\Gamma_0^{(s)}H_s(\boldsymbol{\pi}), \qquad V^{-1} = \frac{1}{m}\left(\lambda^+\hat{\varepsilon} + H_s(\boldsymbol{\pi})\lambda^+\Gamma_0^{(s)}\right),$$

$$\hat{\varepsilon} = \left(\boldsymbol{\pi}^2 - eS_{12}H/s + m^2\right), \qquad \lambda^{\pm} = \left(1 \pm \Gamma_4^{(s)}\right)/2.$$

Используя тождества

$$\lambda^-\Gamma_\mu^{(s)} \equiv \Gamma_\mu^{(s)}\lambda^+, \qquad (\lambda^\pm)^2 \equiv \lambda^\pm, \qquad \lambda^+\lambda^- \equiv 0, \tag{252}$$

получаем

$$H_s'(\boldsymbol{\pi}) = \Gamma_0^{(s)}\left(\pi^2 + m^2 - eS_{12}H/s\right)^{1/2}, \tag{253}$$

$$P_s\Psi' = \Psi' \qquad \text{или} \qquad \frac{1}{2}S_{ab}^2\Psi' = s(s+1)\Psi'. \tag{254}$$

Все операторы, входящие в определение (253) гамильтониана $H'_s(\boldsymbol{\pi})$, коммутируют друг с другом и имеют такие собственные значения:

$$\Gamma_0^{(s)}\Psi' = \varepsilon\Psi', \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

$$S_{12}H\Psi' = s_3 H\Psi', \qquad s_3 = -s, -s+1, \ldots, s, \tag{255}$$

$$\boldsymbol{\pi}^2\Psi' = \left[(2n+1)H + p_3^2\right]\Psi', \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{256}$$

Формулы (255) следуют непосредственно из (254), а соотношение (256) приведено, например, в монографии [75].

Квадрат гамильтониана (253) и операторы (255), (256) имеют общую систему собственных функций $\Psi'_{\varepsilon n s_3 p_3}$. Отсюда заключаем, что собственные значения гамильтониана (253) равны

$$E_{\varepsilon n s_3 p_3} = \varepsilon\left[m^2 + \left(2n + 1 - \frac{s_3}{s}\right)eH + p_3^2\right]^{1/2}. \tag{257}$$

Соотношение (257) обобщает известную формулу [75] для уровней энергии электрона в однородном магнитном поле для частицы с произвольным спином. Как видно из (257), значения энергии такой частицы действительны при любых значениях s, в то время как уравнения Рариты–Швингера при решении аналогичной задачи приводят к комплексным значениям энергии [24].

Приведем для полноты явный вид собственных функций $\Psi_{\varepsilon n s_3 p_3}$. Выбирая матрицы $\Gamma_\mu^{(s)}$, S_{ab} в виде

$$\Gamma_0^{(s)} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_4^{(s)} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & -\hat{1} \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_a^{(s)} = \begin{pmatrix} \hat{0} & -\tau_a \\ \tau_a & \hat{0} \end{pmatrix},$$
$$S_{ab} = \begin{pmatrix} \hat{S}_{ab} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{S}_{ab} \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{ab} = \begin{pmatrix} \hat{S}_{ab}^{(1)} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{S}_{ab}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \tau_a = (\varepsilon_{abc}\hat{S}_{bc}/2 - S_{4a})/2, \tag{258}$$

где $\hat{1}$ и $\hat{0}$ — $4s$-рядные единичная и нулевая матрицы; $\hat{S}_{ab}$, $\hat{S}_{4a}$ — матрицы из представления $\mathcal{D}(s-1/2, 1/2)$ алгебры $O(4)$; $\hat{S}_{ab}^{(1)}$ и $\hat{S}_{ab}^{(2)}$ — матрицы, реализующие представления $\mathcal{D}(s)$ и $\mathcal{D}(s-1)$ алгебры $O(3)$ соответственно, получаем

$$\Psi'_{\varepsilon n s_3 p_3} = \begin{pmatrix} \Psi_{s_3} \\ \tilde{0} \\ \varepsilon\Psi_{s_3} \\ \tilde{0} \end{pmatrix}\Psi_{n p_3}, \tag{259}$$

где Ψ_{s_3} — $(2s+1)$-компонентная собственная функция оператора S_{12}, который всегда можно выбрать в диагональной форме:

$$\Psi_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Psi_{s-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \Psi_{-s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{260}$$

$\tilde{0}$ — $(2s-1)$-рядные нулевые столбцы и

$$\Psi_{np_3} = \exp(ip_1x_1 + ip_3x_3)\exp\left[-\frac{H}{2}\left(x_2 + \frac{p_1}{H}\right)^2\right] H_n\left[\sqrt{H}\left(x_2 + \frac{p_1}{H}\right)\right], \quad (261)$$

H_n — полиномы Эрмита. Явный вид собственных функций исходного гамильтониана (249) можно получить из (259)–(261) с помощью преобразования, обратного (251).

Четырехкомпонентное уравнение для бесспиновых частиц

В работах [37, 45, 55] неоднократно подчеркивалось, что для однозначного ответа на вопрос, какую частицу описывает данное релятивистское уравнение, необходимо знать явный вид генераторов представления группы $P(1,3)$, которое реализуется в пространстве его решений. Если на множестве решений заданного уравнения можно определить различные представления группы Пуанкаре, то такое уравнение в принципе пригодно для описания движения различных частиц.

В [45] показано, что обычное четырехкомпонентное уравнение Дирака с дополнительным пуанкаре-инвариантным условием в отсутствие взаимодействия можно интерпретировать как уравнение для частиц со спином $s = 0$. Однако хорошо известно, что после введения минимального взаимодействия это уравнение описывает движение частицы со спином $s = 1/2$ во внешнем электромагнитном поле. Покажем, что взаимодействие можно ввести в уравнение Дирака таким образом, что оно будет допускать интерпретацию как уравнение для бесспиновой заряженной частицы во внешнем поле. Рассмотрим уравнение

$$[\gamma_\mu\pi^\mu - m + (1+\gamma_4)iek\gamma_\mu\gamma_\nu F_{\mu\nu}/4m]\,\Psi = 0, \quad (262)$$

где γ_μ — четырехрядные матрицы Дирака; $\pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$; A_μ — 4-вектор-потенциал; $F^{\mu\nu}$ — тензор напряженности электромагнитного поля; k — произвольная константа.

Уравнение (262) явно ковариантно и в случае $k = 0$ совпадает с уравнением Дирака для электрона, взаимодействующего с внешним электромагнитным полем. Слагаемое $(1+\gamma_4)iek\gamma_\mu\gamma_\nu F^{\mu\nu}/2m$ можно интерпретировать как вклад от аномального взаимодействия типа Паули.

Покажем, что при $k = 1$ уравнение (262) можно использовать для описания движения бесспиновой заряженной частицы. Для этого сначала умножим (262) на γ_0 и получим уравнение в форме Шредингера

$$\begin{gathered} H\Psi = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi, \\ H = \gamma_0\gamma_a\pi_a + \gamma_0 m + eA_0 - \gamma_0(1+\gamma_4)ie\gamma_\mu\gamma_\nu F^{\mu\nu}/4m. \end{gathered} \quad (263)$$

Подвергая волновую функцию Ψ и гамильтониан H изометрическому преобразованию

$$\begin{gathered} \Psi \to \Psi' = V\Psi, \qquad H \to H' = VHV^{-1} - iV^{-1}\partial V/\partial t, \\ V = \exp[(1-\gamma_4)\gamma_a\pi_a/2m] = 1 + (1-\gamma_4)\gamma_a\pi_a/2m, \end{gathered} \quad (264)$$

получаем

$$H' = \gamma_0 m + \gamma_0(1+\gamma_4)\pi^2/2m + eA_0. \quad (265)$$

Выбрав матрицы γ_0 и γ_4 в виде

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_4 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 \end{pmatrix}, \tag{266}$$

где σ_3 и σ_1 — двухрядные матрицы Паули, запишем гамильтониан H' в форме

$$H' = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix}, \qquad H_\pm = \sigma_3 m + (\sigma_3 \pm i\sigma_2)\frac{\pi^2}{2m} + eA_0. \tag{267}$$

Обозначив $\Psi' = V\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix}$, где $\Psi_\pm$ — двухкомпонентные функции, получаем для Ψ_+, Ψ_- два незацепляющихся уравнения:

$$\left[\sigma_3 m + (\sigma_3 \pm i\sigma_2)\frac{\pi^2}{2m} + eA_0\right]\Psi_\pm = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi_\pm, \tag{268}$$

совпадающие с уравнениями ТСТ [49, 50] для бесспиновой заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.

Результат этот, который на первый взгляд кажется несколько неожиданным, на самом деле является следствием того, что уравнение (262) (где $k = 1$) можно получить введением минимального взаимодействия в уравнение Дирака с пуанкаре-инвариантным дополнительным условием

$$W_\mu W^\mu \Psi = m^2 s(s+1)\Psi, \qquad s = 0. \tag{269}$$

Таким образом, только уравнение движения совместно с дополнительным условием (269) позволяет однозначно определить спин и массу описываемой частицы.

Авторы благодарны С.П. Онуфрийчуку, В.А. Салогубу и Ю.Н. Сегеде за обсуждение результатов, вошедших в статью, и за помощь при оформлении работы.

1. Пуанкаре А., Избранные труды, Т. 3, М., Наука, 1974, С. 521.
2. Majorana E., *Nuovo cimento*, 1932, **9**, 335.
3. Corson E.M., Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave Equations, London, Blackie, 1953.
4. Bade W.L., Jehle H., *Revs. Mod. Phys.*, 1953, **25**, 714.
5. Гельфанд И.М., Минлос Р.В., Шапиро З.Я., Представления группы вращений и группы Лоренца и их применения, М., Физматгиз, 1958.
6. Наймарк М.А., Линейные представления группы Лоренца, М., Физматгиз, 1958.
7. Corben H., Classical and Quantum Theories of Spinning Particles, San Francisco, Holden-Day, 1968.
8. Takahashi Y., An Introduction to Field Quantization, N.Y., Pergamon Press, 1969.
9. Fradkin D.M., Good R.H., *Revs. Mod. Phys.*, 1964, **33**, 343.
10. Hurley W.J., Sudarshan E.C.L., *Ann. Phys.*, 1974, **85**, 546.
11. Santhanam T.S., Tekumalla A.R., *Fortshr. Phys.*, 1974, **22**, 431.
12. Hurley W.I., *Phys. Rev. D*, 1974, **10**, 1185.
13. Niederer U.H., Raifertaigh O., *Fortshcr. Phys.*, 1974, **22**, 131.
14. Joos H., *Fortschr. Phys*, 1962, **10**, 65.
15. Weinberg S., *Phys. Rev.*, 1969, **181**, 1893.
16. Krajcik R.A., Nieto M.M., **Phys. Rev. D**, 1974, **10**, 4049; 1975, **11**, 1442; 1976, **13**, 2250.

17. Гинзбург В.Л., Манько В.И., *ЭЧАЯ*, 1976, **7**, вып. 1, 3.
18. Foldy L.L., *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 568.
19. Wigner E., *Ann. Math.*, 1939, **40**, 39.
20. Широков Ю.М., *ЖЭТФ*, 1957, **33**, 861; 1957, **33**, 1196.
21. Jonson K., Sudarshan E.C.L., *Ann. Phys.*, 1961, **13**, 126.
22. Velo G., Zwanzinger D., *Phys. Rev.*, 1969, **186**, 1337; 1969, **188**, 2218.
23. Tsai V., *Phys. Rev. D*, 1973, **7**, 1945.
24. Seetharaman M., Prabhakaran J., Mathews P.M., *Phys. Rev. D*, 1975, **12**, 458.
25. Wightman A.S., In: Partial Differential Equations. Ed. D.C. Spencer, V.23, Providence, 1974, P. 44.
26. Pereira J., *Intern. J. Theor. Phys.*, 1972, **5**, 447.
27. Schroer B., Seiler R., Swieca J.A., *Phys. Rev. D*, 1970, **2**, 2927.
28. Weaver D.L., Hammer C.L., Hood R.H., *Phys. Rev.*, 1964, **135**, 241.
29. Williams S.A., Driver I.P., Weber T.A., *Phys. Rev.*, 1966, **152**, 1207.
30. Mathews P.M., *Phys. Rev.*, 1966, **143**, 978, 985.
31. Mathews P.M., *Phys. Rev.*, 1967, **155**, 1415.
32. Mathews P.M., Ramankrishnan S., *Nuovo Cimento*, 1967, **50**, 339.
33. Seetharaman M., Jayaraman J., Mathews P.M., *J. Math. Phys.*, 1971, **12**, 1620.
34. Seetharaman M., Mathews P.M., *J. Math. Phys.*, 1972, **13**, 938.
35. Jayaraman J., *Nuovo Cimento A*, 1973, **14**, 343.
36. Fushchych W.I., Grishchenko A.L., Nikitin A.G., Preprint ITF-70-89E, Kiev, 1970.
37. Фущич В.И., Грищенко А.Л., Никитин А.Г., *ТМФ*, 1971, **8**, 192.
38. Никитин А.Г., *УФЖ*, 1973, **18**, 1605; 1974, **19**, 1000.
39. Fushchych W.I. Nikitin A.G., *Rep. Math. Phys.*, 1975, **8**, 33; Preprint ITF-73-121E, Kiev, 1973.
40. Фущич В.И., Никитин А.Г., Дифференциальные уравнения движения первого и второго порядка для частиц с произвольным спином, Киев, Изд-во ин-та мат. АН УССР, 1977.
41. Никитин А.Г., Фущич В.И., *ТМФ*, 1978, **34**, 319.
42. Kolsrud M., *Physica Norvegica*, 1971, **5**, 169.
43. Guertin R.F., *Ann. Phys.*, 1974, **88**, 504; 1975, **91**, 386.
44. Guertin R.F., Spin-1/2 Equation with Indefinite Metric, Preprint Rice University, Houston, 1975.
45. Fushchych W.I., *Nucl. Phys. B*, 1970, **21**, 321; *ТМФ*, 1971, **9**, 91.
46. Fushchych W.I., Grishchenko A.L., *Lett. Nuovo Cimento*, 1970, **4**, 927; Preprint ITF-70-88E, Kiev, 1970.
47. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cimento*, 1973, **7**, 439.
48. Никитин А.Г., Грищенко А.Л., *УФЖ*, 1974, **19**, 1666.
49. Тамм И.Е., *Докл. АН СССР*, 1940, **29**, 551.
50. Takelani M., Sakata S., *Proc. Phys. Math. Soc. (Japan)*, 1940, **22**, 757.
51. Nelson T.J., Good R.H., *Phys. Rev.*, 1969, **179**, 1445.
52. Simon M.T., *Lett. Nuovo Cimento*, 1971, **2**, 99.
53. Sahthanam T.S., Tekumalla A.R., *Lett. Nuovo Cimento*, 1972, **3**, 1060; 1973, **6**, 99.
54. Seetharaman M., Simon M.T., Mathews P.M., *Nuovo Cimento A*, 1972, **12**, 788.
55. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1968, **7**, 79; Препринт ИТФ-68-72, Киев, 1968.
56. Кривский И.Ю., Романко Г.Д., Фущич В.И., **ТМФ**, 1969, **1**, 242.
57. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1975, **14**, 436.

58. Fushchych W.I. Nikitin A.G., Salogub V.A., *Lett. Nuovo Cimento*, 1975, **14**, 483; *Rep. Math. Phys.*, 1977, 385.
59. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cimento*, 1976, **16**, 81.
60. Bludman S.A., *Phys. Rev.*, 1957, **107**, 1163.
61. Lomont J.S., Moses H.E., *Phys. Rev.*, 1960, **118**, 337.
62. Dowker I.S., *Proc. Roy. Soc. A*, 1967, **293**, 351.
63. Newton T.D., Wigner E.P., *Revs. Mod. Phys.*, 1949, **21**, 400; см. также [69], с. 69.
64. Foldy L.L., Wouthuysen S.A., *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 29.
65. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **11**, 508.
66. Фущич В.И., *Докл. АН СССР*, 1976, **230**, 570.
67. Фущич В.И. В сб.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний, посвященном 60-летию акад. Ю.А. Митропольского, Киев, Наукова думка, 1977.
68. Фущич В.И., *ТМФ*, 1971, **7**, 3.
69. Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963. С. 114.
70. Lomont I.S., *Phys. Rev.*, 1958, **111**, 1710.
71. Moses H.E., *Nuovo Cimento Suppl.*, 1958, **7**, 1.
72. Garrido L.M., Oliver L., *Nuovo Cimento A*, 1967, **52**, 588.
73. Wightman A.S., In: Symmetry Principles at High Energies, Ed. A. Perlmutter e.a. N.Y., Benjamin, 1968.
74. James K.R., *Proc. Phys. Soc. (London)*, 1968, **1**, 334.
75. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б., Квантовая электродинамика, М., Наука, 1969, С. 142.
76. Amundsen P.A., *Physika Norvegica*, 1975, **8**, 107.
77. Зайцев Г.А., *ЖЭТФ*, 1955, **28**, 524; *ДАН СССР*, 1957, **113**, 1248;
Feynman R.P., Gell-Mann M., *Phys. Rev.*, 1958, **109**, 193.