О группе инвариантности квази-релятивистского уравнения движения

В.И. ФУЩИЧ, А.Г. НИКИТИН

В работе [1] была поставлена задача о нахождении группы инвариантности дифференицального уравнения в частных производных четвертого порядка

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,\boldsymbol{x}) = H(p)\Psi(t,\boldsymbol{x}), \qquad H(p) = a_0 + \frac{a_2}{2}p^2 + \frac{a_4}{8}p^4, \tag{1}$$

где a_1, a_2, a_4 — постоянные коэффициенты,

$$p^2 = p_a^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, \qquad p^4 = (p_a^2)^2, \qquad p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}.$$

Уравнение (1) является естественным обобщением уравнения Шредингера для свободной частицы (совпадая с последним при $a_2 = a_4 = 0$), частично учитывающим релятивистские эффекты. Нетрудно убедиться, что это уравнение не инвариантно ни относительно группы Галилея, ни относительно группы Лоренца.

В настоящей статье установлена двадцатипараметрическая группа Ли, допускаемая уравнением (1); найден явный вид преобразований волновой функции $\Psi(t,\boldsymbol{x})$, оставляющих (1) инвариантным; выведена формула, устанавливающая зависимость массы частицы от ее скорости; предложено уравнение движения для частицы с произвольным спином, инвариантное относительно найденной группы.

Обозначим через $\{Q_A\}$ базисные элементы алгебры Ли некоторой группы G. Уравнение (1) инвариантно относительно группы G, если выполняются условия [2]

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - H(p), Q_A\right]_- \Psi(t,\boldsymbol{x}) = 0 \tag{2}$$

для всех $Q_A \in \{Q_A\}$, $\{A\}$ — некоторое множество индексов.

Теорема. *Уравнение (1) инвариантно относительно 20-мерной алгебры Ли, базисные элементы которой задаются операторами*

$$\begin{gathered}
P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad I, \\
J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, \quad a,b = 1,2,3, \qquad G_a = tV_a - x_a, \\
V_a = i[H(p), x_a]_- = p_a\left(a_2 + \frac{1}{2}a_4 p^2\right), \qquad P_{ab} = -a_4\left(p_a p_b + \frac{1}{2}\delta_{ab}p^2\right),
\end{gathered} \tag{3}$$

где I — единичный оператор.

Доказательство. Воспользовавшись тождествами

$$[H(p), V_a]_- = \left[i\frac{\partial}{\partial t}, x_b\right]_- = 0,$$

Доклады Академии наук СССР, 1978, **238**, № 1, С. 46–49.

непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что все операторы (3) удовлетворяют условию (2). Операторы P_0, P_a, P_{ab}, V_a, I коммутируют между собой и совместно с операторами J_{ab}, G_a удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$
\begin{gathered}
[J_{ab}, J_{cd}]_- = i(\delta_{ac}J_{bd} + \delta_{bd}J_{ac} - \delta_{ad}J_{bc} - \delta_{bc}J_{ad}), \qquad [J_{ab}, P_0]_- = 0, \\
[J_{ab}, G_c]_- = i(\delta_{ac}G_b - \delta_{bc}G_a), \qquad [P_a, G_b]_- = i\delta_{ab}I, \qquad [G_a, G_b]_- = 0, \\
[J_{ab}, P_c]_- = i(\delta_{ac}P_b - \delta_{bc}P_a), \qquad [V_a, G_b]_- = i(P_{ab} - \delta_{ab}a_2 I), \\
[P_0, G_a]_- = iV_a, \qquad [J_{ab}, P_{cd}]_- = i(\delta_{ac}P_{bd} + \delta_{bd}P_{ac} - \delta_{bc}P_{ad} - \delta_{bd}P_{ac}), \\
[J_{ab}, V_c]_- = i(\delta_{ac}V_b - \delta_{bc}V_a), \qquad [G_a, P_{bc}]_- = ia_4(\delta_{ab}P_c + \delta_{bc}P_a + \delta_{ac}P_b),
\end{gathered}
\tag{4}
$$

т.е. образуют алгебру Ли. Теорема доказана.

Подчеркнем, что генераторы (3) принадлежат классу дифференциальных операторов третьего порядка. Это означает, что найденная нами алгебра инвариантности уравнения (1) не может быть получена в классическом подходе Ли, в котором, как хорошо известно, Q_A задаются дифференциальными операторами первого порядка.

Используя явный вид (3) найденных операторов Q_A, $Q_A \supset P_0, P_a, P_{ab}, G_a, J_{ab}$, V_a, можно найти группу инвариантности уравнения (1), т.е. найти преобразования координат x_a импульса P_a и волновой функции $\Psi(t, \boldsymbol{x})$, оставляющие (1) инвариантным. Не вдаваясь в детали довольно громоздких вычислений, приведем окончательный результат:

$$
P_a \to P'_a = W P_a W^{-1} = R_{ab}P_b + u_a, \tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
x_a \to x'_a = W x_a W^{-1} = R_{ab}x_b + (V'_a - R_{ab}V_b)t - \\
- b_a - a_2\lambda_a + R_{ab}R_{cd}R_{bd}\lambda_c - a_4(R_{ab}P_b\lambda_{cc} + 2\lambda_{ab}R_{bc}P_c),
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
V_a \to V'_a = W V_a W^{-1} = R_{ab}V_b - R_{ac}R_{bd}R_{cd}u_b + \\
+ a_2 u_a + \frac{1}{2}a_4\left[R_{ab}P_b u_c^2 + 2u_a R_{bc}P_c u_b + u_a u_c^2\right],
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Psi(t, x_a) \to \Psi'(t, x_a) = W\Psi(t, x_a) = \exp[if(t, \boldsymbol{x})] \times \\
&\times \exp\left[iR_{ab}R_{cd}P_{bd}\left(\frac{1}{2}tu_a u_c + u_a\lambda_c + \lambda_{ac}\right)\right] \times \\
&\times \exp[iR_{ab}V_b(tu_a + \lambda_a) - ia_2R_{ab}P_b u_a] \times \\
&\times \Psi\Bigg(t - a, R_{ab}x_b - b_a - ta_2u_a - \\
&- a_4\left[\frac{1}{2}tu_a u_c^2 + u_a\lambda_{bb} + 2\lambda_{ab}u_b + u_a u_b\lambda_b + \frac{1}{2}\lambda_a u_c^2\right]\Bigg),
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
W = \exp\left(\frac{i}{2}J_{ab}\theta_{ab}\right) \cdot \exp(iP_{ab}\lambda_{ab}) \times \\
\times \exp(iV_a\lambda_a) \cdot \exp(iG_a u_a) \cdot \exp(iP_a b_a - iP_0 a),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где θ_{ab}, λ_{ab}, u_a, b_a, a — произвольные действительные параметры преобразования, R_{ab} — оператор трехмерного поворота,

$$R_{ab} = \delta_{ab} + i\frac{\theta_{ab}}{\theta}\sin\theta + \frac{\theta_{ac}\theta_{cb}}{\theta^2}(\cos\theta - 1), \qquad \theta = \left(\frac{1}{2}\theta_{ab}^2\right)^{1/2},$$

$f(t, \boldsymbol{x})$ — фазовый множитель

$$f(t, \boldsymbol{x}) = -x_a u_a - \frac{1}{2}a_2 t u_a^2 - \frac{1}{8}a_4 t (u_a^2)^2 + C,$$

C — произвольная постоянная.

Для волновой функции в импульсном пространстве получаем из (9) закон преобразования в виде

$$\begin{gathered}\Phi'(k, \omega) = \int d^3x\, dt\, \exp(i\omega t - ik_b x_b)\Psi'(t, \boldsymbol{x}) = \\ = \exp(ik'_a b_a - i\omega'_a + iC)\Phi(k', \omega'),\end{gathered} \tag{10}$$

где

$$k'_a = R_{ab}k_b + u_a, \qquad \omega' = \frac{1}{2}a_2(k'_a)^2 + \frac{1}{8}a_4[(k'_a)^2]^2. \tag{11}$$

Формулы (5)–(11) при $\lambda_a = \lambda_{ab} = a_4 = 0$, $a_2 = (2m)^{-1}$, $u_a = mv_a$ задают преобразование Галилея, а в случае произвольных λ_a, λ_{ab}, a_2, a_4 могут рассматриваться как определенные обобщения этого преобразования. Существенное отличие преобразований (5)–(11) от преобразований Галилея состоит в том, что оператор x'_a выражается не только через оператор x_a и соответствующие параметры преобразования, но также и через оператор скорости частицы V_a. Формулы (5), (6), (8), (10) указывают на явную несимметрию между импульсным и координатным пространством.

Приведем пример уравнения, инвариантного относительно алгебры (4) и описывающего движение частицы с произвольным спином. Это уравнение имеет вид

$$\begin{gathered}i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t, \boldsymbol{x}) = H(s, p)\Psi(t, \boldsymbol{x}), \\ H(s, p) = \sigma_1 a_0 + 2\sigma_3 Sp - (\sigma_1 - i\sigma_2)(a_0)^{-1}2(Sp)^2 + \frac{a_2}{2}p^2 + \frac{a_4}{8}p^4,\end{gathered} \tag{12}$$

где $\Psi(t, \boldsymbol{x})$ есть $2(2s+1)$-компонентная функция, $S_a = \begin{pmatrix} s_a & 0 \\ 0 & s_a \end{pmatrix}$, s_a — матрицы, реализующие неприводимое представление $D(s)$ алгебры $O(3)$, σ_a суть $2(2s+1)$-рядные матрицы Паули, коммутирующие с S_a. Операторы P_a, P_0, P_{ab}, J_{ab}, G_a, удовлетворяющие алгебре (4), на множестве решений уравнения (12) задаются формулами

$$P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab},$$

$$V_a = p_a\left(a_2 + \frac{1}{2}a_4 p^2\right), \qquad P_{ab} = -a_4\left(p_a p_b + \frac{1}{2}\delta_{ab}p^2\right),$$

$$G_a = tV_a - x_a + (\sigma_2 - i\sigma_1)(a_0)^{-1}S_a.$$

В заключение приведем формулы, устанавливающие связь между импульсом и скоростью частицы, описываемой уравнением (1) в случае $a_2a_4 > 0$. Из (3) имеем

$$V_a = a_2 p_a \left(1 + \frac{a_4}{2a_2} p^2\right).$$

Решая это кубическое уравнение относительно p_a, получаем

$$\begin{gathered} p_a = mV_a, \qquad m = m_0 \frac{3}{\mathcal{V}} \sin\left[\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\mathcal{V}}{\sqrt{1-\mathcal{V}^2}}\right], \\ m_0 = \frac{1}{a_2}, \qquad \mathcal{V} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}\sqrt{-\frac{a_4}{a_2^3}}V, \qquad V = (V_a^2)^{1/2}. \end{gathered} \tag{13}$$

Формула (13) дает зависимость массы частицы m от скорости.

Соотношения (13) определены для $1 - \mathcal{V}^2 > 0$, откуда заключаем, что скорость частицы в квантовой механике, базирующейся на уравнении (1), должна быть ограничена условием $V \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}\sqrt{-\frac{a_4}{a_2^3}}$ (в естественной системе единиц $\hbar = c = 1$).

Отметим, что полученные результаты обобщаются на случай дифференциальных уравнений вида (1) произвольного конечного порядка, когда

$$H(p) = \sum_{n=0}^{N} a_{2n} p^{2n}, \qquad N < \infty.$$

1. Фущич В.И., В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний, Киев, Наукова думка, 1977, 238–246.

2. Фущич В.И., *Теор. и мат. физ.*, 1971, **7**, № 1, 3–12; *ДАН*, 1976, **230**, № 3, 571–573; Никитин А.Г., Сегеда Ю.Н., Фущич В.И., *Теор. и мат. физ.*, 1976, **29**, № 1, 82–94.