О новом методе исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных

В.И. ФУЩИЧ

In this work there have been described in details a non-Lie method of the investigation of symmetry properties of the systems of partial differential equations. Conditions which are required for arbitrary system of differential equations to be invariant under the group $U(2)$ are found. Dual symmetry of the Dirac and Maxwell equations is established. These equations have shown to be invariant under the transformations that don't change a time.

Введение

Почти сто лет назад выдающийся норвежский математик Софус Ли создал теорию непрерывных групп. Он же предложил основные идеи и методы теоретико-группового анализа дифференциальных уравнений.

Не ставя перед собой задачи об исследовании групповых свойств дифференциальных уравнений, Г. Лоренц [1] и А. Пуанкаре [2] получили один из наиболее фундаментальных результатов в этой области, сыгравший революционизирующую роль в физике. Именно Г. Лоренц в 1904 г., не будучи знакомым с только что созданной теорией С. Ли, нашел преобразования, относительно которых уравнения Максвелла инвариантны в случае отсутствия зарядов и токов.

Пуанкаре [2, 3], обобщая и дополняя результаты Лоренца, показал, что уравнения Максвелла и в случае присутствия зарядов и токов инвариантны относительно тех же преобразований, если при этом плотности электрических зарядов и тока преобразуются соответствующим образом. Именно в этих статьях Пуанкаре впервые установил и детально изучил одно из самых важных свойств этих преобразований — групповую структуру, назвав эти преобразования именем Лоренца.

Из этого результата следуют все основные законы сохранения формулы релятивистской механики (правило сложения скоростей, формулы для энергии и импульса и т.д.). Здесь уместно подчеркнуть, что в работах Пуанкаре впервые был предложен теоретико-групповой подход для построения и анализа физической теории. В работах Лоренца, Пуанкаре, Эйнштейна построены основы новой механики и новой электродинамики[1].

Бейтмен [4] и Кунингам [5] в 1909 г. доказали, что уравнения Максвелла инвариантны относительно конформной группы C_4, содержащей в качестве подгруппы группу Лоренца. Совсем недавно было показано, что эта группа является максимальной группой инвариантности в смысле С. Ли. (О современном развитии идей и методов теории Ли см. книги Л.В. Овсянникова [6] и Н.Х. Ибрагимова [7] и цитируемую там литературу).

Теоретико-групповые методы в математической физике, Сб. науч. тр., Отв. ред. Ю.А. Митропольский, В.И. Фущич, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1978, С. 5–44.

[1]Принцип относительности, Сб. работ классиков релятивизма / Составитель А.А. Тяпкин. — М.: Атомиздат, 1973. — 480 с.

В работах [8, 9] для исследования групповых свойств дифференциальных уравнений релятивистской квантовой механики предложен нелиевский метод. С его помощью удалось обнаружить ранее неизвестную дополнительную $SU(2) \otimes SU(2)$ — группу инвариантности уравнений Максвелла (см. [10]). Этот метод получил дальнейшее развитие и применение в работах [11–23]. Во второй статье настоящего сборника результаты Бейтмана [4], Кунингама [5] и только что упомянутый результат [11] объединены и усилены, т.е. доказано, что группой инвариантности уравнения Максвелла является группа$C_4 \otimes GL(2) \otimes Gl(2)$.

Для дальнейшего важно сразу же указать на ограниченность метода С. Ли. Как известно, он основан на инфинитезимальном подходе, поэтому алгебра инвариантности того или иного дифференциального уравнения ищется только в классе операторов первого порядка. Из сказанного ясно, что для отыскания новых алгебр, а значит и новых групп, инвариантности уравнений, которые в принципе не могут быть найдены с помощью классического метода С. Ли, необходимо существенно расширить класс операторов первого порядка. На основе этой идеи и были получены новые результаты [8–22] для многих систем дифференциальных уравнений.

Данная работа является дальнейшим развитием и обобщением нелиевского подхода к системам дифференциальных уравнений, встречающихся в квантовой механике. В ней, в частности, доказана теорема, устанавливающая при каких условиях произвольная однородная система дифференциальных уравнений в частных производных инвариантна относительно группы $GL(2)$.

Большой интерес представляет также задача, в некотором смысле обратная к рассматриваемой в настоящей статье: описать все уравнения инвариантные относительно заданной группы. В списке литературы, начиная со ссылки [29] приведены некоторые работы, выполненные в Институте математики АН УССР, которые посвящены описанию дифференциальных и интегродифференциальных уравнений, инвариантных относительно групп движения релятивистской и нерелятивистской квантовой механики.

§ 1. Нелиевский метод

В этом параграфе сформулирован нелиевский алгоритм вычисления алгебр инвариантности для линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных.

1. Большинство уравнений математической физики имеет вид n уравнений с k неизвестными функциями $\Psi_1(x), \Psi_2(x), \ldots, \Psi_k(x)$. В приложениях, особенно в квантовой теории, часто встречаются однородные линейные системы первого н второго порядков, которые могут быть записаны в виде

$$\hat{L}(x, \hat{p})\Psi(x) = \{A_{\mu\nu}(x)\hat{p}^\mu\hat{p}^\nu + A_\alpha(x)\hat{p}^\alpha + B(x)\}\,\Psi(x) = 0, \tag{1}$$

где $A_{\mu\nu}(x)$, $A_\alpha(x)$, $B(x)$ — квадратные матрицы порядка k; $x \in R^n$, $\hat{p}_\mu = ig^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}$, $g^{\mu\nu}$ — метрический тензор с компонентами $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = \cdots = -g^{nn} = 1$, по повторяющимся индексом подразумевается суммирование от 0 до n.

Будем предполагать, что элементы матриц A, B и компоненты вектора-столбца $\Psi = \{\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n\}$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями, принадлежащими $C_0^\infty(R^n)$.

Типичным примером уравнения вида (1) является система Дирака

$$\hat{L}(\hat{p})\Psi(x) = (\gamma_\mu\hat{p}^\mu - m)\,\Psi(x) = 0. \tag{2}$$

Здесь $x \in R^4$ — пространство Минковского, $\Psi(x)$ — вектор-столбец с четырьмя компонентами $\Psi = \{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4\}$, зависящими от $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$; m — постоянный коэффициент, γ_μ — четыре матрицы, удовлетворяющие алгебре Клиффорда–Дирака

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4, \tag{3}$$

$\gamma_4 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ — антиэрмитова матрица, γ_0 — эрмитова матрица.

Для отыскания алгебры инвариантности уравнения (2) удобно представить его в шредингеровой форме

$$i\frac{\partial\Psi(t, x_1, x_2, x_3)}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}(\hat{p})\Psi(t, x_1, x_2, x_3), \tag{4}$$

$$\hat{\mathcal{H}}(\hat{p}) = \gamma_0\gamma_a\hat{p}_a + \gamma_0\gamma_4 m, \qquad a = 1, 2, 3. \tag{5}$$

Общепринятый гамильтониан Дирака получается из гамильтониана (5) с помощью унитарного преобразования

$$\hat{\mathcal{H}}^D = U\hat{\mathcal{H}}(\hat{p})U^\dagger = \gamma_0\gamma_a\hat{p}_a + \gamma_0 m, \qquad U = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \gamma_4). \tag{6}$$

Гамильтониан Дирака (5) является эрмитовым (даже существенно самосопряженным) оператором в гильбертовом пространстве $H = (L^2(R^3))^4$, где квадрат нормы вектора задается формулой

$$\|\Psi\|^2 = \int |\Psi(x)|^2 dx, \qquad |\Psi(x)|^2 = \Psi^\dagger(x)\Psi(x) = \sum_{i=1}^{4} |\Psi_i|^2.$$

Определение 1. *Уравнение (1) инвариантно относительно некоторого множества операторов $\hat{Q} = \{\hat{Q}_\lambda\} = \{\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \ldots, \hat{Q}_N\}$, если выполняются условия*

$$\hat{L}(x, \hat{p})\hat{Q}_A\Psi(x) = 0, \qquad A = 1, 2, 3, \ldots, N. \tag{7}$$

В этом определении, конечно, предполагается, что область значений операторов $\hat{Q}_A$, заданных на множестве всех решений Ω уравнения (1), принадлежит области определения оператора $\hat{L}(x, \hat{p})$. Условие (7), которое в дальнейшем будем называть условием инвариантности уравнения (1), означает, что операторы $\hat{Q}_A$ отображают одно решение в другое, т.е. множество Ω инвариантно относительно операторов $\hat{Q}_A$.

Иногда удобно условие инвариантности представить в виде коммутатора или антикоммутатора:

$$[\hat{L}(x, \hat{p}), \hat{Q}_A]_-\Psi = 0, \tag{8}$$

$$[\hat{L}(x, \hat{p}), \hat{Q}_A]_+\Psi = 0, \tag{9}$$

где Ψ — произвольное решение уравнения (1).

В операторной форме условие (8) можно записать в виде

$$[\hat{L}(x, \hat{p}), \hat{Q}_A]_- = B_A\hat{L}(x, \hat{p}), \tag{10}$$

где B_A — некоторый оператор.

Определение 2. *Если совокупность операторов* $\{\hat{Q}_A\}$ *образует векторное пространство с лиевским законом умножения, то будем говорить, что уравнение (1) инвариантно относительно алгебры Ли.*

Если операторы $\{\hat{Q}_A\}$ являются базисными элементами алгебры инвариантности, то это означает, что выполняются соотношения

$$[\hat{Q}_A, \hat{Q}_B]_- = f_{ABC}\hat{Q}_C, \tag{11}$$

где f_{ABC} — структурные константы алгебры.

Теперь задачу отыскания лиевской алгебры инвариантности уравнений типа (1) можно сформулировать очень просто: требуется описать (по возможности наиболее широкой) класс операторов $\{\hat{Q}_A\}$, удовлетворяющих соотношениям (8), (11).

В дальнейшем главный упор делаем не на группы инвариантности уравнений, а на алгебры инвариантности. Группу инвариантности отыскиваем по найденной алгебре.

2. В инфинитеэимальном классическом подходе С. Ли эта задача сводится к описанию операторов первого порядка вида

$$\hat{Q}_A = \xi^\mu_A(x,\Psi)\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta^r_A(x,\Psi)\frac{\partial}{\partial \Psi_r}, \qquad \mu = 0,1,\ldots,n; \quad r = 0,1,\ldots,k, \tag{12}$$

удовлетворяющих соотношениям (8), (11), т.е. к описанию соответствующих функций ξ^μ_A и η^r_A.

В настоящее время это направление группового анализа дифференциальных уравнений (ДУ) получило существенное развитие в работах Л.В. Овсянникова и его учеников и последователей. Ими разработаны и применены алгоритмы вычисления групп инвариантности для многих уравнений механики сплошных сред. Последние достижения в этой области подробно охарактеризованы в книге [6].

3. В подходе Ли основной акцент делается на групповой стороне задачи, поскольку существенно используются инфинитезимальные преобразования. Нас будет интересовать, прежде всего, алгебраическая стороны вопроса. Такое смещение акцентов из группы на алгебру позволяет обнаружить ограниченность постановки и метода С. Ли. Ограниченность его в следующем.

Во-первых, ДУ может быть инвариантно относительно некоторой совокупности операторов $\{Q_A\}$, которые *a priori* не принадлежат конечной алгебре Ли. Например, они могут образовывать алгебру Клиффорда, Йордана, суперaлгебру и т.д. Во-вторых, искомые операторы $\hat{Q}_A$ в формуле (11) не всегда представимы в виде (12).

Отсюда ясно, что задачу об исследовании алгебраических свойств ДУ можно обобщить по меньшей мере в таких двух направлениях: 1) отказаться от требования (11), т.е. от условия, чтобы операторы $\{\hat{Q}_A\}$ принадлежали алгебре Ли; 2) существенно расширить класс искомых операторов $\hat{Q}_A$, удовлетворяющих соотношениям (11), т.е. искать решения коммутационных соотношений (10), (11), например, в классе псевдодифференциальных или интегродифференциальных операторов.

Именно в атом последнем направлении, который мы назовем нелиевским подходом, и были получены первые результаты для уравнений Дирака и Максвелла.

Главный и самый трудный вопрос, возникающий в связи с нелиевским подходом к исследованию алгебраических свойств ДУ, состоит в следующем: каким способом конструктивно описать (вычислить) операторы $\hat{Q}_A$, не являющиеся операторами первого порядка, относительно которых множество решений ДУ остается инвариантными? То есть, необходимо указать метод вычисления операторов $\{\hat{Q}_A\}$. Очевидно, что алгоритм Ли для этих целей непригоден.

Нелиевский метод исследования теоретико-групповых свойств систем ДУ в частных производных предложен в работе [8, 9]. Он состоит из следующих этапов: 1) система ДУ с помощью невырожденного преобразования приводится к каноническому (или диагональному) виду, т.е. проводится максимальное расщепление системы ДУ на независимые (автономные) подсистемы; 2) находится алгебра инвариантности (АИ) преобразованного уравнения; 3) если операторы $\{\hat{Q}_A\}$ АИ удовлетворяют коммутационным соотношениями (11), то устанавливается, какое представление алгебры Ли реализуют эти операторы в пространстве решений; 4) с помощью обратного преобразования находится АИ исходного уравнения; 5) по АИ вычисляется группа инвариантности ДУ.

4. В основе сформулированного алгоритма лежит одна из древних и, видимо, самых плодотворных и эффективных идей в теории дифференциальных уравнений — преобразования независимых и зависимых переменных. Приведем подробное описание этого алгоритма.

Для наших целей важную роль будет играть понятие символа оператора $\hat{L}(x,\hat{p})$. Символом оператора $\hat{L}$ уравнения (1) является матрица вида

$$L(x,p) = A_{\mu\nu}(x)p^\mu p^\nu + A_\alpha(x)p^\alpha + B(x), \tag{13}$$

зависящая от переменных $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, $p = (p_0, p_1, \dots, p_n)$. В более общем случае символ оператора $\hat{L}$ обычно определяется с помощью преобразования Фурье (подробно о символах см., например, в [24]):

$$\hat{L}(x,\hat{p})\Psi(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{D(p)} L(x,p) e^{i(x,p)} \tilde{\Psi}(p) dp, \tag{14}$$

где $\tilde{\Psi} \in C_0^\infty(R^n)$, $\tilde{\Psi}(p) = F\Psi(x)$ — Фурье-образ $\Psi(x)$, F — унитарный оператор Фурье, отображающий вектор из гильбертова пространства H в $\tilde{H}$; $\tilde{\Psi}(p) \in \tilde{H}$; $D(p)$ — область интегрирования;

$$(x,p) = g^{\mu\nu} x_\mu p_\nu = g^{00} x_0 p_0 + g^{11} x_1 p_1 + \cdots + g^{nn} x_n p_n.$$

Связь между символом $L(x,p)$ и его оператором $\hat{L}(x,\hat{p})$ задеется формулами

$$\hat{L}(x,\hat{p}) = F^{-1} L(x,p) F, \tag{15}$$

$$L(x,p) = F \hat{L}(x,\hat{p}) F^{-1}. \tag{16}$$

Формулы (15), (16) указывают путь реализации первого шага алгоритма. Действительно, поскольку $L(x,p)$ для уравнения (1) является переменной матрицей, то задача о расщеплении уравнения (1) на максимальное число незацепляющихся уравнений редуцируется к следующей матричной задаче: посредством некоторого невырожденного преобразования W привести к диагональной или жордановой форме матрицу (13) для произвольных p из $D(p)$. Известно, что диагонализация произвольной постоянной матрицы — это очень трудная проблема, имеющая решение только для специального класса матриц. В случае переменной матрицы проблема приводимости матриц к каноническому виду существенно усложняется. Кроме того, для отыскания явного вида операторов $\{\hat{Q}_A\}$ нам необходимо знать явный вид операторов W и W^{-1}, диагонализирующих (или приводящих к виду Жордана) матрицу $L(x,p)$.

Условие инвариантности (7) в терминах символов имеет вид

$$L(x,p)Q_a\tilde{\Psi}(p) = 0, \tag{17}$$

$$Q_a = F\hat{Q}_A F^{-1}. \tag{18}$$

При этом, конечно, нужно предполагать или доказывать, что $Q_A\tilde{\Psi}(p) \in \tilde{H}$, если $\tilde{\Psi} \in \tilde{H}$.

Рассмотрим случай, когда существует невырожденное преобразование $W(x,p)$, приводящее матрицу к диагональному виду:

$$L' = WLW^{-1} = \begin{pmatrix} f_1(x,p) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2(x,p) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f_n(x,p) \end{pmatrix}. \tag{19}$$

В этом случае приходим к такому результату: если функции $f_1(x,p), f_2(x,p), \ldots, f_n(x,p)$ одновременно инвариантны относительно преобразований

$$x' = \varphi(x,p), \qquad p' = \varphi_p(x,p), \tag{20}$$

образующих группу Ли, то уравнения (1) инвариантны относительно той же группы.

Преобразования вида (20) будем называть геометрическими преобразованиями. Помимо геометрических преобразований уравнение (17) может быть инвариантным относительно чисто матричных преобразований, т.е. преобразований над компонентами вектор-функции $\tilde{\Psi}(p)$. Условия, когда такая инвариантность возможна, даются следующей теоремой.

Теорема 1. *Если матрица L' имеет двукратное собственное значение, то уравнение (1) инвариантно относительно четырехмерной алгебры Ли группы $GL(2)$.*

Доказательство. Не умаляя общности, можем считать, что $f_1 = f_2$, тогда с матрицей $L'(x,p)$ коммутирует следующий набор четырех независимых матриц:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_4 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где σ_0 — единичная двухрядная матрица; σ_a $(a = 1,2,3)$ — двухрядные матрицы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям алгебры Ли группы $SU(2)$:

$$[\sigma_a, \sigma_b] = 2i\varepsilon_{abc}\sigma_c,$$

ε_{abc} — антисимметричный тензор, $\varepsilon_{123} = 1$.

Операторы $\hat{Q}_A$, коммутирующие с оператором $\hat{L}(x,\hat{p})$ исходного уравнения (1), вычисляются по формулам

$$\hat{Q}_a = F^{-1}(W^{-1}Q'_A W)F = (WF)^{-1}Q_a WF, \tag{22}$$

$$\hat{Q}_A = \hat{W}^{-1}\hat{Q}'_A\hat{W}, \qquad \hat{W} = F^{-1}WF. \tag{23}$$

Очевидно, что операторы Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, построенные по матрицам (21) с помощью формул (22), (23), удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры $GL(2)$:

$$[\hat{Q}_a,\hat{Q}_b]_- = 2i\varepsilon_{abc}\hat{Q}_c, \qquad [\hat{Q}_4,\hat{Q}_a]_- = 0, \qquad a,b,c = 1,2,3. \tag{24}$$

Замечание 1. При приведении символа $L(x,p)$ к диагональному виду и применении формул (22), (23) необходимо учитывать следующее. В символах $L(x,p)$, $W(x,p)$ переменные x и p являются коммутирующими величинами. Для операторов, вследствие некоммутативности $\hat{x}$ и $\hat{p}$, ситуация существенно осложняется. Этого усложнения иногда удается избежать, если оператор исходного уравнения можно представить в виде формально симметричного оператора

$$\hat{K} = \hat{L}(x,\hat{p}) + \hat{L}^*(\hat{p},x).$$

Очевидно, что если $\hat{L}$ не зависит от x, то такие усложнения не возникают. В дальнейшем будут рассматриваться операторы $\hat{L}$, не зависящие от x.

Замечание 2. Если матрица L' имеет более чем два кратных собственных значения, то алгебра инвариантности уравнения (1) будет шире алгебры $GL(2)$. Иначе говоря, чем больше кратность собственных значений матрицы L', тем шире алгебра инвариантности уравнения (1).

Замечание 3. В том случае, когда матрица $L(x,p)$ не может быть приведена к диагональному виду посредством невырожденного преобразования, ее следует привести к форме Жордана. Применение этой формы существенно облегчает задачу отыскания алгебры инвариантности.

Зная алгебру инвариантности, по формулам

$$x'_\mu = \exp\{i\hat{Q}_a\theta_A\}x_\mu\exp\{-i\hat{Q}_B\theta_B\}, \qquad \mu = 0,1,\ldots,n, \tag{25}$$

$$\Psi'(x) = \exp\{i\hat{Q}_A\theta_A\}\Psi(x) \tag{26}$$

находим преобразования для зависимых и независимых переменных, относительно которых уравнения (1) инвариантны. Здесь θ_A — параметры группы инвариантности.

Замечание 4. Теорема 1 остается верной и в том случае, когда матрица L' имеет жорданову форму, один из блоков которой является диагональной матрицей с двумя совпадающими элементами.

Приведенный алгоритм может быть успешно применен и к некоторым нелинейным уравнениям, если последние с помощью обратимого преобразования сводятся к линейным уравнениям.

Чаще всего $L(x,p)$, встречающиеся в задачах квантовой механики, являются матрицами высокого порядка и содержат малое число ненулевых элементов. Поэтому имеет, видимо, смысл создать вычислительные программы для приведения таких разреженных матриц к канонической форме.

В заключение следует отметить, что применение и полная реализация описанного алгоритма к конкретным системам дифференциальных уравнений в частных производных, встречающихся в математической и теоретической физике, представляет собой отдельную, иногда весьма трудную, задачу.

§ 2. Теоретико-алгебраический анализ уравнения Дирака

Применим описанный алгоритм к уравненную (4). Детальное рассмотрение этого алгоритма для уравнения Дирака существенно для нас потому, что его изложение содержит все элементы, присущие уравнениям и более общего вида, исследованным в настоящем сборнике.

1. Прежде всего применим теорему 1 к уравнению (4). Символ гамильтониана Дирака

$$\mathcal{H}(p)=\gamma_0(\gamma_a p_a+\gamma_4 m), \qquad -\infty<p_a<\infty, \tag{27}$$

не зависит от переменной x. Это обстоятельство значительно упрощает задачу реализации первого шага алгоритма — приведение матрицы $\mathcal{H}(p)$ к диагональному виду. Поскольку матрицы γ_μ между собой не коммутируют, то невозможно привести их одновременно к диагональному виду. Можно, конечно, выбрать явное представление для матриц Дирака и, записав $\mathcal{H}(p)$ в виде одной матрицы, попытаться привести ее к диагональному виду. Это действительно нетрудно сделать, но мы поступим иначе.

Воспользуемся свойством символа гамильтониана Дирака, а именно:

$$\mathcal{H}^2(p)=\left(p_a^2+m^2\right)\hat{I}, \tag{28}$$

где $\hat{I}$ — единичная четырехрядная матрица. В силу эрмитовости матрицы $\mathcal{H}(p)$ для произвольных действительных p_a и условия (28) с помощью некоторого невырожденного преобразования $W(p)$ матрица $\mathcal{H}$ приводится к диагональному виду

$$\mathcal{H}'(p)=W(p)\mathcal{H}(p)W^{-1}(p)=\gamma_0 E, \tag{29}$$

где

$$\gamma_0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}, \qquad E=(p_1^2+p_2^2+p_3^2+m^2)^{1/2}. \tag{30}$$

Принимая во внимание явную структуру $\mathcal{H}'(p)$ и используя теорему 1, приходим к следующему результату.

Теорема 2. *Уравнение (4) инвариантно относительно алгебры Ли группы* $GL\otimes GL(2)\supset SU(2)\otimes SU(2)$.

Приведенное краткое доказательство одного из результатов работ [8, 9] обладает тем недостатком, что явно не указаны матрицы $W(p)$, а значит и операторы $\hat{W}(\hat{p})$, с помощью которых находятся базисные элементы $\{\hat{Q}_A\}$ алгебры Ли группы

$GL(2)$. Имеется много матриц, приводящих $\mathcal{H}(p)$ к диагональному виду. Воспользовавшись предыдущей теоремой, легко описать целый класс невырожденных матриц, приводящих $\mathcal{H}(p)$ к диагональному виду.

Обозначим через $V(p)$ какую-то одну из множества матриц, диагонализирующих $\mathcal{H}(p)$.

Теорема 3. *Произвольное невырожденное преобразование $W(p)$, приводящее $\mathcal{H}(p)$ к виду (29), задается формулой*

$$W(p) = V \cdot T, \qquad W^{-1} = T^{-1}V^{-1}. \tag{31}$$

Здесь T — произвольная невырожденная матрица, принадлежащая алгебре $GL(2) \otimes GL(2)$.

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что $GL(2) \otimes GL(2)$ является максимальной алгеброй, коммутирующей с матрицей $\mathcal{H}(p)$.

Замечание 5. Все известные в литературе преобразования (в том числе и исторически первое преобразование Прайса–Фолди–Воутхойэена [25, 26] и многие другие), диагонализирующие гамильтониан Дирака, имеют структуру (31).

2. Как пример такого преобразования можно выбрать переменную матрицу вида (см. [8, 9]):

$$W(p) = \exp\left\{\frac{\pi}{4}\frac{\gamma_0\mathcal{H}(p)}{E}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\gamma_0\mathcal{H}}{E}\right), \tag{32}$$

$E \neq 0$ для всех $-\infty < p_a < \infty$. По формуле (15) находим унитарное интегральное преобразование

$$\hat{W}(\hat{p}) = F^{-1}W(p)F = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1 + \gamma_0\frac{\hat{\mathcal{H}}(\hat{p})}{\hat{E}(\hat{p})}\right\}, \tag{33}$$

где $\hat{E}(\hat{p}) = \left(p_a^2 + m^2\right)^{1/2}$ — псевдодифференциальный оператор. Ввиду того, что символ $W(p)$ не зависит от x, формула (33) получается из (32) простой заменой переменных p_a операторы $\hat{p}_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}$.

Действуя оператором $\hat{W}(\hat{p})$ слева на уравнение (4), получаем

$$i\frac{\partial\Phi(t, x_1, x_2, x_3)}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}'(\hat{p})\Phi(t, x_1, x_2, x_3), \tag{34}$$

$$\hat{\mathcal{H}}'(\hat{p}) = \hat{W}(\hat{p})\hat{\mathcal{H}}(\hat{p})W^{-1}(\hat{p}) = \gamma_0\hat{E}(\hat{p}), \tag{35}$$

$$\Phi(t, \vec{x}) = \hat{W}(\hat{p})\Psi(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Уравнение (34) представляет собой расщепленную систему четырех псевдодифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} &i\frac{\partial\Phi_a(t, \vec{x})}{\partial t} = \hat{E}(\hat{p})\Phi_a(t, \vec{x}), \qquad a = 1, 2, \\ &i\frac{\partial\Phi_{a+2}(t, \vec{x})}{\partial t} = -\hat{E}(\hat{p})\Phi_a(t, \vec{x}), \qquad a = 1, 2. \end{aligned} \tag{37}$$

Очевидно, что с оператором $\hat{\mathcal{H}}'(\hat{p})$ коммутируют такие восемь матриц:

$$S_{kl} = \frac{i}{4}(\gamma_k\gamma_l - \gamma_l\gamma_k), \quad k, l = 1, 2, 3, 4, \qquad S_{05} = \gamma_0, \qquad S_{00} = \hat{I}. \tag{38}$$

Эти матрицы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} &[S_{kl}, S_{nr}]_- = i(g_{kr}S_{ln} - g_{nk}S_{lr} + g_{ln}S_{kr} - g_{lr}S_{nk}), \\ &[S_{kl}, S_{50}]_- = 0, \qquad [S_{kl}, S_{00}]_- = 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Матрицы S_{kl} образуют базис шестимерной алгебры Ли группы $O(4) \sim SU(2) \otimes SU(2)$. Вычисляя собственные значения операторов Казимира алгебры $O(4)$, нетрудно показать, что эти матрицы реализуют следующее представление:

$$D\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes D\left(0, \frac{1}{2}\right). \tag{40}$$

Базисные элементы $\{\hat{Q}_A,\ A = 1, 2, \ldots, 8\} = \{\hat{S}_{kl}(\hat{p}), \hat{S}_{50}(\hat{p}), \hat{S}_{00}\}$ алгебры $GL(2)$ $\oplus GL(2) \supset O(4)$, относительно которой исходное уравнение (4) инвариантно, вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} &\hat{S}_{kl}(\hat{p}) = \hat{W}^{-1}(\hat{p})S_{kl}\hat{W}(\hat{p}) = S_{kl} + \hat{\Sigma}_{kl}(\hat{p}), \\ &\hat{\Sigma}_{kl}(\hat{p}) = (S_{5k}\hat{p}_l - S_{5l}\hat{p}_k)\left\{\hat{E}^{-1}(\hat{p}) - 2iS_{5r}\hat{p}_r\hat{E}^{-2}(\hat{p})\right\}, \\ &\hat{S}_{05}(\hat{p}) = \frac{\hat{\mathcal{H}}(\hat{p})}{\hat{E}(\hat{p})}, \qquad S_{00} = \hat{I}, \qquad k, l, r = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \tag{41}$$

Из формулы (41) видно, что базисные элементы алгебры являются интегродифференциальными операторами. Вся интегральность в формулах (41) содержится в операторе $\hat{E}(\hat{p})$, который является корнем квадратным из положительного оператора $\hat{E}^2 = p_a^2 + m^2$. $\hat{E}(\hat{p})$ можно задавать как с помощью символа, так и с помощью формулы

$$\hat{E}(\hat{p})\Psi(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ip(x-y)}\left(p_a^2 + m^2\right)^{1/2}\Psi(y)\,dpdy.$$

Подытожим все сказанное в виде следующего утверждения.

Теорема 4. *Алгеброй инвариантности уравнения Дирака является восьмимерная алгебра $GL(2) \otimes GL(2)$, базисные элементы которой задаются интегродифференциальными операторами (41).*

3. Хорошо известно, что уравнение Дирака инвариантно относительно алгебры Пуанкаре $P(1,3)$, базисные элементы $\{\hat{Q}_A\} = \{P_\mu, J_{\mu\nu}\}$ которой задаются дифференциальными операторами первого порядка:

$$\begin{aligned} &P_\mu = \hat{p}_\mu = -ig^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \\ &J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \qquad S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_-. \end{aligned} \tag{42}$$

Нетрудно проверить, что совокупность операторов (41) и (42) не образует алгебру Ли.

Итак, уравнение Дирака обладает двумя типами симметрии: с одной стороны, имеется инвариантность относительно 10-мерной алгебры $P(1,3)$, обусловленная инвариантностью относительно пространственно-временных преобразований, с другой, — инвариантность относительно 8-мерной алгебры (41), обусловленная инвариантностью относительно преобразований компонент вектор-функции $\Psi(x)$.

Возникает естественное желание объединить эти две симметрии, т.е. найти 18-мерную алгебру G инвариантности уравнения (2), содержащую в качестве подалгебры алгебры $P(1,3)$ и $GL(2)\otimes GL(2)$. В работе [19] такое объединение осуществлено.

Теорема 5 [9]. *Алгеброй инвариантности уравнения Дирака является 18—мерная алгебра Ли, базисные элементы которой задаются дифференциальными операторами (42) и интегродифференциальными операторами*

$$\hat{Q}_{ab}=S_{ab}+\hat{\xi}_{ab}(\hat{p}),\quad a,b=1,2,3,\qquad \hat{Q}_{0a}=i\hat{S}_{05}(\hat{p})\hat{Q}_{bc}, \tag{43}$$

$$\hat{\xi}_{ab}=\frac{i}{m}(\gamma_a\hat{p}_b-\gamma_b\hat{p}_a)\{1+i\gamma_4\hat{S}_{05}(\hat{p})\}. \tag{44}$$

Доказательство этой теоремы осуществляется с помощью конкретной реализации указанного алгоритма. Интегральный оператор, расщепляющий систему (2) на четыре независимых уравнения, имеет вид

$$\hat{W}(\hat{p})=\exp\left\{i\frac{S_{4a}\hat{p}_a}{\hat{p}}\operatorname{arctg}\frac{\hat{p}}{m}\right\}\exp\left\{\frac{S_{ab}\hat{p}_c}{\hat{p}}\operatorname{arctg}\frac{\hat{p}}{\hat{E}(\hat{p})}\right\},$$

$$\hat{p}=(p_1^2+p_2^2+p_3^2)^{1/2}.$$

Все приведенные выше результаты верны и для произвольного пуанкаре-инвариантного ДУ, описывающего свободное движение частицы со спином $s>\frac{1}{2}$. Существует только одно пуанкаре-инвариантное уравнение движения для частицы и античастицы с нулевой массой и спином $s=\frac{1}{2}$, а именно двухкомпонентная система Вейля

$$i\frac{\partial\chi(t,\vec{x})}{\partial t}=\sigma_a\hat{p}_a\chi(t,\vec{x}),\qquad \chi=\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix},$$

не обладающая дополнительной симметрией $SU(2)\otimes SU(2)$.

Уравнение Максвелла (в вакууме) дополнительно инвариантно относительно группы $GL(2)\otimes GL(2)$.

Сформулированные выше теоремы можно перенести (и усилить) и на системы более общего вида, например системы уравнений с постоянными матрицами

$$\left(S_{n+1,\mu}\hat{p}^{\mu}+S_{n+1,n+2}\right)\Psi(x)=0,\qquad \mu=0,1,\ldots,n, \tag{45}$$

где матрицы $S_{n+1,\mu}$, $S_{n+1,n+2}$ вместе с матрицами $S_{\mu\nu}$, $S_{\mu,n+2}$ реализуют произвольное конечномерное представление алгебры Ли группы $O(1,n+2)$. В класс уравнений вида (45) входит система уравнений Максвелла в $(1+n)$-мерном пространстве Минковского:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial F_{\nu\alpha}(x)}{\partial x_\mu}+\frac{\partial F_{\alpha\mu}(x)}{\partial x_\nu}=0,\qquad \frac{F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=0,\quad \alpha=1,2,\ldots,n. \tag{46}$$

Для бесконечной системы ДУ вида (45) описанный алгоритм работает так же эффективно (см. [18]).

4. Уравнения Дирака и Максвелла принадлежат к гиперболическим системам. Они, как мы показали, обладают $O(4)$-симметрией. Выясним теперь такой вопрос: обладают ли такой же симметрией ультрагиперболические и эллиптические системы уравнений?

Рассмотрим уравнения типа Дирака в четырехмерном пространстве Минковского, где длина вектора задается формулой

$$x^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2, \qquad x_0 = t. \tag{47}$$

В этом пространстве уравнение типа Дирака имеет вид

$$(\gamma_0\hat{p}_0 - \gamma_1\hat{p}_1 - \gamma_2\hat{p}_2 - i\gamma_3\hat{p}_3)\,\Psi(x) = m\Psi(x). \tag{48}$$

Система (48) , как и обычные уравнения Дирака и Максвелла, заданные в $(1+n)$-мерном пространстве Минковского, обладает тем важным свойством, что из нее с помощью исключения неизвестных функций получаем одно и то же дифференциальное уравнение второго порядка для всех компонент Ψ_k вектор-функции Ψ:

$$\left(\hat{p}_0^2 - \hat{p}_1^2 - \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2\right)\Psi_k(x) = m^2\Psi_k(x). \tag{49}$$

Именно это свойство уравнений типа Дирака и Максвелла является истинной первопричиной дополнительной $O(4)$-симметрии. В других терминах это означает, что характеристические многообразия (формы) одни и те же для обоих типов уравнений.

Теорема 6. *Уравнение (48) инвариантно относительно алгебры* $O(4)$.

Доказательство не приводим, так как оно аналогично доказательству теоремы 4. Оператор невырожденного преобразования, расщепляющий систему (48) на четыре независимых псевдодифференциальных уравнения

$$\gamma_4\left(\hat{p}_0^2 - \hat{p}_1^2 - \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2\right)^{1/2}\Phi(t,\vec{x}) = m^2\Phi(t,\vec{x}), \tag{50}$$

имеет вид

$$\hat{W}(\hat{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1 + \gamma_4\frac{\gamma_0\hat{p}_0 - \gamma_1\hat{p}_1 - \gamma_2\hat{p}_2 - \gamma_3\hat{p}_3}{\left(\hat{p}_0^2 - \hat{p}_1^2 - \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2\right)^{1/2}}\right\}, \quad \Phi(t,\vec{x}) = \hat{W}(\hat{p})\Psi(t,\vec{x}). \tag{51}$$

Эллиптическая система ДУ вида

$$(\gamma_0\hat{p}_0 - i\gamma_1\hat{p}_1 - i\gamma_2\hat{p}_2 - i\gamma_3\hat{p}_3)\,\Psi = m\Psi \tag{52}$$

обладает той же симметрией, что и уравнение (22).

Если из системы (52) найти уравнения для компонент вектор-функции Ψ, то получим для каждой компоненты Ψ_k уравнение Гельмгольца в четырехмерном пространстве

$$\left(\hat{p}_0^2 + \hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2\right)\Psi_k(x) = m^2\Psi_k(x). \tag{53}$$

Вкратце резюмировать сказанное в этом пункте можно так: уравнения (2), (48), (52) инвариантны относительно различных пространственно-временных (геометрических) преобразований, но все они обладают одной и той же (негеометрической) $O(4)$-симметрией.

Рассмотренные нами системы являются уравнениями гиперболического и эллиптического типа. Существуют и параболические системы ДУ, обладающие $O(4)$-симметрией (см. [26]).

Нетрудно выписать систему ДУ, которая не обладает никакой геометрической симметрией, но обладает негеометрической симметрией.

Для полноты упомянем, что нелиевский алгоритм был применен к более сложным системам, чем уравнения Дирака.

Рассмотрим систему уравнений первого порядка вида

$$(\beta_\mu \hat{p}^\mu - m)\,\Psi(t,\vec{x}) = 0, \qquad \mu = 0,1,2,3, \tag{54}$$

где постоянные матрицы β_μ удовлетворяют алгебре

$$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\lambda + \beta_\nu\beta_\lambda\beta_\mu = \beta_\mu g_{\nu\lambda} + \beta_\nu g_{\lambda\mu}. \tag{55}$$

Система (54), известная в литературе как уравнения Кеммера–Деффина–Петье (КДП), представляет собой систему пяти уравнений, если неприводимое представление алгебры (55) реализовать матрицами 5×5, либо систему десяти уравнений, если неприводимое представление алгебры (55) реализовать матрицами 10×10. Матрицы β_μ вырождены и обладают большим числом нулей.

Оператор $\hat{L} = \beta_\mu \hat{p}_\mu$ в том случае, когда матрицы β_μ реализуют пятимерное представление алгебры (55), имеет трехмерное нуль-пространство. Если матрицы $\hat{L}$ реализуют 10-мерное представление, то оператор $\hat{L}$ имеет четырехмерное нуль-пространство.

В работе [14] доказано, что уравнение КДП обладает $SU(3)$-симметрией.

5. В заключение этого параграфа укажем на несколько уравнений, для которых интересно и важно (с физической точки зрения) применить описанный алгоритм.

1. Уравнения Максвелла в различных средах.

2. Уравнения теории гравитации.

3. Уравнения статистической физики — уравнения Больцмана, Фоккера–Планка, Власова, Боголюбова.

4. Уравнение Ламе.

5. Уравнение, описывающее распространение волн в кристалле:

$$\varepsilon_{klnm}(x)\frac{\partial^2\Psi_l(t,\vec{x})}{\partial x_n\partial x_m} = \rho(x)\frac{\partial^2\Psi_k(t,\vec{x})}{\partial t^2}.$$

6. Уравнения типа Дирака с потенциалами, например

$$\{\gamma_\mu\hat{p}^\mu + \gamma_\mu x^\mu(1+\lambda x_\alpha x^\alpha) - m\}\,\Psi(x) = 0,$$
$$\left\{\gamma_\mu\hat{p}^\mu - \lambda_1 J_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + \lambda_2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}J^{\mu\nu}J^{\alpha\beta}\right\}\Psi(x) = 0,$$

λ_1, λ_2 — некоторые параметры.

7. Интегро-дифференциальное уравнение вида

$$i\frac{\partial\Psi(t,\vec{x})}{\partial t} = \left\{a_1(\vec{S}\hat{\vec{p}}) + a_2\frac{(\vec{S}\hat{\vec{p}})^2}{\hat{p}^2} + a_3\frac{(\vec{S}\hat{\vec{p}})^3}{\hat{p}^3}\right\}\Psi(t,\vec{x}),$$

$$\hat{p}\Psi \neq 0, \qquad \hat{p} \equiv \left(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2\right)^{1/2}.$$

Если в этом уравнении матрицы $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$ реализуют представление $D(1,0) \oplus D(0,1)$ алгебры Ли группы $SU(2) \otimes SU(2)$, $a_1 = \sigma_2$ — матрица Паули размерности 6×6 и $a_2 = a_3 = 0$, то такое уравнение совпадает с уравнением Максвелла. Представляет так же интерес исследовать уравнение типа Максвелла с нелинейным членом

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \sigma_2(\vec{S}\hat{\vec{p}})\Psi + \lambda(\Psi^{+}\Psi)\Psi,$$

где Ψ — вектор-столбец, компонентами которого являются вектора электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей, $\Psi^{+} = (E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3)$ — вектор-строка.

8. Система уравнений

$$i\frac{\partial \Psi(t,\vec{x})}{\partial t} = \left\{ \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2}{2m} + a_0(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) + a_1(S_1\hat{p}_1 + S_2\hat{p}_2 + S_3\hat{p}_3) + \right.$$
$$\left. + a_2(S_1\hat{p}_1 + S_2\hat{p}_2 + S_3\hat{p}_3)^2 + a_3(S_1\hat{p}_1 + S_2\hat{p}_2 + S_3\hat{p}_3)^3 \right\} \Psi(t,\vec{x}).$$

Эту систему можно рассматривать как определенное обобщение известного скалярного уравнения Шредингера, описывающего движение частицы со спином в нерелятивистской квантовой механике. Если положить параметры $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$, такое уравнение совпадает с уравнением Шредингера, описывающим движение бесспиновой частицы. В квантовой механике, построенной на основе этой системы уравнений, энергия свободной частицы, обладающей спином s, определяется формулой

$$E(p,s) = \frac{p^2}{2m} + a_0\vec{S}^2 + a_1\vec{S}\vec{p} + a_2(\vec{S}\vec{p})^2 + a_3(\vec{S}\vec{p})^3. \tag{56}$$

Для бесспиновых частиц $s = 0$ эта формула совпадает с общепринятой формулой для энергии частицы в квантовой механике

$$E(p) = \frac{\vec{p}^2}{2m}.$$

Особенность формулы (56) состоит в том, что спиновые s и импульсные переменные $\vec{p}$ входят в нее на равных правах, т.е. имеется симметрия между импульсом и спином. Общепринятая формулировка нерелятивистской квантовой механики не обладает такой симметрией. Если спин частицы, как это принято считать, есть такая же степень свободы, как и координата частицы, то формула (56) отражает этот факт.

9. Система уравнений второго порядка

$$\left\{ A_{\mu\nu}\left(x^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + A_\mu\left(x^2\right)\frac{\partial}{\partial x^\mu} + B\left(x^2\right) \right\}\Psi(x) = f\left(x^2\right),$$

где $A_{\mu\nu}\left(x^2\right)$, $A_\mu\left(x^2\right)$, $B\left(x^2\right)$ — квадратные матрицы, зависящие от $x^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, $f\left(x^2\right)$ — заданная вектор-функция.

10. Система шести обыкновенных уравнений четвертого порядка

$$\lambda\frac{d^4\vec{x}_1}{dt^4}+\lambda_1\frac{d^2\vec{x}_1}{dt^2}=F_1\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\frac{d\vec{x}_1}{dt},\frac{d\vec{x}_2}{dt},\frac{d^2\vec{x}_1}{dt^2},\frac{d^2\vec{x}_2}{dt^2}\right),$$
$$\lambda\frac{d^4\vec{x}_2}{dt^4}+\lambda_2\frac{d^2\vec{x}_2}{dt^2}=F_2\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\frac{d\vec{x}_1}{dt},\frac{d\vec{x}_2}{dt},\frac{d^2\vec{x}_1}{dt^2},\frac{d^2\vec{x}_2}{dt^2}\right).$$

Эту систему следует рассматривать как обобщение уравнений Ньютона для двух взаимодействующих частиц. Системы такого типа могут быть получены из обобщенного уравнения Эйлера–Лагранжа, впервые предложенного М.В. Остроградским [28]. Функция Лагранжа в механике Остроградского зависит от производных произвольного порядка.

Геометрическая группа инвариантности этой системы уравнений, порожденная преобразованиями в пространстве $E(3)\otimes E(1)$, значительно шире группы Галилея — десятипараметрической группы движений классической механики. Кроме того, эта система уравнений при определенных F_1 и F_2 обладает негеометрической группой инвариантности.

11. Бесконечная цепочка линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$m_1\frac{d^2\vec{x}_1}{dt^2}=(a_1+a_2)\vec{x}_1+a_2\vec{x}_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$m_n\frac{d^2\vec{x}_n}{dt^2}=a_n\vec{x}_{n-1}+(a_n+a_{n+1})\vec{x}_n+a_{n+1}\vec{x}_{n+1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$n=1,2,3,\ldots$; $m_1,m_1,a_1,a_2,\ldots,a_n$ — постоянные величины.

12. Система обыкновенных ДУ

$$\sum_{k=0}^{N}A_k(t)\frac{d^kX(t)}{dt^k}=f(x_1,x_2,\ldots,x_n),\qquad X(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{pmatrix},$$

$A_k(t)$ — переменные матрицы.

13.

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,\vec{x})=\left\{\lambda\gamma_0m+\lambda_1\hat{\vec{p}}^{\,2}+\lambda_2\left(\gamma_1\hat{p}_1^2+\gamma_2\hat{p}_2^2+\gamma_3\hat{p}_3^2\right)\right\}\Psi(t,\vec{x})+\lambda_3\Psi^+\Psi.$$

14.

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,\vec{x})=\left\{m+\frac{\hat{\vec{p}}\,2}{2m}+\lambda_1\left(\gamma_1\hat{p}_2\hat{p}_3+\gamma_2\hat{p}_3\hat{p}_1+\gamma_3\hat{p}_1\hat{p}_2\right)\right\}\Psi(t,\vec{x})+$$
$$+\lambda_2\Psi^+\gamma_0\Psi+\lambda_3\Psi^+\Psi,$$
$$\left\{\gamma_0p_0^2+\sqrt{2}p_0(\gamma_1p_1+\gamma_2p_2+\gamma_3p_3)+i\gamma_4p_a^2\right\}\Psi(t,\vec{x})-$$
$$-m^2\Psi(t,\vec{x})-\lambda\Psi^+\gamma_0\Psi=0.$$

15.

$$\left(\gamma_0\hat{p}_0^2-\gamma_1\hat{p}_1^2-\gamma_2\hat{p}_2^2-\gamma_3\hat{p}_3^2\right)\Psi(t,\vec{x})=m^2\Psi(t,\vec{x})+\lambda\Psi^+\gamma_0\Psi.$$

16.

$$\Big\{\Gamma_0\hat{p}_0^2-\Gamma_1\hat{p}_1^2-\Gamma_2\hat{p}_2^2-\Gamma_3\hat{p}_3^2-\sqrt{2}\left(\Gamma_4\hat{p}_1\hat{p}_2+\Gamma_5\hat{p}_1\hat{p}_3+\Gamma_6\hat{p}_2\hat{p}_3\right)\Big\}\Psi(t,\vec{x})=$$
$$=m^2\Psi(t,\vec{x})+\lambda\Psi^+\gamma_0\Psi.$$

Здесь $\Gamma_0,\Gamma_1,\ldots,\Gamma_6$ — базисные элементы алгебры Клиффорда. Нижайшее неприводимое представление этой алгебры реализуется восьмирядными матрицами. В этом случае Ψ — вектор-столбец с компонентами $\{\Psi_1,\Psi_2,\ldots,\Psi_8\}$. При $\lambda=0$ эта система не эллиптическая, не параболическая и не гиперболическая, т.е. это система уравнений промежуточного типа. Она инварианта, как и система (15), относительно негеометрических преобразований, образующих группу $U(2)\otimes U(2)$.

17. Уравнения для специальных функций. Для исследования групповых свойств произвольного обыкновенного дифференциального уравнения (в том числе и уравнений для специальных функций) следует поступить следующим образом: заменить одно обыкновенное дифференциальное уравнение высокого порядка эквивалентной системой ДУ первого порядка

$$\frac{dx_i}{dt}=F_i(t,x_1,x_2,\ldots,x_n),\qquad i=1,2,\ldots,n,$$

затем воспользоваться тем известным фактом, что система обыкновенных ДУ эквивалентна одному линейному ДУ с частными производными первого порядка с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial\Phi(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial t}+F_i(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)\frac{\partial\Phi(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_i}=0.$$

Групповые свойства этого уравнения в частных производных можно изучить с помощью лиевского или нелиевского метода.

Отметим также, что, воспользовавшись указанной эквивалентностью, можно решить и обратную задачу группового анализа, описать всевозможные системы обыкновенных ДУ, инвариантные относительно групп движений нерелятивистской и релятивистской механики (групп Галилея и Пуанкаре). При решении обратной задачи можно использовать методы работ [28–46] . Более подробно все эти вопросы будут рассмотрены в других наших публикациях.

18. Интегро-дифференциальная система вида

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=a_1\operatorname{rot}\vec{E}+a_2\sqrt{\hat{p}_a^2}\vec{E},\qquad \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=b_1\operatorname{rot}\vec{H}+b_2\sqrt{\hat{p}_a^2}\vec{H}.$$

Если в этом уравнении положить $a_2=b_2=0$, $a_1=-1$, $b_1=1$ и добавить условие $\operatorname{div}\vec{D}=0=\operatorname{div}\vec{B}$, $\vec{B}=\vec{H}$, $\vec{D}=\vec{E}$, то оно совпадет с уравнением Максвелла в вакууме. В этом случае, когда $a_1=b_1=0$, $a_2=b_2=1$, $\vec{B}=\mu\vec{H}$, $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$, уравнение инвариантно относительно 10-мерной алгебры Пуанкаре(геометрическая симметрия) и алгебры Ли группы $U(3)\otimes U(3)$ (негеометрическая симметрия).

Следует отметить, что для исследования групповых свойств такой псевдодифференциальной системы совершенно не пригоден лиевский метод, несмотря на то, что уравнение обладает очевидной симметрией относительно группы трехмерных вращений и сдвигов.

19. Система уравнений четвертого порядка

$$\hat{p}_0\vec{E} = a_0\vec{H} + c_0\vec{E} + a_1 \operatorname{rot}\vec{H} + c_1 \operatorname{rot}\vec{E} + \\ + a_2\hat{p}_a^2\vec{H} + c_2\hat{p}_a^2\vec{E} + a_4(\hat{p}_a^2)^2\vec{H} + c_4(\hat{p}_a^2)^2\vec{E},$$

$$\hat{p}_0\vec{H} = b_0\vec{E} + d_0\vec{H} + b_1 \operatorname{rot}\vec{E} + d_1 \operatorname{rot}\vec{H} + \\ + b_2\hat{p}_a^2\vec{E} + d_2\hat{p}_a^2\vec{H} + b_4(\hat{p}_a^2)^2\vec{E} + d_4(\hat{p}_a^2)^2\vec{H},$$

где a, b, c, d — постоянные величины или функции от инвариантов электромагнитного поля $z_1 = \vec{E}\vec{H}$ и $z_2 = \vec{E}^2 - \vec{H}^2$. К этим уравнениям можно добавить условия типа $\operatorname{div}\vec{H} = 0$ или другие граничные условия, диктуемые конкретной физической задачей.

20. Система уравнений второго порядка

$$\left(\hat{p}_0^2 - \hat{p}_a^2\right)\vec{E} = f_1(z_1, z_2)\vec{E} + f_2(z_1, z_2)\vec{H},$$

$$\left(\hat{p}_0^2 - \hat{p}_a^2\right)\vec{H} = g_1(z_1, z_2)\vec{E} + g_2(z_1, z_2)\vec{H}.$$

21. Уравнения

$$\hat{p}_\mu^2\vec{E} = 0, \qquad \hat{p}_\mu^2\vec{H} = 0,$$

со всевозможными дополнительными условиями (например, типа $\operatorname{div}\vec{H} = \operatorname{div}\vec{E}$), при которых вся система уравнений будет совместна и инвариантна относительно конформной группы, или группы Лоренца, или других групп преобразований в четырехмерном пространстве.

22. Уравнение Дирака в кривом пространстве

$$\gamma^\mu(x)\nabla_\mu\Psi(t,x) = m\Psi(t,x), \qquad [\gamma_\mu(x), \gamma_\nu(x)]_+ = 2g_{\mu\nu}(x).$$

Замечание к задаче 4. С помощью нелиевского метода можно показать, что, в случае отсутствия массовых сил в уравнении Ламе, алгеброй инвариантности его является 10-мерная алгебра Пуанкаре. На самом деле это уравнение инвариантно относительно более широкой алгебры — 15-мерной комформной алгебры. При этом базисные элементы собственно конформной подалгебры являются некоторыми функциями базисных элементов алгебры Пуанкаре. Более подробно этот вопрос будет освещен в другом месте.

Замечание к задаче 17. Уравнения для специальных функций — уравнения второго порядка. Поэтому весьма эффективным способом установления алгебр инвариантности таких уравнений может служить идея факторизации оператора второго порядка в виде произведения двух операторов (операторов рождения и уничтожения) первого порядка. Оказывается, что в большинстве случаев эта идея конструктивно работает и дает простой алгоритм вычисления нетривиальных алгебр инвариантности уравнений для специальных функций.

Для всестороннего изучения теоретико-групповых свойств перечисленных уравнений естественно воспользоваться как лиевским, так и нелиевским методом. Такой синтез особенно плодотворен для систем дифференциальных уравнений.

§ 3. Двойственная инвариантность уравнений релятивистской квантовой механики

В работах [11, 12, 17] установлено, что уравнения Максвелла, Дирака, Клейна–Гордона–Фока (КГФ) и многие другие уравнения релятивистской квантовой механики инвариантны относительно пространственных и временных преобразований, не совпадающих с преобразованиями Лоренца. Важно подчеркнуть, что при этих преобразованиях временная координата не изменяется: $t' = t$. Ниже рассмотрим подробно эту нелоренцовскую инвариантность для уравнений КГФ.

1. Известно, что уравнение (КГФ)

$$\hat{L}\varphi(x) = 0, \qquad \hat{L} = \hat{p}_0^2 - \hat{p}_1^2 - \hat{p}_2^2 - m^2 \tag{57}$$

инвариантно относительно группы Пуанкаре. В терминах алгебры Ли это значит, что для десяти операторов $\{Q_A\} \equiv \{P_\mu, J_{\mu\nu}\}$ удовлетворяется условие инвариантности (7). Эти базисные элементы алгебры $P(1,3)$ имеют явную структуру:

$$P_\mu^I = \hat{p}_\mu = ig^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}, \qquad J_{\mu\nu}^I = x_\mu \hat{p}_\nu - x_\nu \hat{p}_\mu, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \tag{58}$$

Операторы (58) порождают преобразования Лоренца:

$$\begin{aligned} x'_\mu &= \exp\{iJ_{\alpha\beta}\theta_{\alpha\beta}\}x_\mu \exp\{-iJ_{\gamma\delta}\theta_{\gamma\delta}\} = \Lambda_\mu^\nu x_\nu, \\ x'_\mu &= \exp\{iP_\alpha a_\alpha\}x_\mu \exp\{-iP_\nu a_\nu\} = x_\mu + a_\mu, \end{aligned} \tag{59а}$$

$$p'_\mu = \exp\{iJ_{\alpha\beta}\theta_{\alpha\beta}\}p_\mu \exp\{-iJ_{\alpha\delta}\theta_{\alpha\delta}\} = \Lambda_\mu^\nu p_\nu, \quad \mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, 2, 3. \tag{59б}$$

Здесь $\theta_{\alpha\beta}$ — шесть действительных параметров, задающих общее преобразование Лоренца; a_ν — четыре действительных параметра, задающих группу трансляций в 4-мерном пространстве Минковского; Λ_μ^ν — элементы матрицы Лоренца Λ.

Квадратичные формы в конфигурационном $R^4(x)$ и импульсном $R^4(p)$ пространствах

$$S(t, \vec{x}) = x_0^2 - x_a^2 = (x'_0)^2 - (x'_a)^2 = S(t', \vec{x}\,'), \tag{60}$$

$$S(p_0, \vec{p}) = p_0^2 - p_a^2 = (p'_0)^2 - (p'_a)^2 = S(p'_0, \vec{p}\,'_a) = m^2 \tag{61}$$

инвариантны относительно преобразований (59).

Выясним такой вопрос: существует ли алгебра инвариантности уравнения КГФ , которая бы для пространственных $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и временной переменной $x_0 = t$ порождала геометрические преобразования, отличные от преобразований (59а)?

На поставленный вопрос имеется отрицательный ответ, если алгебру инвариантности уравнения (57) искать в классе операторов первого порядка. Это значит, что в подходе Ли такая алгебра не может быть найдена. Однако в более общем подходе (см. § 1), когда ищется алгебра инвариантности в классе интегродифференциальных операторов, существует положительный ответ на поставленный вопрос (теорема 7).

С помощью стандартной замены

$$\hat{p}_0\varphi = \varkappa\psi, \qquad \varphi = \psi_2, \qquad \hat{p}_0\varphi \neq 0, \tag{62}$$

где $\varkappa$ — постоянная величина, введенная из размерностных соображений, уравнение (57) сводится к эквивалентной системе двух уравнений первого порядка относительно временной производной:

$$\hat{p}_0\psi(t,\vec{x}) = \hat{\mathcal{H}}\psi(t,\vec{x}), \qquad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \tag{63}$$

$$\hat{\mathcal{H}}(\hat{p}) = \frac{1}{2\varkappa}\left(\hat{E}^2 + \varkappa^2\right)\sigma_1 - i\sigma_2\left(\hat{E}^2 - \varkappa^2\right), \qquad \hat{E} = \left(\hat{p}_a^2 + m^2\right)^{1/2}, \tag{64}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 7. *Уравнение (63) инвариантно относительно 10-мерной алгебры Ли с базисными элементами:*

$$\begin{gathered}P_0^{II} = \hat{\mathcal{H}}(\hat{p}), \qquad P_a^{II} = \hat{p}_a, \qquad J_{ab}^{II} = J_{ab} = x_a\hat{p}_b - x_b\hat{p}_a, \\ J_{0a}^{II} = x_0\hat{p}_a - \frac{1}{2}x_a\hat{\mathcal{H}}(\hat{p}) + \hat{\mathcal{H}}(\hat{p})x_a + \xi^{II}(\hat{p}), \\ \xi^{II} = -i\hat{p}_a\frac{\hat{\mathcal{H}}(\hat{p})}{2\hat{E}^2}, \qquad a,b,c = 1,2,3,\end{gathered} \tag{65}$$

которая порождает нелоренцовские преобразования

$$x_a' = \exp\{iJ_{ab}\theta_{0b}\}x_a\exp\{-iJ_{0c}\theta_{0c}\} \neq \Lambda_a^\mu x_\mu, \tag{66}$$

$$t' = \exp\{iJ_{0b}\theta_{0b}\}t\exp\{-iJ_{0c}\theta_{0c}\} = t. \tag{67}$$

Доказательство. Формулы (65) задают явную структуру операторов $\{Q_A\} \equiv \{P_0^{II}, P_a^{II}, J_{ab}^{II}, J_{0a}^{II}\}$, поэтому в справедливости первой части теоремы можно убедиться непосредственной проверкой условий (7) и (11). Условие инвариантности в данном случае имеет вид

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{\mathcal{H}}(\hat{p}), Q_A\right]_- \psi(t,\vec{x}) = 0, \qquad A = 1,2,\ldots,10. \tag{68}$$

Более простой и элегантный путь доказательства, указывающий метод нахождения операторов (65), состоит в реализации алгоритма § 1 для уравнения (63).

С помощью невырожденного преобразования (см. [12])

$$\hat{W}(\hat{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + \sigma_3\frac{\mathcal{H}(\hat{p})}{\hat{E}(\hat{p})}\right], \tag{69}$$

уравнение (63) преобразуется к двум незацепляющимся уравнениям

$$i\frac{\partial\Phi(t,\vec{x})}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}'(\hat{p})\Phi(t,\vec{x}), \tag{70}$$

$$\hat{\mathcal{H}}(\hat{p}) = \sigma_3\hat{E}(\hat{p}), \qquad \hat{W}(\hat{p})\psi = \Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}. \tag{71}$$

Условие инвариантности для уравнения (70) имеет вид

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{\mathcal{H}}'(\hat{p}), Q'_A\right]_- \Phi = 0. \tag{72}$$

Теперь легко убедиться, что операторы

$$\begin{aligned} &P_0^{(2)} = \hat{\mathcal{H}}'(\hat{p}) = \sigma_3 \hat{E}, \qquad P_a^{(2)} = \hat{p}_a, \qquad J_{ab}^{(2)} = J_{ab}, \\ &J_{0a}^{(2)} = x_a \hat{p}_a - \frac{1}{2}\{x_a \hat{\mathcal{H}}'(\hat{p}) + \hat{\mathcal{H}}'(\hat{p}) x_a\}, \qquad x_0 = t \end{aligned} \tag{73}$$

удовлетворяют условию (72) и образуют 10-мерную алгебру Пуанкаре. Явная структура операторов (65), удовлетворяющих, очевидно, условию (68), получается из операторов (73) с помощью формулы (23), т.е.

$$P_a^{II} = \hat{W}^{-1}\hat{\mathcal{H}}' W, \qquad P_a^{II} = P_a^{(2)}, \qquad J_{ab}^{II} = J_{ab}^{(2)}, \qquad J_{0a}^{II} = \hat{W}^{-1} J_{0a}^{(2)} \hat{W}. \tag{74}$$

Осталось показать, что операторы (65) порождают нелоренцовские преобразования (66), (67) и что при этих преобразованиях время не изменяется. Последний факт является следствием соотношений

$$[x_0, J_{0a}^{II}]_- = 0, \qquad [x_a, J_{0b}^{II}]_- \neq -i g_{ab} x_0. \tag{75}$$

Здесь же сразу заметим, что аналогичные операторы из алгебры (58) приводят к совершенно другим соотношениям:

$$[x_0, J_{0a}^{I}]_- = i P_a^{I}, \qquad [x_a, J_{0b}^{I}]_- = -i g_{ab} x_0. \tag{76}$$

Соотношения (76) говорят о том, что операторы (58) порождают лоренцовские преобразования, при которых время, конечно, изменяется. Теорема 7 доказана.

Следствие 1. Квадратичная форма (60) неинвариантна относительно преобразований (66), (67).

Следствие 2. Если с помощью операторов (65) найти соответствующие формулы преобразования для энергии $\hat{E}$ и импульса $\hat{p}_a$ частицы, то такие преобразования совпадут с обычными преобразованиями Лоренца, а значит относительно них форма (61) инвариантна.

Из приведенного следует такой общий вывод. Уравнение КГФ, как и всякое пуанкаре-инвариантное уравнение для свободной частицы с фиксированной массой (или нулевой), обладает двойственной (дуальной) инвариантностью. С одной стороны, оно инвариантно относительно преобразований Лоренца, сохраняющих квадратичные формы как в конфигурационном (60), так и в импульсном (61) пространствах. С другой стороны, уравнения КГФ инвариантны относительно преобразований (66), (67), которые н е сохраняют формы (60). Причина такой дуальности (57) заключена в двойственной природе оператора $i\dfrac{\partial}{\partial t}$. В пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ он обладает сплошным спектром, лежащим на всей действительной оси. Однако в пространстве решений уравнения (57) или (63) он имеет такой же спектр, как и оператор $\hat{\mathcal{H}}(\hat{p})$. Спектр оператора $\hat{\mathcal{H}}(\hat{p})$ лежит так же на действительной оси, но имеет лакуну на интервале $(-m, m)$.

Примером релятивистского уравнения, не обладающего двойственной симметрией указанного типа, может служить уравнение с собственным временем (см. [12]):

$$\frac{\partial^2\varphi(\tau,t,\vec{x})}{\partial\tau^2} = \left(\hat{p}_0^2 - \hat{p}_a^2\right)\varphi(\tau,t,\vec{x}). \tag{77}$$

В (77) оператор $\hat{p}_0$ входит "на равных правах" с операторами $\hat{p}_a$, а значит временная переменная действительно никак не выделена по сравнению с пространственными переменными. Уравнение (77), в отличие от КГФ, не описывает движение частицы с фиксированной массой, поскольку спектр оператора $\hat{p}_0^2 - \hat{p}_a^2$ сплошной и лежит на всей действительной оси.

Замечание 6. Уравнение (70), кроме алгебры (73), инвариантно относительно алгебры (58).

Для установления дуальной инвариантности уравнения Дирака (4) (теоремы типа 7) нужно дословно повторить доказательство теоремы 7. При этом необходимо воспользоваться преобразованием (33) и уравнением (8). Очевидно, что уравнение (34) инвариантно относительно алгебры (73), в которой сделана замена двухмерной матрицы σ_3 на четырехмерную матрицу γ_0. В квантовой теории часто рассматривают, кроме системы (34), еще и сопряженную к ней систему. Алгеброй инвариантности такой 8-мерной системы является, например, алгебра Ли группы $O(6) \supset U(2) \otimes U(2)$ [8, 9, 19].

1. Lorentz G.A., Electromagnetic phenomena in a system moving with any velosity smaller then that of light, *Proc. Acad. Sci.*, Amsterdam, 1904, **6**, 809–830.
2. Poincare H., Sur la dynamique de l'electron, *Comptes Rendus Acad. Sci.*, 1905, **140**, 1504–1506.
3. Poincare H., Sur la dynamique de l'electron, *Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo*, 1906, **21**, 129–160.
4. Bateman H., The transformation of the electro-dynamical equations, *Proc. London Math. Soc.*, 1909, **8**, 223–264.
5. Cunningham E., The Principile of Relativity in Electromagnetics on Extension thereof, *Proc. London Math. Soc.*, 1909, **8**, 77–97.
6. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
7. Ибрагимов Н.Х., Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений, Новосибирск, Наука, 1967, 59 с.
8. Fushchych W.I., On additional invariance of relativistic equations of motion, Preprint 70-32E, Kiev, Institute Theoretical Physics, 1970, 16 p.
9. Фущич В.И., О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения, *Теор. и мат. физика*, 1971, **7**, № 1, 3–12.
10. Fushchych W.I., P, T, C-properties of the Poincaré invariant equations for massive particles, *Lett. Nuovo Cimento*, 1973, **6**, № 4, 135–137.
11. Fushchych W.I., On the additional invariance of the Dirac and Maxwell equations, *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **11**, № 10, 508–512.
12. Фущич В.И., О дополнительной инвариантности уравнения Клейна–Гордона–Фока, *ДАН СССР*, 1976, **230**, № 3, 570–573.
13. Фущич В.И., Сегеда Ю.Н., О группах инвариантности некоторых уравнений релятивистской квантовой механики, *Укр. мат. журн.*, 1976, **28**, № 6, 844–849.
14. Никитин А.Г., Сегеда Ю.Н., Фущич В.И., О дополнительной инвариантности уравнений Кеммера–Дэффина и Рариты–Швингера, *Теор. и мат. физика*, 1976, **29**, № 1, 82–92.

15. Сегеда Ю.Н., О дополнительной инвариантности уравнений Максвелла, В кн.: Краевые задачи электродинамики проводящих сред, Киев, 1976, 218–224.

16. Фущич В.И., Сегеда Ю.Н., О новой алгебре инвариантности уравнения Шредингера, *ДАН СССР*, 1977, **232**, № 4, 801–802.

17. Фущич В.И., Групповые свойства дифференциальных уравнений квантовой механики, В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний (посвященной 60-летию акад. АН УССР Ю.А. Митропольского), Киев, 1977, 75–87.

18. Фущич В.И., Онуфрийчук С.П., О группах инвариантности одного класса счетной системы уравнений первого порядка с частными производными, *ДАН СССР*, 1977, **235**, № 5, 1056–1059.

19. Fushchych W.I., Nikitin A.G., On the тew invariance group of the Dirac and Kemmer–Duffin–Petiau equations, *Lett. Nuovo Cimento*, 1977, **19**, № 9, 347–352.

20. Фущич В.И., Никитин А.Г., О группе инвариантности квазирелятивистского уравнения движения, *ДАН СССР*, 1978, **238**, № 1, 46–49.

21. Fushchych W.I., Nikitin A.G., On the invariance groups of relativistic equations for the external fields, *Lett. Nuovo Cimento*, 1978, **21**, № 16, 541–546.

22. Фущич В.И., Никитин А.Г., Пуанкаре-инвариантные уравнения движения для частиц произвольного спина, *Физика элементарных частиц и атомного ядра (ЭЧАЯ)*, 1978, **9**, вып. 3, 501–553.

23. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Conformal invariance of relativistic equations for arbitrary spin particles, *Letters in Mathematical Physics*, 1978, **2**, 471–475.

24. Шубин М.А., Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, М., Наука, 1978, 280 с.

25. Pryce M.H.L., The mass-centre in the restricted theory of relativity and its connection with the quantum theory of elementary particles, *Proc. Roy. Soc. London*, 1946, **195**, № 1040, 62–81.

26. Foldy L.L., Wouthuysen S.A., On the Dirac theory of spin $\frac{1}{2}$ particles and its non-relativistic limit, *Phys. Rev.*, 1950, **78**, № 1, 29–36.

27. Салогуб В.А., Сокур Л.П., О групповых свойствах некоторых галилеевски-инвариантных систем дифференциальных уравнений, В кн.: Теоретико-групповые методы в математической физике, Киев, 1978.

28. Остроградский М.В., Мемуар о дифференциальных уравнениях, относящихся к изопериметической задаче, Полное собр. тр.: В 3-х т., Киев, Изд. АН УССР, 1961, т. 2, 139–233.

29. Фущич В.И., Кривский И.Ю., О волновых уравнениях в 5-пространстве Минковского, Препринт ИТФ-68-72, Ин-т теор. физики, 1968, 38 с.

30. Фущич В.И., О представлениях группы де Ситтера, *Украинский физический журнал*, 1966, **9**, 907–909.

31. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., On representation of the inhomogeneous de Sitter group and equation in five-dimensional Minkovsky space, *Nuclear Physics B*, 1969, **14**, № 2, 321–330.

32. Кривский И.Ю., Романенко Г.Д., Фущич В.И., Уравнения типа Кеммера–Дэффина в пятимерном пространстве Минковского, *Теор. и мат. физика*, 1969, **1**, № 2, 242–250.

33. Fushchych W.I., On the CP-noninvariant equations for the particles with zero mass, *Nuclear Physics B*, 1970, **21**, 321–330.

34. Фущич В.И., Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе. I, *Теор. и мат. физика*, 1971, **4**, № 3, 360–382.

35. Сокур Л.П., Фущич В.И., Об уравнениях движения, инвариантных относительно группы $P(1,n)$. II, *Теор. и мат. физика*, 1971, **6**, № 3, 348–362.

36. Фущич В.И., Грищенко А.Л., Никитин А.Г., О релятивистских уравнениях движения без "лишних" компонент, *Теор. и мат. физика*, 1971, **8**, № 2, 192–205.

37. Никитин А.Г., Релятивистские уравнения движения для системы с переменным спином, *Укр. физ. журн.*, 1973, **18**, № 10, 1605–1614.

38. Никитин А.Г., О нерелятивистском пределе уравнений без лишних компонент, *Укр. физ. журн.*, 1974, **19**, № 6, 1000–1005.

39. Fushchych W.I., On a motion equation for two particles in relativistic quantum mechanics, *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **10**, № 4, 163–167.

40. Fushchych W.I., Nikitin A.G. On the Poincaré-invariant equations for particles with variable spin and mass, *Reports on Math. Phys.*, 1975, **8**, № 1, 33–48.

41. Фущич В.И., Никитин А.Г., Юрик И.И., Редукция представлений группы движений $(n+1)$-мерного пространства Минковского по группе Пуанкаре, Препринт 75.5, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1975, 32 с.

42. Фущич В.И., Никитин А.Г., Дифференциальные уравнения движения первого и второго порядка для частиц с произвольным спином, Препринт 77.1, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1977, 48 с.

43. Никитин А.Г., Фущич В.И., Пуанкаре-инвариантные дифференциальные уравнение для частиц произвольного спина, *Теор. и мат. физика*, 1978, **34**, № 3, 319–333.

44. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Salogub V.A., On the Galilean-invariant equations for particles with arbitrary spin in non-relativistic mechanics, *Lett. Nuovo Cimento*,1975, **14**, № 13, 483–488.

45. Fushchych W.I., Nikitin A.G., On the Galilean-invariant equations for particles with arbitrary spin, *Lett. Nuovo Cimento*, 1976, **16**, № 3, 81–85.

46. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Salogub V.A., On the non-relativistic motion equation in the Hamiltonian form for arbitrary spin particles, *Reports on Math. Phys.*, 1978, **13**, № 2, 175–185.

47. Федорчук В.М., Непрерывные подгруппы неоднородной группы де Ситтера, Препринт 78.18, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1978, 33 с.

48. Онуфрийчук С.П., Пуанкаре-ковариантные счетные системы дифференциальных уравнений первого порядка, Препринт 78-29, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1978, 36 с.