О новой алгебре инвариантности свободного уравнения Шредингера

В.И. ФУЩИЧ, Ю.Н. СЕГЕДА

В [1, 2] установлено, что максимальной кинематической группой инвариантности свободного уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial\Psi(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = H\Psi(t,\boldsymbol{x}); \qquad H = \frac{p_a^2}{2m}, \qquad p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad a = 1,2,3, \tag{1}$$

является 12-параметрическая некомпактная группа Ли, содержащая в качестве подгруппы группу Галилея. Базисные элементы алгебры Ли этой группы инвариантности (максимальной кинематической алгебры инвариантности) являются дифференциальными операторами 1-го порядка.

В [3] найдена алгебра инвариантности уравнения (1) в классе дифференциальных операторов 2-го порядка, содержащая, кроме элементов максимальной кинематической алгебры инвариантности, еще симметричные квадратичные формы от элементов алгебры Галилея. В связи с этими результатами возникает естественный вопрос: существует ли алгебра инвариантности уравнения (1) в других классах операторов?

Одним из авторов настоящей заметки показано [4–6], что уравнения Максвелла, Дирака и Клейна–Гордона обладают дополнительной инвариантностью, отличной от лоренц-инвариантности. При этом важно подчеркнуть, что базисные элементы этой новой алгебры инвариантности являются интегродифференциальными операторами. Этот результат говорит о том, что имеется возможность искать новую алгебру инвариантности уравнения (1) в классе интегродифференциальных операторов.

Ниже дан положительный ответ на поставленный выше вопрос.

Задача о нахождении алгебры инвариантности уравнения (1) состоит в описании и явном построении всевозможных (в том или ином классе) операторов Q_A, удовлетворяющих условию

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - H, Q_a\right]_- \Psi(t,\boldsymbol{x}) = 0, \tag{2}$$

где $\{A\}$ — некоторое множество индексов.

Теорема. *Алгеброй инвариантности уравнения Шредингера (1) является алгебра Ли, изоморфная алгебре Ли группы Лоренца $SO(1,3)$.*

Доказательство. Как уже упоминалось, условия (2) выполняются для базисных элементов алгебры Ли группы Галилея

$$P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a,$$
$$G_a = tp_a - mx_a, \qquad M = mE, \qquad [x_a, p_b] = i\delta_{ab}, \qquad a,b = 1,2,3,$$

E — единичный reратор.

Доклады Академии наук СССР, 1977, **232**, № 4, С. 800–801.

Рассмотрим такой интегродифференциальный оператор

$$J_{0a} = \frac{1}{2m}(pG_a + G_a p) = t\tilde{p}_a - \frac{1}{2}(x_a p + p x_a),$$
$$\tilde{p}_a \equiv p_a p/m; \qquad p = (p_a^2)^{1/2} = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{1/2}. \tag{3}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что операторы $\{J_{ab}, J_{0a}\}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли группы $SO(1,3)$:

$$[J_{ab}, J_{cd}]_- = i(\delta_{ac}J_{bd} - \delta_{bc}J_{ad} + \delta_{bd}J_{ac} - \delta_{ad}J_{bc}),$$
$$[J_{ab}, J_{0c}]_- = i(\delta_{ac}J_{0b} - \delta_{bc}J_{0a}), \qquad [J_{0a}, J_{0b}]_- = -iJ_{ab}.$$

Так как условия (2) выполняются для операторов p_a и для операторов G_a, очевидно, что оно будет выполняться и для функций J_{0a} от этих операторов. Установлением этого факта и доказана теорема.

Приведенный результат, конечно, не означает, что уравнение (1) инвариантно относительно однородных преобразований Лоренца. Он означает лишь то, что на множестве решений уравнения (1) реализуется какое-то представление алгебры Ли группы $SO(1,3)$, базисные элементы которой задаются формулами (3). Последний факт вытекает из того, что операторы J_{0a} порождают конечные преобразования координаты и импульса, отличные от преобразований Лоренца. Действительно,

$$x'_a = \exp(iJ_{0b}\theta_b)x_a \exp(-iJ_{0c}\theta_c) = x_a - (\boldsymbol{nx})n_a +$$
$$+t\left[\frac{p'_a - p_a}{m} - \frac{(\boldsymbol{pn})p}{mp'} + \frac{(\boldsymbol{pn})}{m}n_a\right] + \frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{nx})n_a\frac{p}{p'} + \frac{p}{p'}(\boldsymbol{nx})n_a\right],$$
$$x'_0 = t' = t, \qquad p'_a = pn_a \operatorname{sh}\theta + (pn)n_a \operatorname{ch}\theta,$$
$$p' = p\operatorname{ch}\theta + (pn)\operatorname{sh}\theta, \qquad (pn) = \pm p,$$

где $n_a = \theta_a/\theta$, $\theta = (\theta_a^2)^{1/2}$, $n_a^2 = 1$.

Авторы благодарят А.Г. Никитина за полезные дискуссии.

1. Hagen C.R., *Phys. Rev. D*, 1972, **5**, 377.
2. Niederer U., *Helv. Phys. Acta*, 1972, **45**, № 5, 802.
3. Boyer C.P., Kalnins E.G., Miller W. jr., *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 3, 499.
4. Фущич В.И., *Теор. и мат. физ.*, 1971, **7**, № 1, 3–12.
5. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **11**, № 10, 508–509.
6. Фущич В.И., *ДАН*, 1976, **230**, № 3, 570–573.