О группах инвариантности одного класса счетной системы уравнений первого порядка с частными производными

В.И. ФУЩИЧ, С.П. ОНУФРИЙЧУК

В работах [1–3] предложен метод канонических преобразований для изучения групповых свойств дифференциальных уравнений квантовой механики, который отличается от классического метода Ли. Основное отличие состоит в том, что базисные элементы алгебры инвариантности того или иного уравнения могут быть интегродифференциальными операторами, в то время как в методе Ли такие операторы не могут возникать по самой постановке задачи.

С помощью канонических преобразований установлены новые группы инвариантности, отличные от групп Лоренца и Пуанкаре, для уравнений Максвелла и Дирака [1, 2, 4], Клейна–Гордона [3] и Кеммера–Дэффина [5]. Все эти уравнения можно представить как конечную систему уравнений первого порядка в частных производных вида

$$A_\mu p^\mu \Psi(t, x_1, x_2, x_3) + B\Psi(t, x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{1}$$

где по повторяющемуся индексу $\mu = 0, 1, 2, 3$ подразумевается суммирование; A_μ, B — конечные квадратные матрицы, удовлетворяющие определенным свойствам; Ψ — вектор-столбец той же размерности, что и A_μ, B;

$$p_0 = i\partial/\partial t, \qquad p_a = -i\partial/\partial x_a, \quad a = 1, 2, 3.$$

Цель настоящей работы изучить методом канонических преобразований групповые свойства уравнений типа (1) в том случае, когда коэффициенты A_μ, B являются бесконечномерными матрицами специального вида. Будут установлены новые группы (алгебры) инвариантности для бесконечной системы типа (1), которые описывают релятивистскую систему с бесконечным числом степеней свободы (по спиновым индексам).

Далее будут рассматриваться такие бесконечные системы (1), коэффициенты которых являются квадратичными функциями от операторов (матриц), удовлетворяющих коммутационным соотношениям алгебры Гейзенберга

$$[\hat{q}_a, \hat{q}_b]_- = iC_{ab}, \qquad a, b = 1, 2, \ldots, 8, \tag{2}$$

где C_{ab} — матричные элементы восьмирядной матрицы

$$C = \begin{pmatrix} O_4 & I_4 \\ -I_4 & O_4 \end{pmatrix}, \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Доклады Академии наук СССР, 1977, **235**, № 5, С. 1056–1059.

Хорошо известно, что перестановочные соотношения Гейзенберга (2) могут быть реализованы либо в виде бесконечных матриц, либо в виде операторов умножения на независимую переменную и операторов дифференцирования. В первом случае приходим к представлению Гейзенберга, во втором — к представлению Шредингера. Так как работать с бесконечными матрицами крайне неудобно, в дальнейшем используем представление Шредингера. Это означает, что величины A_μ, B в (1) есть некоторые функции от некоммутирующих операторов $\hat{q}_a$.

Рассмотрим уравнение первого порядка в частных производных с операторными коэффициентами (или бесконечными матрицами) вида

$$i\frac{\partial\Psi(\tau,x,q)}{\partial\tau} = (\beta_\mu p^\mu + \beta_5\varkappa)\Psi(\tau,x,q), \tag{4}$$

где операторные коэффициенты β_μ являются следующими функциям от $\hat{q}_a$:

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{1}{4}\left(\hat{q}_1^2+\hat{q}_2^2+\hat{q}_3^2+\hat{q}_4^2-\hat{q}_5^2-\hat{q}_6^2-\hat{q}_7^2-\hat{q}_8^2\right),\\
\beta_1 &= \frac{1}{4}\left(\hat{q}_1^2-\hat{q}_2^2-\hat{q}_3^2+\hat{q}_4^2+\hat{q}_5^2-\hat{q}_6^2-\hat{q}_7^2+\hat{q}_8^2\right),\\
\beta_2 &= \frac{1}{2}\left(-\hat{q}_1\hat{q}_2+\hat{q}_3\hat{q}_4-\hat{q}_5\hat{q}_6+\hat{q}_7\hat{q}_8\right),\\
\beta_3 &= \frac{1}{2}\left(\hat{q}_1\hat{q}_3+\hat{q}_2\hat{q}_4+\hat{q}_5\hat{q}_7+\hat{q}_6\hat{q}_8\right),\\
\beta_5 &= -\frac{1}{2}\left(\hat{q}_1\hat{q}_5+\hat{q}_2\hat{q}_6+\hat{q}_7\hat{q}_3+\hat{q}_8\hat{q}_4\right),
\end{aligned}\tag{5}$$

τ — собственное время, $\varkappa$ — произвольный параметр, $x \equiv (x_0,x_1,x_2,x_3)$ — точка в 4-мерном пространстве Минковского, $q \equiv (q_1,q_2,q_3,q_4)$, $-\infty < q_i < \infty$, $i = 1,2,3,4$; q_i — собственные значения операторов $\hat{q}_i$. В дальнейшем "крышку" над операторами $\hat{q}_a$ будем опускать.

Уравнение (4) является обобщением известных релятивистских уравнений Майорана [6], Намбу [7], Дирака [8], описывающих физические системы с бесконечным числом спиновых и массовых состояний.

Уравнение (4), как и уравнение Майорана [6], инвариантно относительно преобразований из группы Пуанкаре $P(1,3)$. Выясним теперь такой вопрос: существуют ли более широкие (или другие) группы инвариантности уравнения (4), чем группа $P(1,3)$? Положительный ответ на этот вопрос дает

Теорема 1. *Уравнение (4) инвариантно относительно 16-мерной алгебры Ли, базисные элементы которой задаются операторами:*

$$P_\mu = p_\mu = ig_{\mu\nu}\partial/\partial x_\nu, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \tag{6}$$

$$L_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}(p), \tag{7}$$

где $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор с компонентами $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$,

$g_{\mu\nu} = 0$, если $\mu \neq \nu$; компоненты тензорных операторов $S_{\mu\nu}$ равны

$$
\begin{aligned}
&S_{01} = \frac{1}{2}(q_1q_5 - q_2q_6 - q_3q_7 + q_4q_8), \quad S_{02} = \frac{1}{2}(-q_1q_6 - q_2q_5 + q_3q_8 + q_4q_7),\\
&S_{03} = \frac{1}{2}(q_1q_7 + q_2q_8 + q_3q_5 + q_4q_6), \quad S_{12} = \frac{1}{2}(-q_1q_6 + q_2q_5 - q_3q_8 + q_4q_7),\\
&S_{13} = \frac{1}{2}(q_1q_7 - q_2q_8 - q_3q_5 + q_4q_6), \quad S_{23} = \frac{1}{2}(-q_1q_8 - q_2q_7 + q_3q_6 + q_4q_5),
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\eta_{\mu\nu} = \frac{(L-\varkappa)}{LL_0^2}(p_\mu S_{\nu\rho}p^\rho - p_\nu S_{\mu\rho}p^\rho) - \frac{1}{L}(p_\mu S_{5\nu} - p_\nu S_{5\mu}),
\tag{9}
$$

$$
L \equiv (p_\mu p^\mu + \varkappa^2)^{1/2},
\tag{10}
$$

$$
L_0 \equiv (p_\mu p^\mu)^{1/2}.
\tag{11}
$$

Доказательство. Если не ставить вопрос о том, каким способом найдены операторы (7), то в справедливости теоремы можно убедиться непосредственной проверкой. Однако это слишком громоздко и утомительно. Более короткий и конструктивный путь, указывающий способ нахождения операторов (7), состоит в том, чтобы, как и в случае конечномерных уравнений [1–5], преобразовать уравнение (4) к каноническому (диагональному) виду. Такое преобразование осуществляется при помощи унитарного оператора

$$
W = \exp\left\{-i\frac{S_{5\mu}p^\mu}{L_0}\Theta\right\}, \qquad \Theta = \operatorname{arctg}\frac{L_0}{\varkappa},
\tag{12}
$$

где компоненты векторного оператора $S_{5\mu}$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
&S_{50} = \frac{1}{4}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 + q_7^2 + q_8^2),\\
&S_{51} = \frac{1}{4}(q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 - q_5^2 + q_6^2 + q_7^2 - q_8^2),\\
&S_{52} = \frac{1}{2}(-q_1q_2 + q_3q_4 + q_5q_6 - q_7q_8),\\
&S_{53} = \frac{1}{2}(q_1q_3 + q_2q_6 - q_5q_7 - q_6q_8).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

После преобразования (12) уравнение (4) приводится к виду

$$
i\frac{\partial\Phi(\tau,x,q)}{\partial\tau} = \beta_5 L\Phi(\tau,x,q), \qquad \Phi(\tau,x,q) = W(p)\Psi(\tau,x,q).
\tag{14}
$$

Так как операторы $S_{\mu\nu}$ коммутируют с оператором β_5, то уравнение (14) инвариантно относительно преобразований, генерируемых операторами $S_{\mu\nu}$. Для завершения доказательства остается только найти явный вид операторов $S_{\mu\nu}$ в Ψ-представлении. Вычисляя $L_{\mu\nu} \equiv W^{-1}S_{\mu\nu}W$, получаем операторы (7).

Замечание 1. Операторы (6), (7) удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$
[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}]_- = i(g_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}L_{\mu\rho}),
\tag{15}
$$

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}]_- = i(g_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}L_{\mu\rho}). \quad (16)$$

Замечание 2. Если в уравнении (4) положить $\varkappa = 0$ и на функцию Ψ наложить пуанкаре-инвариантное условие

$$i\frac{\partial\Psi(\tau, x, q)}{\partial\tau} = m\Psi(\tau, x, q), \quad (17)$$

где m — фиксированный параметр, то система уравнений (4), (17) совпадает с обобщенным уравнением Майорана в форме Намбу [7]. Теорема 1 сохраняет силу и в этом случае.

Если же теперь операторы β_μ, $S_{\rho\sigma}$ выбрать в представлении Дирака [8], то из системы уравнений (4), (17) получим обычное уравнение Майорана в форме Дирака [8]

$$(\beta_\mu p^\mu - m)\Psi(x, q_1, q_2) = 0. \quad (18)$$

Используя результаты работ [1, 4], можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Если на множество решений уравнения (4) наложить дополнительное условие $p_\mu p^\mu \Psi > 0$ (или $p_\mu p^\mu < 0$), то такое уравнение с дополнительным условием инвариантно относительно алгебры Ли группы $SO(1,5)$ (или $SO(2,4)$).*

Из изложенного выше ясно, что метод канонических преобразований, который широко использовался Н.Н. Боголюбовым при построении теорий сверхтекучести и сверхпроводимости [9], весьма эффективно работает и при исследовании групповых свойств дифференциальных уравнений.

В заключение хотим выразить благодарность А.Г. Никитину за полезные советы и дискуссии.

1. Фущич В.И., *Теор. и мат. физ.*, 1971, **7**, № 1, 3–12; Препринт Ин-та теор. физ. АН УССР № 32Е Киев, 1970, 17 с.
2. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **11**, № 10, 508–512.
3. Фущич В.И., *ДАН*, 1976, **230**, № 3, 570–573.
4. Фущич В.И., Сегеда Ю.Н., *Укр. мат. журн.*, 1976, **28**, № 6, 844-849.
5. Никитин А.Г., Сегеда Ю.Н., Фущич В.И., *Теор. и мат. физ.*, 1976, **29**, № 1, 82–94.
6. Majorana E., *Nuovo Cimento*, 1932, **9**, № 2, 335;
   Fradkin D.M., *Am. J. Phys.*, 1966, **34**, 314.
7. Nambu Y., *Supplement of the Progress of Theoretical Physics (Japan)*, 1966, **12**, № 37–38, 368.
8. Dirac P.A.M., *Proc. Roy. Soc. London A*, 1971, **322**, 435;
   Dirac P.A.M., *Proc. Roy. Soc. London A*, 1972, **328**, 1.
9. Боголюбов Н.Н., *Изв. АН СССР, сер. физ.*, 1947, **11**, 67.