Дифференциальные уравнения движения первого и второго порядка для частиц с произвольным спином

В.И. ФУЩИЧ, А.Г. НИКИТИН

Выведены пуанкаре-инвариантные дифференциальные уравнения первого и второго порядка, описывающие движение свободной частицы с произвольным спином. Показано, что полученные уравнении допускают непротиворечивое обобщение на случай заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Точно решена задача о движении частицы произвольного спина в однородном магнитном поле. Найден в явном виде закон преобразования операторов координаты и спина частицы при переходе к новой инерциальной системе отсчета.

Введение

В последние годы вновь оживился интерес к теории релятивистских уравнений для частиц с произвольным спином. Этот интерес обусловлен экспериментальным открытием относительно стабильных частиц со спином $s > 1$, а также тем обстоятельством, что все обычно используемые уравнения для таких частиц оказались во многих отношениях не вполне удовлетворительными.

В работах [1–3] было показано, что явно ковариантные уравнения, описывающие движение свободных частиц со спином $s \geq 1$, приводят к различным противоречиям при обобщении на случай взаимодействия с внешним полем — сверхсветовой скорости распространения сигнала, комплексным значениям энергии частицы и другим парадоксам.

Причины этих трудностей хорошо известны. Они состоят в том, что явно ковариантные уравнения для частиц с высокими спинами либо включают производные по времени выше первого порядка, либо содержат лишние (нефизические) компоненты. Поэтому самый кардинальный способ преодоления упомянутых трудностей заключается в том, чтобы исходить из уравнений движения свободной частицы в форме Шредингера

$$H_s\Psi(t,\vec{x}) = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,\vec{x}), \tag{0.1}$$

где $\Psi(t,\vec{x})$ — $2(2s+1)$-компонентная волновая функция, H_s — гамильтониан частицы, зависящий от импульсов $p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}$, $a = 1,2,3$ и спиновых матриц.

Уравнения движения для частицы с произвольным спином s в форме (0.1) были получены в работах [4–6]. Несмотря на выделенность производной по времени, эти уравнения пуанкаре-инвариантны, поскольку операторы H_s удовлетворяют соотношениям

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - H_s, Q_i\right]_- \Psi(t,\vec{x}) = 0, \tag{0.2}$$

Препринт ИМ-77-3, Институт математики АН УССР, Киев, 1977, 48 с.

где Q_i — произвольный генератор группы Пуанкаре $P(1,3)$. Отличительной особенностью уравнений, полученных в [4–6], является то обстоятельство, что гамильтониан H_s определен в пространстве волновых функций $\Psi(t,\vec{x})$ со скалярным произведением

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x \; \Psi_1^+ \Psi_2, \tag{0.3}$$

в то время как в более ранних работах Вивера, Хаммера, Гуда и Метьюза с сотрудниками [7], в которых также рассматривались уравнения вида (0.1), скалярное произведение волновых функций имеет вид

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x \; \Psi_1^+ M \Psi_2, \tag{0.4}$$

где M — некоторый интегро-дифференциальный метрический оператор.

В работах Гуертина [8] подход [4, 5] получил дальнейшее развитие и были найдены новые уравнения вида (0.1) в пространстве с индефинитной метрикой, которые для нижайших значений спина $s = 0, 1$ совпадают с известными уравнениями Тамма–Сакаты–Такетани [9].

Найденные в [4–8] релятивистские гамильтонианы H_s при $s > \frac{1}{2}$ являются интегро-дифференциальными (нелокальными) операторами, что сильно затрудняет задачу обобщения уравнений (0.1) на случай взаимодействующих частиц. В [5] такая задача решена для заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле в предположении, что импульс частицы мал по сравнению с ее массой.

В настоящей работе получены дифференциальные уравнения движения в форме (0.1) для релятивистской частицы произвольного спина. С использованием алгебраического (неспинорного) подхода, развитого в работах [4, 5], найдены все возможные (с точностью до эквивалентности) релятивистские гамильтонианы H_s, принадлежащие классу дифференциальных операторов первого и второго порядка. Показано, что полученные уравнения допускают непротиворечивое обобщение на случай заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле. Исходя из найденных уравнений, точно решена задача о движении релятивистской частицы с произвольным спином в однородном магнитном поле.

Получены также релятивистские уравнения для безмассовых частиц с произвольным спином. Описанию таких частиц посвящено большое количество работ, опубликованных в последние годы [23]. Предложено большое количество (не всегда неэквивалентных) уравнений для безмассовых частиц и в то же время описаны не все возможные существенно различные типы таких уравнений. В настоящей работе найдены все возможные (с точностью до эквивалентности) пуанкаре-инвариантные уравнения для частиц с нулевой массой и исследованы их свойства относительно преобразований пространственной инверсии P, зарядового сопряжения C и обращения времени T.

1. Уравнения без лишних компонент

Дифференциальные уравнения движения частицы произвольного спина s мы получим, исходя из следующего представления для генераторов P_μ, $J_{\mu\nu}$ группы

$P(1,3)$

$$P_0 = H_s, \qquad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a},$$
$$J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \qquad J_{0a} = tp_a - \frac{1}{2}[x_a, H_s]_+ + \lambda_a, \tag{1.1}$$

где $[A,B]_+ = AB + BA$, H_s — неизвестный пока дифференциальный оператор, включающий производные по $\frac{\partial}{\partial x_a}$ не выше второго порядка,

$$S_{ab} = S_c = \begin{pmatrix} s_c & 0 \\ 0 & s_c \end{pmatrix}, \qquad (a,b,c) \ \text{— цикл } (1,2,3), \tag{1.2}$$

s_c — генераторы неприводимого представления $D(s)$ группы $O(3)$, λ_a — некоторый оператор, явный вид которого может быть определен из требования, чтобы генераторы (1.1) удовлетворяли алгебре Пуанкаре $P(1,3)$.

Представления вида (1.1) рассматривались в [8]. Однако уравнения для частицы с произвольным спином s полученные в [7], принадлежат при $s > 1$ классу нелокальных (интегро-дифференциальных) уравнений.

Определение. *Будем говорить, что уравнение (0.1) пуанкаре-инвариантно и описывает частицу с массой m и спином s, если генераторы P_a, $J_{\mu\nu}$ и гамильтониан H_s удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры $P(1,3)$ [4]*

$$[H_s, P_a]_- = [H_s, J_{ab}]_- = 0,$$
$$[J_{ab}, J_{cd}]_- = i(\delta_{ac}J_{bd} + \delta_{bd}J_{ac} - \delta_{ad}J_{bc} - \delta_{bc}J_{ad}), \tag{1.3}$$
$$[J_{ab}, J_{0c}]_- = i(\delta_{bc}J_{0a} - \delta_{ac}J_{0b}),$$

$$[H_s, J_{0a}]_- = ip_a, \qquad [J_{0a}, J_{0b}]_- = -iJ_{ab}, \qquad [P_a, J_{0b}] = i\delta_{ab}H_s, \tag{1.4}$$

$$P_\mu P^\mu = H_s^2 - p_a^2 = m^2, \tag{1.5}$$

$$W_\mu W^\mu \Psi = m^2 s(s+1)\Psi, \tag{1.6}$$

где введено обозначение $[A,B]_- = AB - BA$, W_μ — вектор Паули-Любанского, $W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\sigma\lambda}J_{\nu\sigma}P_\lambda$.

Таким образом, задача о нахождении всех неэквивалентных уравнений вида (0.1) сводится к отысканию операторов H_s и λ_a (зависящих от импульсов p_a и спиновых матриц S_a), удовлетворяющих системе соотношений (1.1)–(1.6).

Искомый дифференциальный оператор второго порядка H_s представим в виде разложения по спиновым матрицам и $2(2s+1)$-рядным матрицам Паули

$$H_s = h_0^{(s)} m + h_1^{(s)} + \frac{1}{m}h_2^{(s)}, \tag{1.7}$$

где

$$h_0^{(s)} = a_\mu^{(s)}\sigma_\mu, \qquad h_1^{(s)} = b_\mu^{(s)}\sigma_\mu,$$
$$h_2^{(s)} = c_\mu^{(s)}\sigma_\mu(\vec{S}\cdot\vec{P}) + d_\mu^{(s)}\sigma_\mu p^2, \qquad p^2 = \sum_{a=1}^{3} p_a^2, \tag{1.8}$$

σ_μ — $2(2s+1)$-рядные матрицы Паули, коммутирующие с $S_{ab}(1,2)$, $a_\mu^{(s)}$, $b_\mu^{(s)}$, $c_\mu^{(s)}$, $d_\mu^{(s)}$ — неизвестные коэффициенты. По повторяющемуся индексу μ подразумевается суммирование от 0 до 3.

Теорема 1. *Все возможные (с точностью до эквивалентности) дифференциальные операторы H_s, включающие производные не выше второго порядка и удовлетворяющие системе соотношений (1.1)–(1.6), задаются формулами:*

$$H_s=\sigma_1 m+\sigma_3 k_1\vec{S}\cdot\vec{p}+(\sigma_1-i\sigma_2)\left(\frac{p^2}{2m}-\frac{k^2(\vec{S}\cdot\vec{p})^2}{2m}\right),\quad s=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\ldots,\tag{1.9}$$

$$H_1=\sigma_1 m+(\sigma_1-i\sigma_2)\frac{p^2}{2m}-\left(ik_2\sigma_2+\sqrt{k_2(k_2+1)}\sigma_3\right)\frac{(\vec{S}\cdot\vec{p})^2}{m},\tag{1.10}$$

$$H_1=\sigma_1 m+k_3\sigma_3(\vec{S}\cdot\vec{p})+(\sigma_1-i\sigma_2)\frac{p^2}{2m}+\left[-k_3^2\sigma_1+i\sigma_2(2-k_3^2)\right]\frac{(\vec{S}\cdot\vec{p})^2}{2m},\tag{1.11}$$

$$H_{\frac{3}{2}}=\sigma_1\left(m+\frac{p^2}{2m}\right)+i\sigma_2\frac{k_4}{2m}\left[(\vec{S}\cdot\vec{p})^2-\frac{5}{4}p^2\right]+\sigma_3\sqrt{k_4^2-1}\frac{(\vec{S}\cdot\vec{p})^2}{2m},\tag{1.12}$$

$$\begin{gathered}H_{\frac{3}{2}}=\sigma_1\left[m+\frac{p^2}{2m}-\frac{k_5^2(\vec{S}\cdot\vec{p})^2}{2m}\right]+\sigma_3 k_5\vec{S}\cdot\vec{p}+\\+i\sigma_2\left[\left(\frac{5}{2}k_5^2-1\right)\frac{(\vec{S}\cdot\vec{p})^2}{2m}-\left(\frac{9}{4}k_5^2-1\right)\frac{p^2}{2m}\right],\end{gathered}\tag{1.13}$$

где k_l, $l=1,2,3,4,5$ — произвольные параметры.

Доказательство. Используя явный вид (1.1)–(1.2) генераторов группы $P(1,3)$, нетрудно убедиться, что гамильтониан (1.7), (1.8) удовлетворяет соотношениям (1.3) при произвольных значениях коэффициентов $a_\mu^{(s)}$, $b_\mu^{(s)}$, $c_\mu^{(s)}$, $d_\mu^{(s)}$.

Потребуем, чтобы гамильтониан (1.7) удовлетворял условию (1.5). Подставив (1.7) в (1.5) и приравнивая коэффициенты при линейно независимых слагаемых, приходим к системе уравнений

$$\begin{gathered}h_0^{(s)}\cdot h_0^{(s)}=1,\qquad [h_1^{(s)},h_2^{(s)}]_+=0,\qquad h_2^{(s)}\cdot h_2^{(s)}=0,\\ [h_0^{(s)},h_1^{(s)}]_+=0,\qquad h_1^{(s)}\cdot h_1^{(s)}+[h_0^{(s)},h_2^{(s)}]_+=p^2.\end{gathered}\tag{1.14}$$

Ввиду линейной независимости спиновых матриц S_a и матриц Паули σ_μ система соотношений (1.8), (1.14) эквивалентна системе уравнений второго порядка для коэффициентов $a_\mu^{(s)}$, $b_\mu^{(s)}$, $c_\mu^{(s)}$, $d_\mu^{(s)}$. Общее решение системы (1.8), (1.14) для произвольных значений s задается формулой (см. дополнение)

$$h_0^{(s)}=\sigma_1,\qquad h_1^{(s)}=\sigma_3 k_1(\vec{S}\cdot\vec{p}),\qquad h_2^{(s)}=\frac{1}{2}(\sigma_1-i\sigma_2)\left[p^2-k_1^2(\vec{S}\cdot\vec{p})^2\right],\tag{1.15}$$

где k_1 — произвольное комплексное число. В случаях $s=1$ и $s=\frac{3}{2}$, помимо (1.15) существует еще по два независимых решения

$$\begin{gathered}h_0^{(1)}=\sigma_1,\qquad h_1^{(1)}=0,\\ h_2^{(1)}=(\sigma_1-i\sigma_2)\frac{p^2}{2}-\left(ik_2\sigma_2+\sqrt{k_2(k_2+1)}\sigma_3\right)(\vec{S}\cdot\vec{p})^2,\end{gathered}\tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} & h_0^{(1)}=\sigma_1, \qquad h_1^{(1)}=\sigma_3 k_3(\vec{S}\cdot\vec{p}), \\ & h_3^{(1)}=\sigma_1\left(\frac{p^2}{2}-\frac{k_3^2(\vec{S}\cdot\vec{p})^2}{2}\right)+i\sigma_2\left[\left(1-\frac{k_3^2}{2}\right)(\vec{S}\cdot\vec{p})^2-\frac{p^2}{2}\right], \end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned} & h_0^{\left(\frac{3}{2}\right)}=\sigma_1, \qquad h_1^{\left(\frac{3}{2}\right)}=0, \\ & h_2^{\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{1}{2}\left\{\sigma_1 p^2+i\sigma_2 k_4\left[(\vec{S}\cdot\vec{p})^2-\frac{5}{4}p^2\right]+\sigma_3\sqrt{k_4^2-1}(\vec{S}\cdot\vec{p})^2\right\}, \end{aligned} \tag{1.18}$$

$$h_0^{\left(\frac{3}{2}\right)}=\sigma_1, \qquad h_1^{\left(\frac{3}{2}\right)}=\sigma_3 k_5(\vec{S}\cdot\vec{p}), \tag{1.19}$$

$$h_2^{\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{1}{2}\left\{i\sigma_2\left[\left(\frac{5}{4}k_5^2-1\right)(\vec{S}\cdot\vec{p})^2-\left(\frac{9}{4}k_5^2-1\right)p^2\right]+\sigma_1\left[p^2-k_5^2(\vec{S}\cdot\vec{p})^2\right]\right\},$$

где k_2, k_3, k_4, k_5 — произвольные комплексные числа.

Формулы (1.15)–(1.19) задают все возможные решения системы (1.8), (1.14) с точностью до преобразований эквивалентности, осуществляемых чисельными матрицами. Подставив (1.15)–(1.19) в (1.7) приходим к гамильтонианам (1.9)–(1.13).

Для завершения доказательства теоремы осталось только указать явный вид операторов λ_a, входящих в определение (1.1) генераторов J_{0a}, при котором операторы (1.1), (1.9)–(1.13) удовлетворяют соотношениям (1.4), (1.6). Можно убедиться непосредственной проверкой, что эти соотношения выполняются, если положить в (1.1)

$$\lambda_a=\left(1-\frac{k_1}{2}\right)\left[i\sigma_1 S_a-\frac{\sigma_1-i\sigma_2}{2m}(\vec{p}\times\vec{S})_a\right] \tag{1.20}$$

в случае, когда гамильтониан H_s имеет вид (1.9) и

$$\begin{aligned} & \lambda_a=-\frac{[S_{ab}p_b,H_s]_+}{E(E+m)}+i\frac{p_a(2E+B_s)}{2E^2B_s}-i\frac{[\dot{x}_a\sigma_1,H_s]_+}{2EB_s}-\frac{i[S_{ab}p_b\sigma_1,H_s]_+}{2(E+m)B_s}, \\ & B_s=2E+[H_s,\sigma_1]_+, \qquad \dot{A}=i[H_s,A]_-, \qquad E=\sqrt{p^2+m^2} \end{aligned} \tag{1.21}$$

в случае, когда гамильтониан H_s задается одной из формул (1.10)–(1.18). Теорема доказана.

Замечание 1. Операторы (1.9)–(1.13) включают как частные случаи гамильтониан Дирака для частицы с $s=\frac{1}{2}$ (формула (1.9) при $k_1=\pm 2$) и гамильтонианы Тамма–Сакаты–Такетани [9] для частиц с $s=0$ (формула (1.9)) и $s=1$ (формулы (1.10) при $k_2=-1$ и (1.11) при $k_3=0$).

Замечание 2. Гамильтониан (1.9) при $s=\frac{1}{2}$, k_1 — произвольное чисто мнимое число, рассматривался ранее в [10].

Замечание 3. Все генераторы группы $P(1,3)$, задаваемые формулами (1.1), (1.9), (1.20), принадлежат классу дифференциальных операторов. При $k_1=2$ генераторы J_{0a} (1.1), (1.20) принимают особо простой вид

$$J_{0a}=x_0p_a-\frac{1}{2}[x_a,H_s]_+. \tag{1.22}$$

Замечание 4. Гамильтонианы (1.9)–(1.13) и остальные генераторы группы $P(1,3)$, задаваемые формулами (1.1), (1.2), (1.20), (1.21), могут быть приведены к канонической форме Фолди–Широкова [11]. Это достигается посредством преобразования

$$\begin{aligned}
&P_0 \to P_0^k = VP_0V^{-1} = \sigma_1 E, \qquad P_a \to P_a^k = VP_aV^{-1} = p_a,\\
&J_{ab} \to J_{ab}^k = VJ_{ab}V^{-1} = x_ap_b - x_bp_a + S_{ab},\\
&J_{0a} \to J_{0a}^k = VJ_{0a}V^{-1} = tp_a - \frac{1}{2}[x_a, E]_+\sigma_1 - \sigma_1\frac{S_{ab}p_b}{E+m},
\end{aligned} \tag{1.23}$$

где операторы V задаются формулами

$$\begin{aligned}
&V = V_1V_2V_3,\\
&V_1 = \exp\left(\sigma_1\frac{\vec{S}\cdot\vec{p}}{p}\operatorname{arth}\frac{p}{E}\right), \qquad V_3 = \exp\left[(\sigma_1 - i\sigma_2)\left(\frac{k_1}{2} - 1\right)\frac{\vec{S}\cdot\vec{p}}{m}\right],\\
&V_2 = \frac{1}{\sqrt{Em}}\left[E\lambda^+ + m\lambda^- - 2\sigma_1\vec{S}\cdot\vec{p}\lambda^-\right], \qquad \lambda^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \sigma_3)
\end{aligned} \tag{1.24}$$

для гамильтонианов (1.9) и

$$V = \frac{E + \sigma_1 H_s}{\sqrt{2E^2 + E[H_s, \sigma_1]_+}} \tag{1.25}$$

для гамильтонианов (1.10)–(1.13).

Таким образом, мы нашли все возможные (с точностью до эквивалентности) релятивистские гамильтонианы H_s частицы с произвольным спином s, включающие произвольные не выше второго порядка. Оказалось, что такие гамильтонианы существуют дли любых значений s и задаются формулами (1.9)–(1.13).

Возникает естественный вопрос: существуют ли пуанкаре-инвариантные гамильтонианы для частиц с произвольным спином в классе дифференциальных операторов первого порядка? Задача описания таких гамильтонианов решается в следующем параграфе.

2. Дифференциальные гамильтоновы уравнения первого порядка

По аналогии с теорией Дирака для электрона, постулируем, что гамильтониан релятивистской частицы с произвольным спином является дифференциальным оператором, включающим производные по пространственным переменным не выше первого порядка. Общий вид такого оператора задается формулой

$$\mathcal{H}_s = \hat{\Gamma}_a^{(s)}p_a + \hat{\Gamma}_0^{(s)}m, \qquad p_a = -\frac{\partial}{\partial x_a}, \tag{2.1}$$

где $\hat{\Gamma}_\mu^{(s)}$ — некоторые численные матрицы.

Генераторы представления группы Пуанкаре, которое реализуется на решениях уравнения (0.1) с гамильтонианом (2.1), выберем в виде

$$\begin{aligned}
&P_0 = \mathcal{H}_s, \qquad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad J_{ab} = x_ap_b - x_bp_a + S_{ab},\\
&J_{0a} = x_0p_a - x_aP_a + S_{0a}, \qquad x_0 = t,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где $S_{\mu\nu}$ — матрицы, образующие конечномерное представление (не обязательно неприводимое) алгебры Лоренца $O(1,3)$. Представление (2.2) соответствует локальным преобразованиям волновой функции при переходе к новой инерциальной системе отсчета.

Определить все возможные гамильтонианы вида (2.1) означает найти все такие матрицы $\Gamma_\mu^{(s)}$ и $S_{\mu\nu}$, что операторы (2.1), (2.2) удовлетворяют алгебре Пуанкаре (1.3)–(1.6).

Потребуем, чтобы гамильтониан (2.1) удовлетворяя соотношению (1.5):

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_s^2 - p_s^2 \equiv \left(\hat{\Gamma}_a^{(s)}\right)^2 p_a^2 + \left(\hat{\Gamma}_0^{(s)}\right)^2 m^2 + \\ + \left[\hat{\Gamma}_0^{(s)}, \hat{\Gamma}_a^{(s)}\right]_+ m p_a + \left[\hat{\Gamma}_a^{(s)}, \hat{\Gamma}_b^{(s)}\right]_+ p_a p_b - p_a^2 = m^2.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Приравнивая в (2.3) линейно независимые слагаемые, заключаем, что матрицы $\hat{\Gamma}_\mu^{(s)}$ должны удовлетворять алгебре Клиффорда

$$\hat{\Gamma}_\mu^{(s)}\hat{\Gamma}_\nu^{(s)} + \hat{\Gamma}_\nu^{(s)}\hat{\Gamma}_\mu^{(s)} = 2\delta_{\mu\nu}. \tag{2.4}$$

Представления алгебры (2.4) хорошо известны и задаются матрицами размерности $2^n \times 2^n$, $n = 2, 3, \ldots$. При этом матрицы

$$\tau_{ab} = \frac{i}{2}\hat{\Gamma}_a^{(s)}\hat{\Gamma}_b^{(s)}, \qquad \tau_{0a} = \frac{i}{2}\hat{\Gamma}_a^{(s)} \tag{2.5}$$

реализуют 2^{n-2} кратно вырожденное представление $D\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus D\left(0, \frac{1}{2}\right)$ алгебры $O(1,3)$.

Определим теперь матрицы $S_{\mu\nu}$ из (2.2). Представим $S_{\mu\nu}$ в виде

$$S_{\mu\nu} = \tau_{\mu\nu} + j_{\mu\nu}, \tag{2.6}$$

где $j_{\mu\nu}$ — неизвестные матрицы, подлежащие определению. Подставив (2.1), (2.2), (2.5), (2.6) в (1.3), (1.4), получаем, что матрицы $j_{\mu\nu}$ должны удовлетворять соотношениям

$$[j_{\mu\nu}, j_{\lambda\rho}]_- = i(g_{\mu\rho}j_{\nu\lambda} + g_{\lambda\nu}j_{\mu\rho} - g_{\mu\lambda}j_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}j_{\mu\lambda}), \tag{2.7}$$

$$\left[j_{\mu\nu}, \hat{\Gamma}_\lambda^{(s)}\right]_- = [j_{\mu\nu}, \tau_{\lambda\rho}]_- = 0, \tag{2.8}$$

т.е. матрицы $j_{\mu\nu}$ должны реализовать конечномерное представление алгебры $O(1,3)$ и коммутировать с $\hat{\Gamma}_\mu^{(s)}$.

Рассмотрим случай, когда $j_{\mu\nu}$ образуют неприводимое представление $D(j,0)$ алгебры $O(1,3)$. Это означает, что

$$\begin{aligned}&j_{ab} = j_c, \qquad j_{0a} = -ij_a, \\ &[j_a, j_b]_- = ij_c, \qquad j_a^2 = j(j+1), \qquad (a,b,c) \quad \text{— цикл } (1,2,3).\end{aligned} \tag{2.9}$$

Тогда из (2.6), (2.8) по теореме Клебша–Гордона заключаем, что матрицы $S_{\mu\nu}$ должны реализовать представление

$$\left[D\left(\frac{1}{2},0\right) \oplus D\left(0,\frac{1}{2}\right)\right] \otimes D(j,0) = D\left(j+\frac{1}{2},0\right) \oplus D\left(j-\frac{1}{2},0\right) \oplus D\left(j,\frac{1}{2}\right). \tag{2.10}$$

При редукции (2.10) на алгебру $O(3)$ получаем представление (2.10)

$$D\left(j+\frac{1}{2}\right)\oplus D\left(j+\frac{1}{2}\right)\oplus D\left(j-\frac{1}{2}\right)\oplus D\left(j-\frac{1}{2}\right), \tag{2.10}$$

что соответствует двум возможным значениям спина

$$s_1=s=j+\frac{1}{2} \qquad \text{и} \qquad s_2=s-1=j-\frac{1}{2}. \tag{2.11}$$

Нетрудно подсчитать, что размерность матриц $S_{\mu\nu}$, входящих в представление (2.10), равна $8s\times 8s$; такова же размерность матриц $\hat{\Gamma}_\mu^{(s)}$ из (2.5), (2.6). При этом волновая функция $\Psi(t,\vec{x})$, удовлетворяющая уравнению (0.1) с гамильтонианом (2.1), должна иметь $8s$ компонент. Можно показать, что если матрицы $j_{\mu\nu}$ в (2.6) образуют неприводимое представление $D(j_1,j_2)$ алгебры $O(1,3)$, где $j_1\neq 0$ и $j_2\neq 0$ или приводимое представление этой алгебры, то при заданном фиксированном s размерность матриц $S_{\mu\nu}$ всегда будет больше, чем $8s\times 8s$.

Таким образом, гамильтониан (2.1) и операторы (2.2) удовлетворяют условиям пуанкаре-инвариантности (1.3)–(1.5), а волновая функция $\Psi(t,\vec{x})$ имеет минимальное число компонент тогда и только тогда, когда матрицы $\hat{\Gamma}_\mu^{(s)}$ в (2.1) реализуют $8s$-рядное представление алгебры Клиффорда (2.4), а матрицы $S_{\mu\nu}$ в (2.2) имеют вид (2.5), (2.6), (2.8), (2.9), где $j=s-\frac{1}{2}$.

Уравнение (0.1) с гамильтонианом (2.1) описывает частицу, спин которой может принимать два значения (2.11). Для того, чтобы получить описание частицы с фиксированным спином s, на волновую функцию $\Psi(t,\vec{x})$ следует наложить пуанкаре-инвариантное дополнительное условие, исключающее лишние компоненты, соответствующие значению спина $s_2=s-1$. Такое дополнительное условие имеет особо простую форму в каноническом представлении алгебры $P(1,3)$ типа Фолди–Широкова [11], в котором гамильтониан $\mathcal{H}_s$ (2.1) диагонален, а генераторы P_μ, $J_{\mu\nu}$ (2.2) реализуют полностью приведенную прямую сумму неприводимых представлений $D^+(s)\oplus D^-(s)\oplus D^+(s-1)\oplus D^-(s-1)$ алгебры Пуанкаре.

Преобразуем уравнение (0.1), (2.1) и генераторы (2.2) к канонической диагональной форме

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi=\mathcal{H}^k\Phi=\hat{\Gamma}_0^{(s)}E\Phi, \qquad \Phi=U\Psi, \tag{2.12}$$

$$P_\mu\to UP_\mu U^{-1}=P_\mu^k, \qquad J_{\mu\nu}\to UJ_{\mu\nu}U^{-1}=J_{\mu\nu}^k, \tag{2.13}$$

где P_μ^k, $J_{\mu\nu}^k$ задаются формулами

$$\begin{aligned}
&P_0^k=\hat{\Gamma}_0^{(s)}\cdot E, \qquad P_a^k=p_a=-i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad J_{ab}^k=x_ap_b-x_bp_a+S_{ab},\\
&J_{0a}^k=x_0p_a-\frac{1}{2}\left[x_a,P_0^k\right]_+-\hat{\Gamma}_0^k\frac{S_{ab}p_b}{E+m},
\end{aligned} \tag{2.14}$$

а оператор преобразования U имеет форму

$$U=\exp\left(\frac{\Gamma_a^{(s)}p_a}{2p}\,\mathrm{arctg}\,\frac{p}{m}\right)\exp\left(\frac{\Gamma_0^{(s)}j_ap_a}{p}\,\mathrm{arth}\,\frac{p}{E}\right), \tag{2.15a}$$

$$\Gamma_a^{(s)} = \hat{\Gamma}_0^{(s)}\hat{\Gamma}_a^{(s)}, \qquad \Gamma_0^{(s)} = \hat{\Gamma}_0^{(s)}, \qquad \Gamma_4^{(s)} = i\Gamma_0^{(s)}\Gamma_1^{(s)}\Gamma_2^{(s)}\Gamma_3^{(s)}. \tag{2.15б}$$

В представлении (2.14) инвариантное дополнительное условие, выделяющее подпространство, соответствующее спину s, имеет вид

$$W_\mu W^\mu \Phi \equiv (S_{ab})^2\Phi = s(s+1)\Phi. \tag{2.16}$$

Эквивалентной формой записи условия (2.16) служит формула

$$P_s\Phi = \Phi, \tag{2.17}$$

где P_s — оператор проектирования на подпространство, соответствующее фиксированному спину s

$$P_s = \frac{1}{2s}\left[(S_{ab})^2 - s(s-1)\right]. \tag{2.18}$$

Таким образом, в представлении (2.14) уравнения движения релятивистской частицы с произвольным фиксированным спином s имеют вид (2.12), (2.17). Посредством преобразования, обратного (2.12), (2.15), получаем эти уравнения в Ψ-представлении

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \mathcal{H}_s\Psi, \qquad \mathcal{H}_s = \Gamma_0^{(s)}\Gamma_a^{(s)}p_a + \Gamma_0^{(s)}m, \tag{2.19а}$$

$$\hat{P}_s\Psi = \Psi, \qquad \hat{P}_s = U^{-1}P_sU = P_s + \left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right)\frac{\left[\Gamma_\mu^{(s)}p_\mu, P_s\right]_-}{2m}. \tag{2.19б}$$

Отметим, что уравнения (2.19) могут быть записаны в явно ковариантной форме

$$\left(\Gamma_\mu^{(s)}p_\mu - m\right)\Psi = 0, \tag{2.20а}$$

$$\left(\Gamma_\mu^{(s)}p_\mu + m\right)\left(1 + \Gamma_4^{(s)}(S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - 2s(s-1)\right)\Psi = 8ms\Psi. \tag{2.20б}$$

Уравнение (2.20а) получается из (2.19а) простым умножением на $\Gamma_0^{(s)}$, а уравнение (2.20б) легко сводится к (2.19б), если принять во внимание тождество

$$\left(1 + \Gamma_4^{(s)}\right)P_s \equiv \frac{1}{4s}(S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - 2s(s-1)). \tag{2.21}$$

Полученные результаты можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2. *Системы уравнений (2.19) и (2.20) пуанкаре-инвариантны и описывают движение свободной частицы с фиксированным спином s и массой m.*

Система уравнений (2.20) имеет ряд преимуществ перед другими известными уравнениями для частиц с произвольным спином [1–3]. Действительно, уравнения (2.20) имеют достаточно простую форму, которая не усложняется с ростом спина (алгебра Γ-матриц, безусловно, проще алгебры матриц, входящих в другие известные уравнения для высших спинов); предельный переход $m \to 0$, как будет показано ниже, позволяет получить из (2.20) уравнения для безмассовых частиц (в то время как уравнения Кеммера–Дэффина и Баба не допускают такого перехода [14]); наконец, как будет показано далее, уравнения (2.20) допускают непротиворечивое обобщение на случай частиц, взаимодействующих с внешним электромагнитным полем.

Уравнения (2.20) были выписаны нами ранее в [4] без каких-либо доказательств. Здесь мы привели подробный вывод этих уравнений.

В работах [15] также предлагались $8s$-компонентные дифференциальные уравнения первого порядка, описывающие движение свободной частицы с произвольным фиксированным спином s и массой m. Однако системы уравнений, полученные в [15], становятся несовместными при учете взаимодействия частицы с внешним полем.

3. Уравнение типа Вейля для частиц произвольного спина

Хорошо известно, что уравнение Вейля для нейтрино [12] эквивалентно уравнению Дирака ($cm = 0$), если на решение последнего наложить пуанкаре-инвариантное дополнительное условие

$$\left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right)\Psi = 0, \qquad s = \frac{1}{2}. \tag{3.1}$$

В настоящем параграфе получено уравнения типа Вейля для частиц произвольного спина, исходя из обобщенного уравнения Дирака (2.20).

Система уравнений (2.20) для случая $m = 0$ может быть записана в форме

$$\begin{aligned} &i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \Gamma_0^{(s)}\Gamma_a^{(s)}p_a\Psi, \\ &\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \Gamma_0^{(s)}\Gamma_a^{(s)}p_a\right)\left(1 + \Gamma_4^{(s)}\right)\left(S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - 2s(s-1)\right)\Psi = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Из явного вида генераторов группы $P(1,3)$ (2.2), (2.5), (2.6), (2.9) следует, что при $m = 0$ оператор $1 - \Gamma_4^{(s)}$ коммутирует с P_μ, $J_{\mu\nu}$, и, следовательно, уравнение (3.1) пуанкаре-инвариантно для любого значения спина. Добавляя условия (3.1) к уравнениям (3.2) и выбирая матрицы $\Gamma_\mu^{(s)}$ в виде

$$\Gamma_0^{(s)} = \begin{pmatrix} \hat{0} & I \\ I & \hat{0} \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_4^{(s)} = \begin{pmatrix} I & \hat{0} \\ \hat{0} & -I \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_a^{(s)} = \begin{pmatrix} \hat{0} & 2\tau_a \\ -2\tau_a & \hat{0} \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

где I и $\hat{0}$ — $4s$-рядные единичные и нулевые матрицы, τ_a — $4s$-рядные матрицы, удовлетворяющие соотношениям

$$[\tau_a, \tau_b] = i\tau_c, \qquad (a, b, c) \ \text{— цикл}\ (1, 2, 3), \qquad \tau_a^2 = \frac{3}{4}, \tag{3.4}$$

приходим к системе уравнений

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, \vec{x}) = 2\vec{\tau}\cdot\vec{p}\varphi(t, \vec{x}), \tag{3.5}$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - 2\vec{\tau}\cdot\vec{p}\right)\left[S_{ab}^2 - s(s-1)\right]\varphi] = 0, \qquad S_{ab} = \frac{1}{2}\left(1 + \Gamma_0^{(s)}\right)S_{ab}, \tag{3.6}$$

где φ — $4s$-компонентная волновая функция, связанная с Ψ соотношением

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(1 + \Gamma_4^{(s)}\right)\Psi. \tag{3.7}$$

Матрицы S_{ab}, входящие в (3.6), согласно (2.5), (2.6), (2.9) имеют следующую структуру

$$S_{ab} = j_c + \tau_c, \qquad [j_c, \tau_b]_- = 0, \tag{3.8}$$

где матрицы j_c с точностью до преобразований эквивалентности задаются соотношениями

$$[j_a, j_b]_- = ij_c, \qquad j_a^2 = j(j+1) = s(s-1). \tag{3.9}$$

Уравнение (3.5), очевидно, описывает частицу с нулевой массой покоя. Неприводимые представления группы Пуанкаре II класса (для $P_\mu P^\mu = 0$, $P_\mu \neq 0$) задаются собственными значениями ε и λ инвариантных операторов знака энергии $\hat{\varepsilon} = \dfrac{P_0}{|P_0|}$ и спиральности $\Lambda = \sum\limits_{a\neq b\neq c} \dfrac{J_{ab}p_c}{p}$.

Покажем, что система уравнений (3.5), (3.6) описывает частицу со спиральностью $\lambda = \pm s$. Обозначим

$$S_{ab}^2 - s^2 = g. \tag{3.10}$$

Подставив (3.10) в (3.6) и используя (3.5), получаем после несложных преобразований

$$\begin{split}\left(i\frac{\partial}{\partial t} - 2\vec{\tau}\cdot\vec{p})\right) g\varphi \equiv \\ \equiv \left[\left(i\frac{\partial}{\partial t} - 2\vec{\tau}\cdot\vec{p}\right) g - g\left(i\frac{\partial}{\partial t} - 2\tau\cdot\vec{p}\right)\right]\varphi = [g, 2\vec{\tau}\cdot\vec{p}]_-\varphi = 0.\end{split} \tag{3.11}$$

Принимая во внимание тождества

$$g\vec{\tau}\cdot\vec{p} + \vec{\tau}\cdot\vec{p}g = \vec{S}\cdot\vec{p}, \qquad g^2 = S^2, \qquad g\vec{S}\cdot\vec{p} = \vec{S}\cdot\vec{p}g, \tag{3.12}$$

получаем из (3.11)

$$\vec{S}\cdot\vec{p}\varphi = 2s\vec{\tau}\cdot\vec{p}\varphi. \tag{3.13}$$

Из (3.5), (3.13), (3.4) заключаем, что оператор знака энергии $\hat{\varepsilon} = \frac{2\vec{\tau}\cdot\vec{p}}{p}$ имеет на множестве решений уравнений (3.5), (3.6) значения $\varepsilon = \pm 1$, а оператор спиральности $\Lambda = \frac{\vec{S}\cdot\vec{p}}{p}$ имеет при этом значения $\Lambda = \pm s$.

Следовательно, на решениях уравнений (3.5), (3.6) реализуется прямая сумма неприводимых представлений $D^+(s) \oplus D^-(s)$ группы Пуанкаре, и их можно рассматривать как обобщение уравнений Вейля на случай частиц с произвольным спином. В § 9 мы покажем, что уравнения (3.5), (3.6) CP-, T-инвариантны, но C-, P-неинвариантны.

Рассмотрим примеры уравнений (3.5), (3.6) для $s = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2$.

а) $s = \frac{1}{2}$. В этом случае, согласно (3.8), (3.9)

$$S_a = \tau_a, \qquad j_a = 0, \tag{3.14}$$

где τ_a — матрицы размерности 2×2, удовлетворяющие (3.4). Подставив (3.14) в (3.5), (3.6), убеждаемся, что уравнение (3.6) обращается в тождество (если имеет место (3.5)), а (3.5) совпадает с уравнением Вейля

$$\rho_\mu p^\mu \varphi = 0, \tag{3.15}$$

где ρ_μ — матрицы Паули

$$\rho_0 = I, \qquad \rho_a = 2\tau_a. \tag{3.16}$$

б) $s = 1$. В этом случае матрицы τ_a, j_b, удовлетворяющие (3.4), (3.8), (3.9), не умаляя общности, можно выбрать в виде

$$\tau_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\tau_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \qquad j_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.17}$$
$$j_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad j_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначив

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

и подставляя (3.17), (3.18) в (3.5), (3.13), приходим к системе уравнений для φ_μ

$$\operatorname{rot} \vec{\varphi} = i\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \vec{\varphi} = 0, \qquad \varphi_0 = \text{const}, \tag{3.19}$$

где константа φ_0, не умаляя общности, может быть приравнена нулю.

Полагая в (3.19) $\vec{\varphi} = \vec{H} - i\vec{E}$, где $\vec{H}$ и $\vec{E}$ — векторы напряженности магнитного и электрического полей, приходим к уравнениям Максвелла для электромагнитного поля в вакууме. Такая формулировка уравнений Максвелла была впервые предложена в [13].

в) $s = 0$. Уравнения для бесспиновых и безмассовых частиц могут быть получены из (3.5), (3.13), (3.17), если положить там $s = 0$. Используя обозначение (3.18), получаем в этом случае систему уравнений

$$\operatorname{div} \vec{\varphi} = i\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}, \qquad \operatorname{grad} \varphi_0 = i\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t}. \tag{3.20}$$

Уравнения (3.20) имеют решения вида

$$\varphi_\mu = k_\mu \varphi(\omega) e^{i(\vec{k}\vec{x} - i\omega t)}, \qquad k_0 = \omega = \pm\sqrt{k_a^2}, \tag{3.21}$$

где $\varphi(\omega)$ — произвольная функция, и описывают распространение продольной волны.

г) $s = \frac{3}{2}$. Выбирая матрицы τ_a и j_b в виде

$$j_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad j_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$j_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

$$\tau_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и представляя волновую функцию φ в форме

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \qquad \varphi_\alpha = \begin{pmatrix} \varphi_\alpha^1 \\ \varphi_\alpha^2 \\ \varphi_\alpha^3 \end{pmatrix}, \qquad \alpha = 1, 2 \tag{3.23}$$

получаем из (3.22), (3.23), (3.5), (3.6), (3.13) уравнение для φ_α^2

$$\operatorname{rot} \vec{\varphi}_\alpha = i\frac{\partial \vec{\varphi}_\alpha}{\partial t}, \tag{3.24а}$$

$$(\rho_\mu)_{\alpha\alpha'} p^\mu \vec{\varphi}_{\alpha'} = 0. \tag{3.24б}$$

Таким образом, волновая функция φ_α^a частицы с $m = 0$ и $s = \frac{3}{2}$, удовлетворяет уравнению типа Максвелла (3.24а) по векторному индексу a и уравнению типа Вейля (3.24б) по спинорному индексу α.

д) $s = 2$. Выберем матрицы τ_a и j_b в виде

$$j_a = \hat{j}_a \otimes \hat{I}, \qquad \tau_a = \frac{1}{2} I \otimes \rho_a, \tag{3.25}$$

где $\hat{I}$ и I — двурядная и четырехрядная единичные матрицы,

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho_2 = i\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{j}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{j}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.26}$$

$$\hat{j}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Волновая функция $\varphi(x)$ имеет, согласно (3.25), (3.20), 8 компонент φ^k_α, $\alpha = 1, 2$, $k = 1, 2, 3, 4$, причем матрицы $\hat{j}_a$ действуют только на индекс k, а ρ_a — на индекс α.

Из (3.5), (3.6), (3.18), (3.25) получаем уравнения для φ^k_α в виде

$$(\rho_\mu)_{\alpha\alpha'} p^\mu \varphi^k_{\alpha'} = 0, \qquad \frac{2}{3}(j_a)_{kk'} p_a \varphi^{k'}_\alpha = i\frac{\partial \varphi^k_\alpha}{\partial t}, \tag{3.27}$$

которые, в силу изложенного выше, могут быть интерпретированы как уравнения для безмассовых частиц со спином $s = 2$.

4. Другие типы уравнений для частиц с нулевой массой

Как показано в [24], уравнение Вейля не является единственным возможным двухкомпонентным уравнением для безмассовых частиц со спином $S = \frac{1}{2}$. В [24] получены все неэквивалентные уравнения для таких частиц и исследованы их свойства относительно преобразований P, C, T.

Аналогичная ситуация имеет место и в случае частиц произвольного спина, т.е. уравнения (3.5), (3.6) не исчерпывают всех неэквивалентных уравнений для безмассовых частиц. В настоящем параграфе мы получим все возможные (с точностью до эквивалентности) уравнения для частиц с $m = 0$ и произвольным спином s.

Мы будем исходить из следующей системы $8s$-компонентных уравнений

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \vec{\alpha}\cdot\vec{p}\,\Psi, \tag{4.1}$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\alpha}\vec{p}\right) S^2_{ab}\Psi = 0, \tag{4.2}$$

где $\Psi(t, \vec{x})$ — $8s$-компонентная волновая функция, α_a и S_{ab} — матрицы размерности $8s \times 8s$

$$\alpha_a = i\begin{pmatrix} 0 & -2\tau_a \\ 2\tau_a & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_{ab} = \begin{pmatrix} S_{ab} & 0 \\ 0 & S_{ab} \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

а матрицы S_{ab}, τ_a по-прежнему определяются соотношениями (3.4), (3.8), (3.9).

Уравнения (4.1), (4.2) пуанкаре-инвариантны. Генераторы группы $P(1,3)$ на множестве решений уравнений (4.1), (4.2) имеют вид

$$\begin{gathered} P_0 = \vec{\alpha}\cdot\vec{p}, \qquad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \\ J_{0a} = x_0 p_a - x_a P_0 + \frac{i}{2}\alpha_a + i\beta_a, \end{gathered} \tag{4.4}$$

где

$$\beta_a = i\begin{pmatrix} 0 & -j_a \\ j_a & 0 \end{pmatrix} = \Gamma_4 \begin{pmatrix} j_a & 0 \\ 0 & j_a \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_4 = i\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

а матрицы j_a определены в (3.8), (3.9).

Повторяя почти дословно выкладки (3.10)–(3.13), нетрудно убедиться, что уравнение (4.2) может быть записано в следующей эквивалентной форме

$$\vec{S}\cdot\vec{p}\,\Psi = s\Gamma_4\vec{\alpha}\cdot\vec{p}. \tag{4.6}$$

Из (4.4), (4.6) заключаем, что на множестве решений уравнений (4.1), (4.2) реализуется прямая сумма

$$D^{+}(s)\oplus D^{-}(-s)\oplus D^{-}(s)\oplus D^{+}(-s) \tag{4.7}$$

неприводимых представлений группы $P(1,3)$. Таким образом, уравнения (4.1), (4.2) неэквивалентны (3.5), (3.6).

Для получения всех других неэквивалентных уравнений для безмассовых частиц произвольной спиральности воспользуемся тем фактом, что система (4.1), (4.2) не исчерпывает всех пуанкаре-инвариантных уравнений в представлении (4.4). Действительно, как и в случае $s=\frac{1}{2}$ [24] помимо (4.2), на волновую функцию Ψ можно наложить одно из следующих инвариантных дополнительных условий

$$L_1\Psi \equiv \left(1+\varepsilon\Gamma_4\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}}+\varepsilon'\Gamma_4+\varepsilon\varepsilon'\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}}\right)\Psi = 0, \tag{4.8}$$

$$L_2\Psi \equiv (1+\varepsilon\Gamma_4)\Psi = 0, \tag{4.9}$$

$$L_3\Psi \equiv \left(1+\varepsilon\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}}\right)\Psi = 0, \tag{4.10}$$

$$L_4\Psi \equiv \left(1+\varepsilon\Gamma_4\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}}\right)\Psi = 0, \tag{4.11}$$

$$L_5\Psi \equiv \left(-3+\varepsilon\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}}+\varepsilon'\Gamma_4+\varepsilon\varepsilon'\Gamma_4\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}}\right)\Psi = 0, \tag{4.12}$$

где

$$\hat{\vec{p}} = \frac{\vec{p}}{p}, \qquad \varepsilon, \varepsilon' = \pm 1. \tag{4.13}$$

Уравнения (4.8)–(4.12) пуанкаре-инвариантны, поскольку операторы $\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}}$ и Γ_4 (а значит, и $L_1,\ldots,L_5$) коммутируют со всеми генераторами (4.4) группы $P(1,3)$. С другой стороны, эти уравнения исчерпывают все возможные с точностью до эквивалентности пуанкаре-инвариантные дополнительные условия, которые можно наложить на решения системы (4.1), (4.2). Действительно, операторы L_n можно представить в виде

$$\begin{aligned} &L_1 = 4P_1^{\varepsilon}P_2^{\varepsilon'}, \quad L_2 = 2P_1^{\varepsilon}, \quad L_3 = 2P_2^{\varepsilon}, \quad L_4 = 2\left(P_1^{\varepsilon}P_2^{\varepsilon'}+P_1^{-\varepsilon}P_2^{-\varepsilon'}\right), \\ &L_5 = 4\left(P_1^{-\varepsilon}P_2^{-\varepsilon'}+P_1^{-\varepsilon}P_2^{\varepsilon'}+P_1^{\varepsilon}P_2^{-\varepsilon'}\right), \end{aligned} \tag{4.14}$$

где P_1^{ε} и $P_2^{\varepsilon'}$ — операторы проектирования на подпространства $D^{\varepsilon}(s)\oplus D^{\varepsilon}(-s)$ и $D^{+}(\varepsilon' s)\oplus D^{-}(\varepsilon' s)$ соответственно

$$P_1^{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(1+\varepsilon\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}}\right), \qquad P_2^{\varepsilon'} = \frac{1}{2}\left(1+\varepsilon'\Gamma_4\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}}\right). \tag{4.15}$$

Из (4.7), (4.14), (4.15) следует, что на решениях уравнений (4.1), (4.2) с одним из дополнительных условий (4.8)–(4.12) реализуются следующие представления группы $P(1,3)$

$$D^{-\varepsilon}(\varepsilon' s) D^{-\varepsilon}(-\varepsilon' s) \oplus D^{\varepsilon}(-\varepsilon' s), \tag{4.16}$$

$$D^{-\varepsilon}(s) \oplus D^{\varepsilon}(-s), \tag{4.17}$$

$$D^{-\varepsilon}(s) \oplus D^{-\varepsilon}(-s), \tag{4.18}$$

$$D^{+}(-\varepsilon s) \oplus D^{-}(-\varepsilon s), \tag{4.19}$$

$$D^{\varepsilon}(\varepsilon' s). \tag{4.20}$$

Нетрудно убедиться, что формулы (4.7), (4.16)–(4.20) исчерпывают все возможные невырожденные прямые суммы неприводимых представлений $D^{\varepsilon}(\varepsilon' s)$ группы $P(1,3)$, откуда и следует вывод, что уравнения (4.1), (4.2) с одним из дополнительных условий (4.8)–(4.12) (или без дополнительных условий) исчерпывают все возможные (с точностью до эквивалентности) релятивистские уравнения для безмассовой частицы с произвольным спином s.

Исследуем свойства полученных уравнений относительно преобразований P, C и T. Для этого воспользуемся следующей схемой [24]

$$\begin{tikzcd}
D^{+}(s) \arrow[r, leftrightarrow, "P"] \arrow[d, leftrightarrow, "C"'] \arrow[dr, leftrightarrow] & D^{+}(-s) \arrow[d, leftrightarrow, "C"] \arrow[dl, leftrightarrow] \\
D^{-}(s) \arrow[r, leftrightarrow, "P"'] & D^{-}(-s)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D^{\varepsilon}(s) \arrow[r, leftrightarrow, "T"] & D^{\varepsilon}(s)
\end{tikzcd}$$

где символ $D^{+}(s) \overset{P}{\leftrightarrow} D^{+}(-s)$ означает, что операция пространственной инверсии преобразует пространство неприводимого представления $D^{\varepsilon}(s)$ в пространство представления $D^{\varepsilon}(-s)$ и т.д.

Из (4.7), (4.16)–(4.20) заключаем, что уравнения (4.1), (4.2) P-, C-, T-инвариантны; уравнения (4.1), (4.2) с дополнительным условием (4.8) T-инвариантны, но C-, P-, CP-неинвариантны; уравнения (4.1), (4.2), (4.9) T-, CP-инвариантны, но C-, T-неинвариантны; уравнения (4.1), (4.2), (4.10) P-, T-инвариантны, но C-неинвариантны; уравнения (4.1), (4.2), (4.11) C-, T-инвариантны, но P-неинвариантны; наконец, уравнения (4.1), (4.2), (4.12) T-инвариантны, но P-, C-, CP-неинвариантны.

Отметим, что уравнения (4.1), (4.2) с одним из дополнительных условие (4.8), (4.11) или (4.12) — неинвариантны относительно преобразований PCT и PT. Этот факт не противоречит известной CPT-теореме Паули–Людерса, поскольку дополнительные условия (4.8), (4.11), (4.12) в x-пространстве нелокальны.

В заключение этого раздела приведем явный вид всех возможных неэквивалентных уравнений для безмассовых частиц со спином $s = 1$. Выбирая матрицы τ и j_a из (4.3), (3.8) в форме (3.17) и представляя волновую функцию Ψ в виде

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \tag{4.21}$$

где

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}, \qquad \chi = \begin{pmatrix} \chi_0 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix}, \tag{4.22}$$

а φ_μ и χ_μ — однокомпонентные функции, приходим, согласно (4.1), (4.2), (4.6) к уравнениям для φ и χ в форме

$$\begin{aligned} &\text{rot}\,\vec{\varphi} = -\frac{\partial\vec{\chi}}{\partial t}, \qquad \text{rot}\,\vec{\chi} = -\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial t}, \\ &\text{div}\,\vec{\varphi} = 0, \qquad \text{div}\,\vec{\chi} = 0, \qquad \varphi_0 = c_1, \qquad \varphi_2 = c_2, \end{aligned} \tag{4.23}$$

где c_1 и c_2 — константы, которые, не умаляя общности, можно считать равными нулю.

Уравнения (4.23) совпадает с уравнениями Максвелла для электромагнитного поля в вакууме.

Найдем теперь явный вид дополнительных условий (4.8)–(4.13), которые можно наложить на решения уравнений (4.23), не нарушив их ковариантности. Подставив (3,8), (3.17), (4.3) в (4.8)–(4.13), получаем

$$p(\vec{\varphi} - i\varepsilon'\vec{\chi}) = -\varepsilon\,\text{rot}\,(\vec{\varphi} - i\varepsilon'\vec{\chi}), \tag{4.24}$$

$$\vec{\varphi} = i\varepsilon\vec{\chi}, \tag{4.25}$$

$$\text{rot}\,\vec{\varphi} = i\varepsilon p\vec{\chi}, \qquad \text{rot}\,\vec{\chi} = -i\varepsilon p\vec{\varphi}, \tag{4.26}$$

$$\text{rot}\,\vec{\varphi} = -\varepsilon p\vec{\varphi}, \qquad \text{rot}\,\vec{\chi} = -\varepsilon p\vec{\chi}, \tag{4.27}$$

$$p(-\vec{\varphi} + i\varepsilon'\vec{\chi}) = -\varepsilon\,\text{rot}\,(\vec{\varphi} - i\varepsilon'\vec{\chi}), \qquad p(\vec{\varphi} + i\varepsilon'\vec{\chi}) = 0. \tag{4.28}$$

Таким образом, *помимо уравнений Максвелла (4.23), для безмассовых частиц со спином 1 существует еще пять типов пуанкаре-инвариантных уравнений, которые имеют вид (4.23) с одним из дополнительных условий (4.24)–(4.28).* Подчеркнем, что все дополнительные условия (4.24)–(4.28), за исключением (4.26), в x-пространстве имеют форму нелокальных (интегро-дифференциальных) уравнений. Отметим также, что уравнения (4.23), (4.26) эквивалентны (3.19).

5. Конечные преобразования операторов координаты и спина

Задание явного вида генераторов $Q_p \in \{P_\mu, J_{\mu\nu}\}$ группы Пуанкаре однозначно определяет закон преобразования волновой функции при переходе к новой инерциальной системе координат

$$\Psi(t,\vec{x}) \to \Psi'(t,\vec{x}) = \exp(iQ_l\theta_l)\Psi(t,\vec{x}), \tag{5.1}$$

где θ_l — параметры преобразования. При этом операторы $\vec{N}$ физических величин (координаты, спина, импульса и т.д.) преобразуются следующим образом

$$\hat{N} \to \hat{N}' = \exp(iQ_l\theta_l)\hat{N}\exp(-iQ_l\theta_l). \tag{5.2}$$

Формула (5.2) в принципе дает исчерпывающий ответ о связи операторов динамических переменных в старой и новой системе координат и в случае, когда генераторы P_μ, $J_{\mu\nu}$ имеют локально ковариантную форму (2.2), конкретные вычисления с использованием (5.2) не вызывают никаких затруднений. Однако в представлении типа (1.1), (1.20), когда генераторы J_{0a} невозможно записать в виде суммы коммутирующих “спиновой” и “орбитальной” частей, вычисление явного вида преобразованных операторов $\hat{N}'$ является нетривиальной задачей. В этом параграфе получен закон преобразований операторов координаты и спина частицы генерируемых операторами (1.1), (1.20) при $k_1 = 2$,

$$
\begin{gathered}
P_0 = \sigma_1 m + 2\sigma_3 \vec{S}\cdot\vec{p} + (\sigma_1 - i\sigma_2)\frac{p^2 - 4(\vec{S}\cdot\vec{p})^2}{2m}, \qquad p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \\
J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \qquad J_{0a} = x_0 p_a - \frac{1}{2}[x_a, P_0]_+,
\end{gathered}
\tag{5.3}
$$

где S_{ab} — матрицы, определенные в (1.2).

Тем самым решена задача для произвольного представления вида (1.1), (1.9), (1.20), поскольку генераторы (5.3) и (1.1), (1.9), (1.20) связаны преобразованием эквивалентности $P_\mu \to V P_\mu V^{-1}$, $J_{\mu\nu} \to V J_{\mu\nu} V^{-1}$, где

$$
V = \exp\left[(\sigma_1 - i\sigma_2)(2 - k_1)\frac{\vec{S}\cdot\vec{p}}{2m}\right] = 1 + (\sigma_1 - i\sigma_2)(2 - k_1)\frac{\vec{S}\cdot\vec{p}}{2m}. \tag{5.4}
$$

Генераторы J_{ab} (5.3) имеют явно ковариантную форму, следовательно, при трехмерных поворотах системы координат операторы x_a и $S_{ab} = S_c$ преобразуются обычным образом (как векторы)

$$
\begin{gathered}
x'_a = x_a\cos\theta + \frac{1}{\theta}(x_b\theta_c - x_c\theta_b)\sin\theta, \\
S'_{ab} = S_{ab}\cos\theta - \frac{1}{\theta}S_{cd}\theta_d\sin\theta, \qquad (a, b, c) \quad \text{— цикл } (1, 2, 3),
\end{gathered}
\tag{5.5}
$$

где θ_a — параметры поворота, $\theta = \left(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2\right)^{1/2}$.

Чтобы найти в явном виде закон конечных преобразований (5.2) x_a и S_{ab}, генерируемых операторами J_{0a}, воспользуемся тождеством Хаусдорфа–Камбела

$$
e^A B e^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{A, B\}^n}{n!}, \qquad \{A, B\}^n = \left[A, \{A, B\}^{n-1}\right]_-, \quad \{A, B\}^0 = B. \tag{5.6}
$$

Принимая во внимание тот факт, что генераторы J_{0a} (5.3) на решениях уравнения (0.1) могут быть представлены в форме

$$
J_{0a} = x_0 p_a - x_a p_0 + \eta_a, \tag{5.7}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\eta_a = -\frac{1}{2}[P_0, x_a]_- = i\sigma_3 S_a + \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{2m}\left(ip_a - 2i[S_a, \vec{S}\cdot\vec{p}]_+\right), \\
p_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0} = i\frac{\partial}{\partial t},
\end{gathered}
\tag{5.8}
$$

и полагая $B_a = x_a$, $A = iJ_{0b}v_b$, где J_{0b} — генераторы (5.7), а а v_b — параметры преобразования Лоренца, получаем по индукции

$$\{A, B\}^n = \frac{v_a(x_b v_b)v^n}{v^n} - \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{m}\left(\frac{v_a(S_b v_b)v_n}{v^2} + D_n\right), \qquad n = 2k, \tag{5.9}$$

$$\{A, B\}^n = x_0\frac{x_a}{v}v^n + \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{2m}\left(\frac{v_a}{v}v^n - 2D_n\right), \qquad \begin{array}{l} n = 2k+1, \\ k = 1, 2, 3, \ldots, \end{array} \tag{5.10}$$

где

$$D_n = [S_b v_b, D_{n-1}]_+, \qquad D_1 = [S_a, S_b v_b]_+, \qquad v = (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)^{1/2}. \tag{5.11}$$

Подставляя (5.9)–(5.11) в (5.6) и используя тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}D_n = \left[S_a \operatorname{ch} v - i\frac{S_{ab}v_b}{v}\operatorname{sh} v - \frac{v_a(S_b v_b)}{v^2}(\operatorname{ch} v - 1)\right]\exp(2S_b v_b) - S_a, \tag{5.12}$$

получаем закон преобразования x_a в виде

$$\begin{aligned} x'_a = x_a &+ \frac{v_a(x_b v_b)}{v^2}(\operatorname{ch} v - 1) - x_0\frac{v_a}{v}\operatorname{sh} v + \\ &+ \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{m}\left\{\frac{v_a(S_b v_b)}{v^2}(\operatorname{ch} v - 1) + \frac{1}{2}\frac{v_a}{v}\operatorname{sh} v + S_a - \right. \\ &\left. - \left[S_a \operatorname{ch} v + i\frac{(\vec{S}\times\vec{v})_a}{v}\operatorname{sh} v - \frac{v_a(S_b v_b)}{v^2}(\operatorname{ch} v - 1)\right]\exp(2S_b v_b)\right\}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Формула (5.13) задает искомый явный вид преобразованного оператора x'_a, поскольку входящая в (5.13) экспонента $\exp(2S_b v_b)$ всегда может быть представлена в виде конечного ряда по степеням $(S_b v_b)^n$

$$\exp(2S_b v_b) \equiv \sum_{\nu=-s}^{s}[\operatorname{ch}(2\nu v) + \operatorname{sh}(2\nu v)]\Lambda_\nu, \tag{5.14}$$

где Λ_ν — операторы проектирования на подпространство собственных функций оператора $S_b v_b$ [4]

$$\Lambda_\nu = \prod_{\mu\neq\nu}\frac{\frac{1}{v}S_b v_b - \mu}{\nu - \mu}, \qquad \nu, \mu = -s, -s+1, \ldots, s. \tag{5.15}$$

Обратимся теперь к закону преобразования x_0. Полагая $B = x_0$, $A = iJ_{0b}v_b$, получаем для (5.6) по индукции

$$\{A, B\}^n = x_0 v^n - \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{2m}\left[(2S_b v_b)^n - v_n\right], \qquad n = 2k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{5.16}$$

$$\{A, B\}^n = \frac{x_b v_b}{v}v^n - \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{2m}\left[(2S_b v_b)^n - v^{n-1}(2S_b v_b)\right], \qquad n = 2k+1. \tag{5.17}$$

Подставив (5.16), (5.17) в (5.6), приходим к формуле

$$x'_0 = x_0 \operatorname{ch} v + \frac{(x_b v_b)}{v}\operatorname{sh} v - \frac{i\sigma_1 + \sigma_1}{2m}\left[\exp(2S_b v_b) - \operatorname{ch} v - \frac{2S_b v_b}{v}\operatorname{sh} v\right]. \tag{5.18}$$

Из (5.13) и (5.18) видно, что x_μ преобразуются по закону, отличному от преобразований Лоренца для четырех вектора; при этом величина интервала $x_\mu x^\mu = x_0^2 - x_a^2$ не сохраняется. Следовательно, x_μ нельзя интерпретировать как инвариантный оператор координаты частицы.

Зная закон преобразования операторов x_μ, нетрудно найти, как преобразуются операторы S_{ab}. Используя тождества

$$
\begin{aligned}
J'_{ab} &= \exp(iJ_{0c}v_c)J_{ab}\exp(-iJ_{0c}v_c) = \\
&= J_{ab}\operatorname{ch} v + \frac{v_c}{2v^2}(\varepsilon_{\alpha kc}J_{\alpha k}v_c)(\operatorname{ch} v - 1) + \frac{J_{0a}v_b - J_{0b}v_a}{v}\operatorname{sh} v, \\
p'_a &= p_a + \frac{v_a(p_b v_b)}{v^2}(\operatorname{ch} v - 1) + p_0\frac{v_a}{v}\operatorname{sh} v
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

получаем из (5.3), (5.13)

$$
\begin{aligned}
S'_{ab} &= \exp(iJ_{0c}v_c)S_{ab}\exp(-iJ_{0c}v_c) = J'_{ab} - x'_a p'_b + x'_b p'_a = \\
&= S_{ab}\operatorname{ch} v + \frac{v_c(S_d v_d)}{v^2}(\operatorname{ch} v - 1) + \frac{\eta_a v_b - \eta_b v_a}{v}\operatorname{sh} v + \\
&+ \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{m}\left[\frac{S_{cd}v_d}{v^2}(p_b v_b) + (p_a v_b - v_a p_b)\frac{\varepsilon_{\alpha kl}v_l S_{\alpha k}}{2v^2}\right](\operatorname{ch} v - 1) + \\
&+ \frac{1}{2}\frac{(p_a v_b - v_a p_b)}{v}\operatorname{sh} v + S_{cd}p_d + \frac{S_{cd}v_d}{v}p_0\operatorname{sh} v - \Bigg[S_{cd}p_d\operatorname{ch} v + \\
&+ \frac{S_{cd}v_d(v_c p_c)}{v^2}\operatorname{ch} v(\operatorname{ch} v - 1) + S_{cd}v_d p_0\operatorname{sh} v\operatorname{ch} v + \frac{i}{v}(S_{ac}v_c p_b - \\
&- S_{bc}v_c p_a)\operatorname{sh} v + \frac{i}{v^2}(S_{ac}v_c v_b - S_{bc}v_c v_a)(\operatorname{sh} v(\operatorname{ch} v - 1) + \operatorname{sh}^2 v p_0) - \\
&- \frac{1}{2v^2}(v_a p_b - v_b p_a)\varepsilon_{kln}S_{kl}v_n(\operatorname{ch} v - 1)\Bigg]\exp(2S_b v_b), \qquad S_d = \frac{1}{2}\varepsilon_{dkc}S_{kc}.
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

где η_a — оператор, заданный в (5.8), (a, b, c) — цикл (1,2,3). Как видно из (5.20), S_{ab} преобразуется по закону, отличному от преобразований Лоренца для тензора второго ранга.

Определим ковариантные операторы координаты и спина частицы. Для этого перейдем к представлению, в котором генераторы группы Пуанкаре имеют локально ковариантную форму

$$
\hat{J}_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \quad \hat{P}_\mu = ig_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu} = p_\mu, \quad S_{0a} = \frac{i}{2}\sigma_3\varepsilon_{abc}S_{bc}, \tag{5.21}
$$

что достигается посредством преобразования

$$
J_{\mu\nu} \to \hat{J}_{\mu\nu} = \hat{V}J_{\mu\nu}\hat{V}^{-1}, \tag{5.22}
$$

где $J_{\mu\nu}$ — генераторы (5.3), а

$$
\hat{V} = \exp\left[\frac{(\sigma_1 - i\sigma_2)}{2m}(2\vec{S}\cdot\vec{p} - p_0)\right]. \tag{5.23}
$$

В представлении (5.21) ковариантные операторы координаты и спина, очевидно, можно выбрать в форме

$$\hat{X}_\mu = x_\mu, \qquad \hat{S}_{\mu\nu} = s_{\mu\nu}. \tag{5.24}$$

С помощью преобразования, обратного (5.22), получаем явный вид этих операторов в представлении (5.3)

$$X_\mu = \hat{V}^{-1}\hat{X}_\mu\hat{V} = x_\mu + \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{m}\xi_\mu, \qquad \xi_a = S_{ab}, \qquad \xi_0 = 1, \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned} S_{ab} &= \hat{V}^{-1}\hat{S}_{ab}\hat{V} = S_{ab} + \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{m}S_{cd}p_d, \\ S_{0a} &= i\sigma_3 S_{bc} - \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{m}\left[\vec{S}\cdot\vec{p} - p_0, S_{bc}\right]_+. \end{aligned} \tag{5.26}$$

При переходе к новой инерциальной системе координат операторы X_μ и $S_{\mu\nu}$ преобразуются как ковариантные четырехвектор и тензор второго ранга

$$\begin{aligned} X'_a &= X_a + \frac{v_a(v_b X_b)}{v^2}(\operatorname{ch} v - 1) + \frac{v_a}{v}X_0 \operatorname{sh} v, \\ X'_0 &= X_0 \operatorname{ch} v + \frac{X_b v_b}{v}\operatorname{sh} v, \end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned} S'_{ab} &= S_{ab}\operatorname{ch} v + \frac{v_c(\varepsilon_{dkl}S_{dk}v_l)}{v^2}(\operatorname{ch} v - 1) + \frac{(S_{0a}v_b - S_{0b}v_a)\operatorname{sh} v}{v}, \\ S'_{0a} &= S_{0a}\operatorname{ch} v + \frac{v_a(S_{0b}v_b)}{v^2}(\operatorname{ch} v - 1) + \frac{S_{ab}v_b}{v}\operatorname{sh} v. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Операторы $S_{\mu\nu}$, очевидно, удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры $O(1,3)$, а операторы X_μ — каноническим перестановочным соотношениям

$$[p_\mu, X_\nu]_- = ig_{\mu\nu}, \qquad [X_\mu, X_\nu]_- = 0. \tag{5.29}$$

Все это позволяет сделать вывод, что *операторы X_μ и $S_{\mu\nu}$ (5.25), (5.26) можно интерпретировать как ковариантные операторы координаты и спина частицы.*

В случае $s = \frac{1}{2}$ операторы (5.25) принимают явно ковариантную форму

$$X_\mu = x_\mu + \frac{i}{2m}(1 + \gamma_4)\gamma_\mu, \tag{5.30}$$

где

$$\gamma_4 = \sigma_3, \qquad \gamma_a = -2i\sigma_2 S_a, \qquad \gamma_0 = \sigma_1 \tag{5.31}$$

матрицы Дирака.

В силу изложенного выше оператор (5.30) может быть выбран в качестве ковариантного оператора координаты дираковской частицы. Интересно отметить, что при таком определении оператор скорости

$$\dot{X}_\mu = -i[H_{\frac{1}{2}}, X_a]_- = (1 + \gamma_4)\gamma_0\frac{p_a}{m}, \tag{5.32}$$

где $H_{\frac{1}{2}}$ — гамильтониан Дирака

$$H_{\frac{1}{2}} = \gamma_0\gamma_a p_a + \gamma_0 m \tag{5.33}$$

имеет сплошной спектр.

Подчеркнем, что полученный нами оператор (5.30) принципиально отличается от операторов координаты, предложенных Ньютоном и Вигнером [16] и Фолди и Вуйтхайзеном [17]. Это отличие состоит в том, что оператор (5.30) локален и преобразуется как ковариантный четырехвектор, в то время как операторы координаты, предложенные в [16, 17], принадлежат классу нелокальных интегральных операторов с нековариантным законом преобразования при переходе к новой инерциальной системе отсчета.

6. Обобщение на случай частицы во внешнем электромагнитном поле

Полученные нами уравнения движения свободных частиц произвольного спина допускают непротиворечие обобщение на случай заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле. Ниже будет осуществлено такое обобщение, и будет показано, что при этом не возникает парадоксов с нарушением причинности, которые имеют место в других релятивистских уравнениях для частиц со спином [1–3, 18].

Будем исходить из системы уравнений первого порядка (2.19) или (2.20). Можно показать, что введение минимального электромагнитного взаимодействия непосредственно в уравнения (2.19) или в явно ковариантную систему (2.20) приводит к тому, что как уравнения (2.19), так и уравнения (2.20), становятся несовместными. Чтобы преодолеть эту трудность, мы запишем (2.19) в виде единого уравнения

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t}-\mathcal{H}_s\right)\hat{P}_s+\varkappa(1-\hat{P}_s)\right]\Psi(t,\vec{x})=0, \tag{6.1}$$

где $\varkappa$ — произвольный параметр. Эквивалентность (6.1) и (2.19) следует из соотношений

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t}-\mathcal{H}_s,\hat{P}_s\right]_-=0, \qquad \hat{P}_s\cdot\hat{P}_s=\hat{P}_s. \tag{6.2}$$

Явноковариантная система (2.20) также может быть представлена в виде одного уравнения

$$\begin{gathered}\left[B_s\left(\Gamma_\mu^{(s)}p^\mu-m\right)+\varkappa(1-B_s)\right]\Psi=0,\\ B_s=\frac{1}{8ms}\left(\Gamma_\mu^{(s)}p^\mu+m\right)\left(1+\Gamma_4^{(s)}\right)\left(S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}-2s(s-1)\right),\end{gathered} \tag{6.3}$$

поскольку

$$\left[B_s,\left(\Gamma_\mu^{(s)}p^\mu-m\right)\right]_-\Psi=0, \qquad B_s\cdot B_s=B_s. \tag{6.4}$$

Сделаем в (6.1) и (6.3) замену $p_\mu\to\pi_\mu=p_\mu-eA_\mu$, где A_μ — вектор-потенциал электромагнитного поля, и покажем, что такая замена позволяет получить систему уравнений первого порядка, описывавших движение заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Поскольку уравнения (6.1) и (6.3) после замены $p_\mu\to\pi_\mu$ в конечном итоге приводят к одинаковым результатам, мы рассмотрим только уравнение (6.1), которое принимает вид

$$\left[(\pi_0-\mathcal{H}_s(\vec{\pi}))\,\hat{P}_(\vec{\pi})+\varkappa\left(1-\hat{P}_s(\vec{\pi})\right)\right]\Psi(t,\vec{x})=0, \tag{6.5}$$

где

$$\mathcal{H}_s(\vec{\pi}) = \Gamma_0^{(s)}\Gamma_a^{(s)}\pi_a + \Gamma_0^{(s)}m, \qquad \hat{P}_s(\vec{\pi}) = P_s + \left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right)\frac{\left[\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu, P_s\right]}{2m}. \tag{6.6}$$

Умножив (6.5) на $\hat{P}_s(\vec{\pi})$ и $\left(1 - \hat{P}_s(\vec{\pi})\right)$ и используя тождества

$$\left[\pi_0 - \mathcal{H}_s(\vec{\pi}), \hat{P}_s(\vec{\pi})\right]_- \hat{P}_s(\vec{\pi}) = \frac{1}{4m}\Gamma_0^{(s)}\left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right)\left(\frac{1}{s}S_{\mu\nu} - i\Gamma_\mu^{(s)}\Gamma_\nu^{(s)}\right)F^{\mu\nu}\hat{P}_s(\vec{\pi}), \tag{6.7}$$

$$F^{\mu\nu} = -i\left[\pi^\mu, \pi^\nu\right]_-, \qquad \hat{P}_s(\vec{\pi}) \cdot \hat{P}_s(\vec{\pi}) = \hat{P}_s(\vec{\pi})$$

приходим к системе уравнений

$$\begin{gathered} i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left\{\Gamma_0^{(s)}\Gamma_a^{(s)}\pi_a + \Gamma_0^{(s)}m + eA_0 + \frac{1}{2m}\Gamma_0^{(s)}\left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{s}S_{\mu\nu} - i\Gamma_\mu^{(s)}\Gamma_\nu^{(s)}\right)F^{\mu\nu}\right\}\Psi \equiv \mathcal{H}_s(\vec{\pi}, \pi_0)\Psi, \end{gathered} \tag{6.8}$$

$$\left(P_s + \left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right)\frac{\left[\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu, P_s\right]_-}{2m}\right)\Psi = \Psi, \tag{6.9}$$

которую, как и (2.19), можно записать в эквивалентной явно ковариантной форме

$$\left[\left(\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu - m\right) + \frac{1}{m}\left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right)\left(\frac{1}{s}S_{\mu\nu} - i\Gamma_\mu\Gamma_\nu\right)F^{\mu\nu}\right]\Psi = 0, \tag{6.10}$$

$$\left(m + \Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu\right)\left(1 - \Gamma_\mu^{(s)}\right)\left[S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - 2s(s-1)\right]\Psi = 8ms\Psi. \tag{6.11}$$

Покажем, что уравнения (6.8), (6.9) (или (6.10), (6.11)) не приводят к парадоксам с нарушением причинности. Для этого преобразуем (6.10), (6.11) к такой форме, чтобы каждое решение системы удовлетворяло уравнению Фейнмана–Гелл–Манна, которое, как известно [19], описывает причинное распространение волн. Это достигается переходом к новой волновой функции

$$\Psi(t, \vec{x}) = V\Phi(t, \vec{x}), \tag{6.12}$$

где V — обратимый оператор

$$V = 1 + \frac{\lambda^-}{m}\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu, \qquad V^{-1} = 1 - \frac{\lambda^-}{m}\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu, \qquad \lambda^\pm = \frac{1}{2}\left(1 \pm \Gamma_4^{(s)}\right). \tag{6.13}$$

Подставив (6.12), (6.13) в (6.9), (6.10) и используя тождество

$$\left(\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu\right)^2 = \pi_\mu\pi^\mu + i\Gamma_\mu^{(s)}\Gamma_\nu^{(s)}F^{\mu\nu} \tag{6.14}$$

получаем уравнения для $\Phi(t, \vec{x})$

$$\left[\lambda^+\left(\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu + \frac{1}{sm}S_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{m}\pi_\mu\pi^\mu\right) - m\right]\Phi(t, \vec{x}) = 0, \tag{6.15}$$

$$P_s\Phi = \Phi \qquad \text{или} \qquad S^2_{ab}\Phi = s(s+1)\Phi. \tag{6.16}$$

Наконец, умножив (4.15) слева на оператор

$$F = m + \left(\Gamma^{(s)}_\mu \pi^\mu - \frac{1}{sm}\tilde{S}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{m}\pi_\mu\pi^\mu\right)\lambda^-, \tag{6.17}$$

где

$$\tilde{S}_{ab} = S_{ab}, \qquad \tilde{S}_{0a} = iS_{bc}, \qquad (a,b,c) \ \text{— цикл } (1,2,3) \tag{6.18}$$

приходим к уравнению

$$\left(\pi_\mu\pi^\mu - m^2 - \frac{1}{2s}S_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)\Phi(t,\vec{x}) = 0. \tag{6.19}$$

Формулы (6.16), (6.18), (6.19) задают уравнение Фейнмана–Гелл–Манна для частицы с произвольным спином. Решения $\Phi(t,\vec{x})$ этого уравнения описывают причинное распространение волн с досветовой скоростью [19]. Таковы же, очевидно, свойства решений $\Psi(t,\vec{x})$ уравнений (6.8), (6.9) и (6.10), (6.11), связанных с $\Phi(t,\vec{x})$ преобразованием эквивалентности (6.12).

К этому результату можно прийти и другим путем, воспользовавшись критерием Вайтмана [20]. Умножив (6.10) на $(\Gamma_\mu\pi^\mu + m)$, получаем уравнение

$$(p_\mu p^\mu + B)\Psi = 0, \tag{6.20}$$

где B — дифференциальный оператор, содержащий производные не выше первого порядка и равный в отсутствие взаимодействия $-m^2$. Как показано в [20] , это означает, что $\Psi(t,\vec{x})$ описывает распространение волн с досветовой скоростью.

Таким образом, мы установили, что уравнения (6.10), (6.11) описывают движение заряженной релятивистской частицы с произвольным спином во внешнем электромагнитном поле и не приводят к парадоксам с нарушением причинности.

Отметим еще, что уравнения (2,20) могут быть получены из принципа наименьшего действия, если плотность лагранжиана выбрать в виде

$$\begin{aligned} L(x) = {}& \left(m\bar{\Psi}' + i\frac{\partial\bar{\Psi}'}{\partial x_\mu}\hat{\Gamma}^{(s)}_\mu\right)\left(1 + \check{\Gamma}^{(s)}_4\right)\times \\ & \times\left[\check{S}_{\mu\nu}\check{S}^{\mu\nu} - 2s(s-1)\right] i\check{\Gamma}^{(s)}_\lambda\frac{\partial\Psi'}{\partial x_\lambda} + 8ms^2\bar{\Psi}'\Psi', \end{aligned} \tag{6.21}$$

где Ψ', $\bar{\Psi}'$ — $16s$-компонентная волновая функция

$$\Psi' = \begin{pmatrix} \Psi \\ \chi \end{pmatrix}, \qquad \bar{\Psi}' = \Psi'^{+} i\check{\Gamma}^{(s)}_0\check{\Gamma}^{(s)}_5, \tag{6.22}$$

а $\check{\Gamma}^{(s)}_\mu$, $\check{S}_{\mu\nu}$ — матрицы размерности

$$\begin{aligned} &\check{\Gamma}^{(s)}_k = \begin{pmatrix} \Gamma^{(s)}_k & 0 \\ 0 & \Gamma^{(s)}_k \end{pmatrix}, \qquad \check{\Gamma}^{(s)}_0 = \begin{pmatrix} \Gamma^{(s)}_0 & 0 \\ 0 & -\Gamma^{(s)}_0 \end{pmatrix}, \\ &\check{\Gamma}^{(s)}_5 = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma^{(s)}_0 \\ \Gamma^{(s)}_0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \check{S}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} S_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & S_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{6.23}$$

При атом для функции $\Psi(t, \vec{x})$ получаем уравнения (2.20), а для $\chi(t, \vec{x})$ — уравнения, комплексно сопряженные с (2.20). Сделав в (6.21) минимальную замену $-i\dfrac{\partial}{\partial x_\mu} \to -i\dfrac{\partial}{\partial x_\mu} - eA_\mu$, приходим к уравнению (6.10), (6.11). Таким образом, уравнения (6.10), (6.11) допускают лагранжеву формулировку.

7. Разложение по степеням $\dfrac{1}{m}$

Гамильтониан $\mathcal{H}_s(\vec{\pi}, \vec{\pi}_0)$ (6.8) может иметь как положительные, так и отрицательные собственные значения. Мы получим из (6.8), (6.9) уравнение для состояний с положительной энергией с помощью серии последовательных приближенных преобразований, подобно тому, как это было сделано Фолди и Вуйтхайзеном [17] для уравнения Дирака. При этом гамильтониан частицы о произвольным спином будет представлен в виде ряда по степеням $\frac{1}{m}$, удобном для вычислений по теории возмущении.

Основная трудность при диагонализации уравнений (6.8), (6.9) состоит в том, что необходимо найти преобразования одновременно приводящие к диагональной форме два различных уравнения. Мы диагонализуем сначала дополнительное условие (6.9), а затем, используя операторы, коммутирующие о преобразованным уравнением (6.9), приведем к диагональной форме уравнение (6.8).

Подвергнем волновую функцию $\Psi(t, \vec{x})$ из (6.8), (6.9) преобразованию

$$\Psi \to \Psi' = V\Psi, \tag{7.1}$$

где V — обратимый оператор

$$\begin{aligned} V &= 1 + \frac{1}{2m}\left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right)\left(\Gamma_a^{(s)}\pi_a - \Gamma_0^{(s)}k_1 S_a \pi_a\right), \\ V^{-1} &= 1 - \frac{1}{2m}\left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right)\left(\Gamma_a^{(s)}\pi_a - \Gamma_0^{(s)}k_1 S_a \pi_a\right). \end{aligned} \tag{7.2}$$

Подействовав оператором (7.2) слева на (6.6), (6.7), получаем уравнения для Ψ'

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}_s(\vec{\pi}, A_0)\Psi' = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi', \\ &\mathcal{H}'_s(\vec{\pi}, A_0) = \Gamma_0^{(s)}m + k_1\Gamma_4^{(s)}(\vec{S}\cdot\vec{\pi}) + \Gamma_0^{(s)}\left(1 + \Gamma_4^{(s)}\right)\times \\ &\qquad \times\frac{1}{2m}\left(\pi^2 - k_1^2(\vec{S}\cdot\vec{\pi})^2 + \frac{1}{s}\vec{S}(\vec{H} - i(1 - k_1 s)\vec{E}\right) + eA_0, \end{aligned} \tag{7.3}$$

$$P_s\Psi' = \Psi' \qquad \text{или} \qquad S_{ab}\Psi' = s(s+1)\Psi', \tag{7.4}$$

где $H_a = -i[\pi_b, \pi_c]$ и $E_a = -i[\pi_0, \pi_a]$ — напряженности магнитного и электрического полей, P_s — проектор, определенный в (2.18).

Из (7.4), (2.10), (2.11) заключаем, что, не умаляя общности, можно считать, что волновая функция Ψ' имеет $2(2s+1)$ отличных от нуля компонент. Матрицы S_{ab} и коммутирующие с ними матрицы $\Gamma_0^{(s)}$, $\Gamma_4^{(s)}$ на множестве таких функций всегда можно выбрать в виде

$$S_{ab} = \begin{pmatrix} S_c & 0 \\ 0 & S_c \end{pmatrix}, \quad \Gamma_0^{(s)} = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_4^{(s)} = \sigma_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \tag{7.5}$$

где S_c — матрицы, образующие представление $D(s)$ алгебры $O(3)$, I и 0 — $(2s+1)$-рядные единичная и нулевая матрицы. Подставив (7.5) в (7.3), получаем гамильтониан $\mathcal{H}'_s(\vec{\pi}, A_0)$ в виде

$$\begin{gathered}\mathcal{H}'_s(\vec{\pi}, A_0) = \sigma_1 m + k_1\sigma_3(\vec{S}\cdot\vec{\pi}) + \\ +(\sigma_1 - i\sigma_2)\frac{1}{2m}\left[\pi^2 - k_1^2(\vec{S}\cdot\vec{\pi})^2 + \frac{\vec{S}}{s}\left(\vec{H} - i(1-k_1 s)\vec{E}\right)\right] + eA_0.\end{gathered} \tag{7.6}$$

Формула (7.6) обобщает гамильтониан свободной частицы произвольного спина (1.9) на случай взаимодействия с внешним электромагнитным полем. Таким образом, *используя явно ковариантные уравнения (6.10), (6.11), мы получили рецепт введения и взаимодействия в пуанкаре-инвариантные уравнения без лишних компонент, найденные в разделе 1.*

Задача о диагонализации системы (6.8), (6.9) сводится теперь к преобразованию гамильтониана (7.6) к диагональной форме. Как и в случае уравнения Дирака [17], такое преобразование можно осуществить только приближенно, для $\pi_\mu \ll m$. Используя для этой цели серию последовательности преобразований

$$\mathcal{H}'_s(\vec{\pi}, A_0) \to V_3V_2V_1\mathcal{H}'_s(\vec{\pi}, A_0)V_1^{-1}V_2^{-1}V_3^{-1} = \mathcal{H}''_s(\vec{\pi}, A_0), \tag{7.7}$$

где

$$\begin{gathered}V_1 = \exp\left(-i\frac{\sigma_2}{m^3}\left\{\frac{1}{12}(\vec{S}\cdot\vec{\pi})^3 + \right.\right. \\ \left.\left. +\frac{1}{8}\left[\pi^2 - k_1^2(\vec{S}\cdot\vec{\pi})^2 - \frac{\vec{S}\cdot\vec{H}}{s} + i\left(\frac{1}{s} - k_1\right)\vec{S}\cdot\vec{E}, \pi_0\right]\right\}\right), \\ V_2 = \exp\left\{\sigma_3\frac{1}{4m^2}\left[\pi^2 - k_1^2(\vec{S}\cdot\vec{\pi})^2 - \frac{\vec{S}\cdot\vec{H}}{s} + i\left(\frac{1}{s} - k_1\right)\vec{S}\cdot\vec{E}\right]\right\}, \\ V_3 = \exp\left[-i\sigma_2\frac{k_1(\vec{S}\cdot\vec{p})}{m}\right]\end{gathered} \tag{7.8}$$

и пренебрегая членами порядка $\frac{1}{m^3}$, получаем

$$\begin{gathered}\mathcal{H}''_s(\vec{\pi}, A_0) = \sigma_1\left(m + \frac{\pi^2}{2m} - e\frac{\vec{S}\cdot\vec{H}}{2sm}\right) + A_0 - \frac{1}{16m^2s^2}\vec{S}\cdot(\vec{E}\times\vec{\pi} - \vec{\pi}\times\vec{E}) - \\ -\frac{1}{24m^2s^2}\left[\frac{1}{2}Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b} + s(s+1)\,\mathrm{div}\,\vec{E}\right] + \\ +\frac{i(2s-1)}{8m^2s^2}\vec{S}\cdot(\vec{H}\times\vec{\pi} - \vec{\pi}\times\vec{H}) + \frac{1}{24m^2s^2}Q_{ab}\frac{\partial H_a}{\partial x_b},\end{gathered} \tag{7.9}$$

где Q_{ab} — тензор квадрупольного взаимодействия

$$Q_{ab} = 3[S_a, S_b]_+ - 2\delta_{ab}s(s+1). \tag{7.10}$$

На множестве функций, удовлетворяющих дополнительному условию $\sigma_1\Phi' = \Phi'$ гамильтониан (7.9) положительно определен и содержит слагаемые, соответствующие дипольному $\left(-\dfrac{\vec{S}\cdot\vec{H}}{2sm}\right)$, спин-орбитальному $\left(-\dfrac{1}{16m^2s^2}\vec{S}\cdot(\vec{E}\times\vec{\pi} - \vec{\pi}\times\vec{E})\right)$, квадрупольному $\left(-\dfrac{1}{48s^2m^2}Q_{ab}\dfrac{\partial E_a}{\partial x_b}\right)$ и дарвиновскому $\left(-\dfrac{s(s+1)}{24s^2m^2}\,\mathrm{div}\,\vec{E}\right)$ взаимодействию частицы с полем. Два последние члена в (7.9) можно интерпретировать как магнитное спин-орбитальное и магнитное квадрупольное взаимодействия.

Приближенный гамильтониан (7.9) в точности совпадает с полученным в работе [21], в которой в качестве исходного уравнения использовалось уравнение Фейнмана–Гелл–Манна (6.19). В случае (7.9) совпадает о гамильтонианом Фолди и Вуйтхайзена [17], который является нерелятивистским пределом гамильтониана Дирака для электрона.

8. Релятивистская частица с произвольным спином в однородном магнитном поле

Рассмотрим систему уравнений (6.8), (6.9) для случая частицы в однородном магнитном поле. Не умаляя общности можно считать, что вектор напряженности этого поля $\vec{H}$ параллелен третьей проекции импульса частицы p_3. Это означает, что компоненты тензора электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$ равны

$$F_{0a}=E_a=0,\qquad F_{23}=H_1,\qquad F_{31}=H_2=0,\qquad F_{12}=H_3=H. \tag{8.1}$$

Из (8.1) следует, что π_μ можно выбрать в виде

$$\pi_1=p_1-eHx_2,\qquad \pi_2=p_2,\qquad \pi_3=p_3,\qquad \pi_0=i\frac{\partial}{\partial t}. \tag{8.2}$$

Подставив (8.1), (8.2) в (6.6), (6.7) приходим к уравнениям

$$\begin{gathered}\mathcal{H}_s(\vec{\pi})\Psi=i\frac{\partial}{\partial t}\Psi,\\ \mathcal{H}_s(\vec{\pi})=\Gamma_0^{(s)}\Gamma_0^{(s)}\vec{\pi}_a+\Gamma_0^{(s)}m+\frac{\Gamma_0^{(s)}}{2m}\left(1-\Gamma_4^{(s)}\right)\left(i\Gamma_1^{(s)}\Gamma_2^{(s)}-\frac{1}{s}S_{12}\right)H,\end{gathered} \tag{8.3}$$

$$\hat{P}_s(\vec{\pi})\Psi\equiv\left\{P_s+\frac{1}{2m}\left(1-\Gamma_4^{(s)}\right)\left[\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu,P_s\right]_-\right\}\Psi=0. \tag{8.4}$$

Преобразуем $\mathcal{H}_s(\vec{\pi})$ к такому виду, чтобы он содержал только коммутирующие величины. Это позволит нам, не решая уравнений движения (8.3), (8.4), определить спектр собственных значений гамильтониана (8.3).

Подвергнем волновую функцию Ψ, гамильтонианами $\mathcal{H}_s(\vec{\pi})$ и проектор $\hat{P}_s(\vec{\pi})$ преобразованию

$$\begin{gathered}\Psi\to\Psi'=V\Psi,\qquad \mathcal{H}_s(\vec{\pi})\to\mathcal{H}'_s(\vec{\pi})=V\mathcal{H}_s(\vec{\pi})V^{-1},\\ \hat{P}_s(\vec{\pi})\to V\hat{P}_s(\vec{\pi})V^{-1}=\hat{P}'_s(\vec{\pi}),\end{gathered} \tag{8.5}$$

где

$$V=\lambda^-+\frac{1}{\varepsilon}\lambda^+\Gamma_0^{(s)}\mathcal{H}_s(\vec{\pi}),\qquad V^{-1}=\frac{1}{m}\left(\lambda^+\varepsilon+\mathcal{H}_s(\vec{\pi})\lambda^+\Gamma_0^{(s)}\right),$$

$$\varepsilon=\left(\pi^2-\frac{1}{2}S_{12}H+m^2\right)^{1/2},\qquad \lambda^\pm=\frac{1}{2}\left(1\pm\Gamma_4^{(s)}\right).$$

Используя тождества

$$\lambda^-\Gamma_\mu^{(s)}=\Gamma_\mu^{(s)}\lambda^+,\qquad (\lambda^\pm)^2=\lambda^\pm,\qquad \lambda^+\lambda^-=0, \tag{8.6}$$

получаем

$$\mathcal{H}'_s(\vec{\pi}) = \Gamma_0^{(s)} \left(\pi^2 + m^2 - \frac{e}{s} S_{12} H \right)^{1/2}, \tag{8.7}$$

$$P_s \Psi' = \Psi' \qquad \text{или} \qquad S_{ab}^2 \Psi' = s(s+1)\Psi'. \tag{8.8}$$

Все операторы, входящие в определение (8.7) гамильтониана $\mathcal{H}'_s(\vec{\pi})$, коммутируют друг с другом и имеют такие собственные значения

$$\Gamma_0^{(s)} \Psi' = \varepsilon \Psi', \quad \varepsilon = \pm 1, \quad S_{12} H \Psi' = s_3 H \Psi', \quad s_3 = -s, -s+1, \ldots, s, \tag{8.9}$$

$$\pi^2 \Psi' = \left[(2n+1) H + p_3^2 \right] \Psi', \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{8.10}$$

Формулы (8.9) следуют непосредственно из (2.4), (8.8), а соотношение (8.10) приведено, например, в [22].

Квадрат гамильтониана (8.7) и операторы (8.9), (8.10) имею общую систему собственных функций $\Psi'_{\varepsilon n s_3 p_3}$. Отсюда заключаем, что собственные значения гамильтониана (8.7) равны

$$E_{\varepsilon n s_3 p_3} = \varepsilon \left[m^2 + \left(2n + 1 - \frac{s_3}{s} \right] eH + p_3^2 \right]^{1/2}. \tag{8.11}$$

Соотношение (8.11) обобщает известную формулу [22] для уровней енергии электрона в однородном магнитном поле на случай частицы с произвольным спином s. Как видно из (8.11), значения энергии такой частицы действительны при любых s, в то время как уравнения Рариты–Швингера при решении аналогичной задачи приводят к комплексным значениям энергии [3].

Приведем для полноты явный вид собственных функций $\Psi_{\varepsilon n s_3 p_3}$. Выбирая матрицы $\Gamma_\mu^{(s)}$, S_{ab} в виде

$$\begin{gathered}
\Gamma_0^{(s)} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{I} \\ \hat{I} & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_4^{(s)} = \begin{pmatrix} \hat{I} & \hat{0} \\ \hat{0} & -\hat{I} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_a^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 & -2\tau_a \\ 2\tau_a & 0 \end{pmatrix}, \\
S_{ab} = \begin{pmatrix} S_{ab} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{S}_{ab} \end{pmatrix}, \quad S_{ab} = \begin{pmatrix} S_{ab}^1 & 0 \\ 0 & S_{ab}^2 \end{pmatrix}, \quad \tau_a = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{abc} S_{bc} - S_{4a} \right),
\end{gathered} \tag{8.12}$$

где $\hat{I}$ и $\hat{0}$ — $4s$-рядные единичная и нулевая матрицы; S_{ab}, S_{4a} — матрицы из представления $D\left(s - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ алгебры $O(4)$, а S_{ab}^1 и S_{ab}^2 — матрицы, реализующие представления $D(s)$ и $D(s-1)$ алгебры $O(3)$ соответственно, получаем

$$\Psi'_{\varepsilon n s_3 p_3} = \Psi_{n p_3} \begin{pmatrix} \Psi_{s_3} \\ \tilde{0} \\ \varepsilon \Psi_{s_3} \\ \tilde{0} \end{pmatrix}, \tag{8.13}$$

где Ψ_{s_3} — $(2s+1)$-компонентная собственная функция оператора S_{12} (который всегда может быть выбран в диагональной форме)

$$\Psi_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Psi_{s-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \Psi_{-s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{8.14}$$

$\tilde{0}$ — $(2s-1)$-рядные нулевые столбцы и

$$\Psi_{np_3} = \exp(ip_1x_1 + ip_3x_3)\exp\left[-\frac{H}{2}\left(x_2 + \frac{p_1}{H}\right)^2\right] H_n\left[\sqrt{H}\left(x_2 + \frac{p_1}{H}\right)\right], \tag{8.15}$$

H_n — полиномы Эрмита. Явный вид собственных функций исходного гамильтониана (8.8) может быть получен из (8.13)–(8.15) с помощью преобразования, обратного (8.5).

9. Четырехкомпонентное уравнение для бесспиновых частиц

Уравнения (2.20) определены для произвольных значений спина s, включая случай $s=0$. При этой, однако, волновая функция Ψ имеет целых восемь компонент, и (2.20) не имеют никаких преимуществ перед хорошо известным пятикомпонентным уравнением Кеммера–Дэффина для безмассовых частиц.

В [24] было показано, что для описания свободной безмассовой частицы можно использовать обычное четырехкомпонентное уравнение Дирака. Ниже мы обобщаем результаты [24] на случай заряженной частицы во внешнем электромагнитной поле.

Рассмотрим уравнение вида

$$\left[(1+\gamma_4)\gamma_\mu p^\mu + \frac{1}{m}(1+\gamma_4)p_\mu p^\mu - m\right]\Psi = 0, \tag{9.1}$$

где γ_μ — четырехрядные матрицы Дирака.

Уравнение (9.1) явно ковариантно и эквивалентно обычному уравнению Дирака. Действительно, умножив (9.1) на $(1+\gamma_4)$ и $(1-\gamma_4)$, получаем систему уравнений

$$(1+\gamma_4)(\gamma_\mu p^\mu - m)\Psi = 0, \tag{9.2}$$

$$(1-\gamma_4)(p_\mu p^\mu - m^2)\Psi = 0. \tag{9.3}$$

Подействовав на (9.2) слева оператором $\gamma_\mu p^\mu + m$ и принимая во внимание тождества

$$(\gamma_\mu p^\mu)^2 = p_\mu p^\mu, \qquad \gamma_4\gamma_\mu = -\gamma_\mu\gamma_4, \tag{9.4}$$

получаем

$$\left[\frac{1}{m}(1-\gamma_4)(p_\mu p^\mu - m^2) + (1-\gamma_4)(\gamma_\mu p^\mu - m)\right]\Psi = 0. \tag{9.5}$$

Складывая (9.5) и (9.2) и принимая во внимание (9.3), приходим к уравнению Дирака

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\Psi = 0, \tag{9.6}$$

которое, таким образом, является следствием (9.1). Уравнение (9.1), в свою очередь, легко получить из (9.6), умножив последнее на

$$\left\{1 + \gamma_4 + \frac{1}{m}(1-\gamma_4)(\gamma_\mu p^\mu + m)\right\}.$$

Таким образом, в отсутствие взаимодействия уравнения (9.1) и (9.6) эквивалентны и могут быть интерпретированы как уравнения для частиц со спином $s = \frac{1}{2}$ или $s = 0$ [24]. Однако после введения взаимодействия уравнения (9.1) и (9.6) приводят к совершенно различным результатам. Уравнение (9.6) после минимальной замены $p_\mu \to \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$, как хорошо известно, описывает движение заряженной частицы со спином $s = \frac{1}{2}$ во внешней электромагнитной поле. Что же касается (9.1), то это уравнение после введения взаимодействия, как будет видно ниже, следует интерпретировать как уравнение для бесспиновой частицы во внешнем поле.

Сделаем в (9.1) замену $p_\mu \to \pi_\mu$. После умножения получившегося уравнения на $(1+\gamma_4)$ и $(1-\gamma_4)$ получаем вместо (9.2), (9.3) следующую систему

$$(1+\gamma_4)(\gamma_\mu \pi^\mu - m)\Psi = 0, \tag{9.7}$$

$$(1-\gamma_4)(\pi_\mu \pi^\mu - m^2)\Psi = 0. \tag{9.8}$$

Покажем, что эта система, подобно (9.2), (9.3), эквивалентна некоторому уравнению первого порядка. Подействовав на (9.7) оператором $\left\{1 + \dfrac{1}{m}(\gamma_\mu \pi^\mu + m)\right\}$ и учитывая тождество

$$(\gamma_\mu \pi^\mu)^2 = \pi_\mu \pi^\mu - \frac{ie}{2}\gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\nu} \tag{9.9}$$

получаем вместо (9.6) уравнение

$$\left\{\gamma_\mu \pi^\mu - m + (1+\gamma_4)\frac{ie}{2m}\gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\nu}\right\}\Psi = 0. \tag{9.10}$$

отличающиеся от уравнения Дирака для частицы со спином $\frac{1}{2}$ во внешнем поле.

Покажем, что уравнение (9.10) описывает движение заряженной частицы со спином $s = 0$. Для этого сначала умножим (9.10) на γ_0 и получим уравнение в форме Шредингера

$$\begin{gathered} H\Psi = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi, \\ H = \gamma_0 \gamma_a \pi_a + \gamma_0 m + eA_0 + \gamma_0 (1+\gamma_4)\frac{ie\gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\nu}}{2m}. \end{gathered} \tag{9.11}$$

Подвергая волновую функцию Ψ и гамильтониан H преобразованию

$$\Psi \to \Psi' = V\Psi, \qquad H \to H' = VHV^{-1} - i\frac{\partial V}{\partial t}V^{-1}, \tag{9.12}$$

$$V = 1 + (1-\gamma_4)\frac{\gamma_a \pi_a}{m}, \qquad V^{-1} = 1 - (1-\gamma_4)\frac{\gamma_a \pi_a}{m}, \tag{9.13}$$

получаем

$$H' = \gamma_0 m + \gamma_0(1+\gamma_4)\frac{\pi_a^2}{2m} + eA_0.$$

Выбрав матрицы γ_0 и γ_4 в виде

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_4 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 \end{pmatrix}, \tag{9.14}$$

где σ_3, σ_1 — двурядные матрицы Паули, запишем гамильтониан H' в форме

$$H' = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix}, \qquad H_\pm = \sigma_3 m + (\sigma_3 \pm i\sigma_3)\frac{\pi_a^2}{2m} + eA_0. \tag{9.15}$$

Обозначив $\Psi' = V\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix}$, где $\Psi_\pm$ — двухкомпонентные столбцы, получаем для Ψ_+, Ψ_- два незацепляющихся уравнения

$$\left[\sigma_3 m + (\sigma_3 \pm i\sigma_3)\frac{\pi^2}{2m} + eA_0\right]\Psi_\pm = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi_\pm \tag{9.16}$$

совпадающие с уравнениями Сакаты–Такетани для бесспиновой заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.

Таким образом мы убедились, что обобщенное уравнение Дирака (9.10) описывает движение заряженной частицы со спином 0 во внешнем электромагнитном поле. Это уравнение может быть использовано при решении конкретных физических задач наряду с другими известными уравнениями для бесспиновых частиц (Кеммера–Дэффина и Клейна–Гордона).

Заключение

Обсудим коротко полученные результаты.

Для частицы о произвольным спином s и массой m найдены все возможные (с точностью до преобразований эквивалентности, осуществляемых чисельными матрицами) пуанкаре-инвариантные гамильтоновы уравнения движения вида (0.1), в которых гамильтонианы являются дифференциальными операторами второго порядка, а волновая функция $\Psi(t,\vec{x})$ имеет $2(2s+1)$ компонент. Полученные уравнения включают как частный случай уравнения Дирака для $s=\frac{1}{2}$ и Тамма–Сакаты–Такетани для $s=0$ и $s=1$.

Найдены также уравнения движения частицы произвольного спина, включающие производные не выше первого порядка. Эти уравнения имеют вид $8s$-компонентного уравнения Дирака с некоторым пуанкаре-инвариантным дополнительным условием, устраняющим лишние компоненты волновой функции (см. (2.20)). При обобщении на случай заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле уравнения (2.20) не приводят, в отличие от других явно ковариантных уравнений для высших спинов [1–3] , к нарушению принципа причинности.

Другим достоинством уравнений (2.20) является их простая форма, которая не усложняется с ростом спина. Это позволяет решать различные физические задачи для произвольных значений s. Так, в настоящей работе точно решена задача о движении релятивистской частицы произвольного спина в однородном магнитном поле.

В настоящей работе не исследовались вопросы, связанные с вторичным квантованием полученных уравнений. Отметим, что процедуру вторичного квантования дираконодобных уравнений (2.20) нетрудно осуществить в формализме Умезавы–Такахати [25], используя представление (6.3).

Можно показать, что уравнения (2.20) инвариантны относительно операции зарядового сопряжения C, но неинвариантны относительно обращения времени T и отражения пространственных координат P. P-, C-, T-инвариантные уравнения для частиц произвольного спина могут быть получены из (2.20) путем удвоения числа компонент волновой функции и замены $\Gamma_\mu^{(s)} \to \check{\Gamma}_\mu^{(s)}$ согласно (4.23).

Выражаем благодарность С.П. Онуфрийчуку за проверку основных формул настоящей работы.

Дополнение

Приведем решение системы соотношений (1.14)

$$h_0^{(s)} \cdot h_0^{(s)} = 1, \tag{Д.1а}$$

$$h_0^{(s)} h_1^{(s)} + h_1^{(s)} h_0^{(s)} = 0, \tag{Д.1б}$$

$$h_1^{(s)} h_1^{(s)} + h_0^{(s)} h_2^{(s)} + h_2^{(s)} h_0^{(s)} = p^2, \tag{Д.1в}$$

$$h_1^{(s)} h_2^{(s)} + h_2^{(s)} h_1^{(s)} = 0, \tag{Д.1г}$$

$$h_2^{(s)} h_2^{(s)} = 0. \tag{Д.1д}$$

Из (Д.1а), (1.8) видно, что не умаляя общности, можно положить

$$h_0^{(s)} = \sigma_1. \tag{Д.2}$$

Действительно, согласно (1.8), (Д.1а), коэффициенты $a_\mu^{(s)}$ должны удовлетворять условию

$$\left(a_1^{(s)}\right)^2 + \left(a_2^{(s)}\right)^2 + \left(a_3^{(s)}\right)^2 = 1, \qquad a_0^{(s)} = 0 \tag{Д.3а}$$

или

$$\left(a_0^{(s)}\right)^2 = 1, \qquad a_1^{(s)} = a_2^{(s)} = a_3^{(s)} = 0. \tag{Д.3б}$$

Условие (Д.3б) несовместно с (Д.1б)–(Д.1д), а матрица (1.8), (Д.3а) всегда может быть приведена к виду (Д.2) посредством преобразования $h_0^{(s)} \to U_1 h_0^{(s)} U_1^{-1}$, где

$$U_1 = \left[1 + \sigma_3 \sigma_\alpha a_\alpha^{(s)}\right] \left[2\left(1 + a_1^{(s)}\right)\right]^{-1/2}, \qquad a_1^{(s)} \neq -1, \quad \alpha = 1, 2. \tag{Д.4}$$

Из (Д.2), (Д.1б), (1.8) следует, что

$$h_1^{(s)} = \left(b_2^{(s)} \sigma_2 + b_3^{(s)} \sigma_3\right) (\vec{S} \cdot \vec{p}). \tag{Д.5}$$

Пусть $\left(b_2^{(s)}\right)^{-2} + \left(b_3^{(s)}\right)^2 = k_1^2 \neq 0$, тогда преобразование $h_1^{(s)} \to U_2 h_1^{(s)} U_2^{-1}$, где

$$U_2 = \left[1 + \sigma_3\left(\sigma_2 b_2^{(s)} + \sigma_3 b_3^{(s)}\right)\right]\left[2k_1\left(k_1 + b_3^{(s)}\right)\right]^{-1/2}, \qquad b_3 \neq -k, \tag{Д.6}$$

приводит $h_1^{(s)}$ (Д.5) к виду

$$h_1^{(s)} = \sigma_3 k_1 \vec{S}\cdot\vec{p}. \tag{Д.7}$$

Но тогда из (1.8), (Д.2), (Д.7), (Д.1в) получаем

$$\begin{aligned} h_2^{(s)} &= \frac{1}{2}\sigma_1\left[p^2 - k_1^2(\vec{S}\cdot\vec{p})^2\right] + \\ &+\sigma_2\left[c_2^{(s)}(\vec{S}\cdot\vec{p})^2 + d_2^{(s)}p^2\right] + \sigma_3\left[c_3^{(s)}(\vec{S}\cdot\vec{p})^2 + d_3^{(s)}p^2\right]. \end{aligned} \tag{Д.8}$$

Подставив (Д.7), (Д.8) в (Д.1г), приходим к соотношению

$$c_3(\vec{S}\cdot\vec{p})^2 + d_3 p^2(\vec{S}\cdot\vec{p}) = 0. \tag{Д.9}$$

В случае $s > 1$ операторы $(\vec{S}\cdot\vec{p})^2$ и $p^2(\vec{S}\cdot\vec{p})$ линейно независимы, и для выполнения (Д.9) необходимо положить $c_3 = d_3 = 0$ и

$$h_2^{(s)} = \frac{1}{2}\sigma_1\left[p^2 - k_1^2(\vec{S}\cdot\vec{p})^2\right] + \sigma_2\left[c_2^{(s)}(\vec{S}\cdot\vec{p})^2 + d_2^{(s)}p^2\right]. \tag{Д.10}$$

Потребуем, чтобы оператор (Д.10) удовлетворял уравнению (Д.1д) и получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}p^4 - \frac{1}{2}p^2k_1^2(\vec{S}\cdot\vec{p})^2 + \frac{1}{4}k_1^4(\vec{S}\cdot\vec{p})^4 + \\ &\quad + \left(e_2^{(s)}\right)^2(\vec{S}\cdot\vec{p})^4 + \left(d_2^{(s)}\right)^2 p^4 + 2c_2^{(s)}d_2^{(s)}p^2(\vec{S}\cdot\vec{p})^2 = 0. \end{aligned} \tag{Д.11}$$

При $s > \frac{3}{2}$ операторы p^4, $(\vec{S}\cdot\vec{p})^4$ и $p^2(\vec{S}\cdot\vec{p})^2$ линейно независимы. Но тогда из (Д.11) следует, что

$$c_2 = \mp i\frac{k_1^2}{2}, \qquad d_2 = \pm\frac{i}{2}. \tag{Д.12}$$

Подставив (Д.12) в (Д.10), приходим к формуле

$$h_2^{(s)} = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2)\left[p^2 - k_1^2(\vec{S}\cdot\vec{p})^2\right]. \tag{Д.13}$$

Таким образом, мы показали, что с точностью до матричных преобразований (Д.4), (Д.6), все возможные решения системы соотношений (Д.1) для операторов (1.8) задаются формулами (Д.2), (Д.7), (Д.13) (если $k_1 \neq 0$ и $s > \frac{3}{2}$). Аналогично можно показать, что формулы (Д.2), (Д.7), (Д.13) задают все решения системы (Д.1) и для $k_1 = 0$, $s > \frac{3}{2}$. Используя тождества

$$\begin{aligned} &(\vec{S}\cdot\vec{p})^3 = p^2(\vec{S}\cdot\vec{p}), \qquad s = 1, \\ &(\vec{S}\cdot\vec{p})^4 = \frac{5}{2}(\vec{S}\cdot\vec{p})^2p^2 - \frac{9}{16}p^4, \qquad s = \frac{3}{2} \end{aligned} \tag{Д.14}$$

получаем решения (Д.1) для $s = 1$ и $s = \frac{3}{2}$ в виде (1.15)–(1.19).

1. Velo G., Zwanzinger D., *Phys. Rev.*, 1969, **186**, № 5, 2218;
Velo G., *Nucl. Phys. B*, 1972, **43**, 389.
2. Jonson K., Sudarshan B.C.G., *Ann. Phys.*, 1961, **13**, 126;
Tsai W., *Phys. Rev. D*, 1973, **7**, 1945.
3. Seetharaman M., Prabhakaran I., Mathews P.M., *Phys. Rev. D*, 1975, **12**, 458.
4. Фущич В.И., Грищенко А.Л., Никитин А.Г., *ТМФ*, 1971, **8**, №2, 192–205;
Fushchych W.I., Grishchenko A.L., Hikitin A.G., Preprint ITF-70-89E, Kiev, 1970, 26 p.
5. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Rep. Math. Phys.*, 1975, **8**, №1, 33–48;
Никитин А.Г., *Укр. физ. журнал*, 1973, **18**, 1605; 1974, **19**, 1000.
6. Kolsrud M., *Physica Norwegica*, 1971, **5**, 169.
7. Weaver D.L., Hammer C.L., Good R.H., *Phys. Rev.*, 1964, **135**, 241;
Mathews P.M., *Phys. Rev.*, 1966, **143**, 978;
Mathews P.M., Ramankrishnan S., *Nuovo Cim.*, 1967, **50**, 2;
Jayaraman I., *Nuovo Cim. A*, 1973, **13**, 877; 1973, **14**, 343.
8. Guertin R.F., *Ann. Phys.*, 1974, **88**, 504; 1975, **91**, 386.
9. Тамм И.Е., *ДАН СССР*, 1940, **29**, 551;
Taketani M., Sakata S., *Proc. Phys. Math. Soc. (Japan)*, 1940, **22**, 757.
10. Guertin R.F., Spin-$\frac{1}{2}$ equation with indefinite metric, Preprint, Rice University, Houston, Texac, 1975.
11. Foldy L.L., *Phys. Rev.*, 1956, **102**, № 2;
Широков Ю.М., *ЖЭТФ*, 1957, **33**, 1196.
12. Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, И.Л., М., 1963, С. 114.
13. Lomont I.S., *Phys. Rev.*, 1958, **111**, 1710;
Moses H.E., *Nuovo Cim. Suppl.*, 1958, **7**, 1.
14. Bludman S.A., *Phys. Rev.*, 1957, **107**, 1163.
15. Lomont I.S., Moses H.E., *Phys. Rev.*, 1960, **118**, 337;
Dowker I.S., *Proc. Roy. Soc. A*, 1967, **293**, 351.
16. Hewton T.D., Wigner E.P., *Rev. Mod. Phys.*, 1949, **21**, 400;
см. также [12], С. 69.
17. Foldy L.L., Wouthuysen S.A., *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 29.
18. Wightman A.S., in: Partial Differential Equations (D.O. Spencer, Ed.), Vol.23, P. 141, Am. Math. Soc. providence, R.I., 1973.
19. Hurley W.I., *Phys. Rev. D*, 1971, **4**, 3605.
20. Wightman A.S., in Stadies in Mathematical Physics, edited by E.H. Lieb, B. Simon, Princton, 1976.
21. James K.R., *Proc. Phys. Soc. (London)*, 1968, **1**, 334.
22. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б., Квантовая электродинамика, Н., М., 1969, С. 142.
23. Nelson T.J., Good R.H., *Phys. Rev.*, 1969, **179**, 1445;
Santhanam T.S., Tekumalla A.R., *Lett. Nuovo Cim.*, 1972, **3**, 1060; 1973, **6**, 99;
Simon M.T., *Lett. Nuovo Cim.*, 1971, **2**, 616;
Seetharaman M., Simon M.T., Mathews P.M., *Nuovo Cim. A*, 1972, **12**, 788.
24. Fushchych W.I., *Nucl. Phys. B*, 1970, **21**, 321–330;
Fushchych W.I., Grishchenko A.L., *Lett. Nuovo Cim.*, 1970, **4**, № 20, 927–928; Preprint ITF-70-88E, Kiev, 1970, 22 p;
Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cim.*, 1973, **7**, № 11, 439–442.
25. Takahashi I., An introduction to a field quantization, Pergamon Press, New York, 1969.