Групповые свойства дифференциальных уравнений квантовой механики

В.И. ФУЩИЧ

Теорию групповых свойств дифференциальных уравнений, применительно к уравнениям механики и гидромеханики в Советском Союзе начал развивать Л.В. Овсянников со своими сотруднивами [1, 2]. Это направление оказалось весьма плодотворным и привело к ряду важных результатов.

С каждым годом сфера влияния групповых идей на различные разделы математики и физики расширяется. Так в частности, в последнее время математический аппарат теории групп и алгебр Ли начал использоваться Ю.А. Митропольским и А.К. Лопатным [3, 4] в теории нелинейных колебаний для исследования вопроса о приводимости систем нелинейных дифференциальных уравнений.

Несмотря на то, что в физике широко используются групповые методы для систематики элементарных частиц, до недавнего времени почти не велась работа по развитию и применению идей С. Ли к дифференциальным уравнениям квантовой механики.

В 1970 г. автором [5, 6] была начата работа по систематическому изучению групповых свойств уравнений движения в квантовой механике. В дальнейшем эти исследования были продолжены в работах [7–15].

Данная статья, в основном, является кратким обзором результатов, полученных в Институте математики АН УССР за последние годы по групповым свойствам уравнений квантовой механики. Групповые свойства дифференциальных уравнений изучаются с помощью метода канонических преобразований. Именно этот метод позволил найти конструктивно новые алгебры инвариантности основных уравнений движения квантовой механики.

Известно, что некоторые уравнения движения в квантовой механике обладают дополнительной (неявной) симмерией. Так, например, уравнение Шредингера для атома водорода обладает неявной инвариантностью относительно группы четырехмерных вращений, уравнения Максвелла и Дирака (для нулевой массы) инвариантны относительно конформной группы.

В дальнейшем будут сформулированы теоремы, устанавливающие новые групповые свойства уравнений Дирака, Клейна–Гордона–Фока, Кеммера–Дэффина и одного уравнения четвертого порядка, являющегося обобщением свободного нерелятивистского уравнения Шредингера. Доказательство этих теорем осуществляется с помощью метода, предложенного в [5, 6]. Суть его состоит в том, что сначала система дифференциальных уравнений первого порядка с помощью унитарного (или изотермического) преобразования приводится к диагональной (или жордановой) форме, а затем уже для преобразованного уравнения устанавливается дополнительная алгебра инвариантности. Найдя базисные элементы дополнительной алгебры инвариантности для преобразованного уравнения и имея унитарный оператор, определяем алгебру инвариантности исходного уравнения.

Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний, Киев, Наукова думка, 1977, С. 238–246.

Под дополнительной инвариантностью будем понимать любую инвариантность, отличную от лоренц-инвариантности.

За последние несколько лет начали интенсивно изучаться групповые свойства дифференциальных уравнений в частных производных на основе классических методов С. Ли [16–18]. Эти методы существенно отличаются от наших. Основное отличие состоит в том, что в нашем случае базисные элементы новых алгебр инвариантности соответствующих уравнений, вообще говоря, не принадлежат классу дифференциальных операторов, как это имеет место в случае лоренц-симметрии, когда инфинитезимальные операторы группы представляют собой линейные дифференциальные операторы первого порядка. Базисные элементы этих алгебр являются, как правило, псевдодифференциальными или интегродифференциальными (нелокальными) операторами. По этой причине эти операторы не являются касательными преобразованиями в смысле С. Ли, однако они образуют конечномерную алгебру Ли.

1. Дополнительная инвариантность уравнения Дирака

1. Уравнение Дирака в гамильтоновой форме можно записать в виде [6]

$$i\frac{\partial\Psi(t,x_1,x_2,x_3)}{\partial t}=\mathcal{H}\Psi(t,x_1,x_2,x_3), \tag{1.1}$$

$$\Psi(t,\vec{x})\equiv\begin{bmatrix}\psi_1(t,\vec{x})\\ \psi_2(t,\vec{x})\\ \psi_3(t,\vec{x})\\ \psi_4(t,\vec{x})\end{bmatrix},\qquad \mathcal{H}=\gamma_0\gamma_a p_a+\gamma_0\gamma_4 m, \tag{1.2}$$

где m — масса частицы, $p_a=-i\frac{\partial}{\partial x_a}$, $a=1,2,3$. Четырехрядные матрицы γ_0, γ_a, γ_4 удовлетворяют алгебре Клиффорда

$$\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2g_{\mu\nu};\qquad \mu,\nu=0,1,2,3,4,$$

$g_{00}=-g_{11}=-g_{22}=-g_{33}=-g_{44}=1$; $g_{\mu\nu}=0$, если $\mu\neq\nu$. В (1.2) под повторяющимися индексами подразумевается суммирование от 1 до 3.

Обозначим через $\{Q_A\}$ множество базисных элементов алгебры Ли некоторой группы G. Уравнение (1.1) инвариантно относительно группы G, если выполняющей условия

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t}-\mathcal{H},Q_A\right]_-\Psi(t,\vec{x})=0,\qquad A=1,2,\ldots. \tag{1.3}$$

Задача о нахождении максимальной группы инвариантности или алгебры инвариантности уравнения (1.1) состоит в описании и явном построении всех операторов Q_A, удовлетворяющих условиям (1.3).

Теорема 1. *Уравнение Дирака (1.1) инвариантно относительно таких двух 10-мерных алгебр Ли, базисные элементы которых задаются операторами*

$$\begin{aligned}\{Q_A^{(1)}\}:\quad & P_0^{(1)}=p_0=i\frac{\partial}{\partial t},\qquad P_a^{(1)}=p_a=-i\frac{\partial}{\partial x_a},\quad a=1,2,3,\\ & J_{ab}^{(1)}=J_{ab}=\widetilde{x}_a p_b-\widetilde{x}_b p_a,\qquad J_{0a}^{(1)}=x_0p_a-\widetilde{x}_a p_0,\quad x_0=t;\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\widetilde{x}_a = Ux_aU^{+} = x_a + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\gamma_0\mathcal{H}}{\sqrt{\mathcal{H}^2}}\right)\left(\frac{\gamma_a}{\sqrt{\mathcal{H}^2}} - \frac{\gamma_0\mathcal{H}p_a}{\mathcal{H}^2\sqrt{\mathcal{H}^2}}\right), \tag{1.5}$$

где унитарный оператор U имеет вид [6]

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\gamma_0\mathcal{H}}{\sqrt{\mathcal{H}^2}}\right). \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned} \{Q_A^{(2)}\}: \quad & P_0^{(2)} = \mathcal{H} = \gamma_0\gamma_a p_a + \gamma_0\gamma_4 m, \qquad P_a^{(2)} = p_a, \\ & J_{ab}^{(2)} = J_{ab}, \qquad J_{0a}^{(2)} = x_0 p_a - \frac{1}{2}(\widetilde{x}_a\mathcal{H} + \mathcal{H}\widetilde{x}_a). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Доказательство. Можно непосредственно проверить, что условия (1.3) для операторов (1.4) и (1.7) выполняются. Однако в этом проще убедиться, если над уравнением (1.1) и операторами (1.4) и (1.7) сделать унитарное преобразование (1.6). Подробное доказательство см. в [5, 6].

Замечание 1. Операторы (1.4) и (1.7) порождают совершенно различные правила преобразования для пространственных и временной координат при переходе от одной системы отсчета к другой:

$$\begin{aligned} \left(x_a^{(1)}\right)' &= \exp\left\{iJ_{0b}^{(1)}\theta_b\right\} x_a \exp\left\{-iJ_{0c}^{(1)}\theta_c\right\}, \\ \left(x_0^{(1)}\right)' &= \exp\left\{iJ_{0b}^{(1)}\theta_b\right\} x_0 \exp\left\{-iJ_{0c}^{(1)}\theta_c\right\} \neq x_0, \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\left(x_a^{(2)}\right)' = \exp\left\{iJ_{0b}^{(2)}\theta_b\right\} x_a \exp\left\{-iJ_{0c}^{(2)}\theta_c\right\}, \tag{1.9}$$

$$\left(x_0^{(2)}\right)' = \exp\left\{iJ_{0b}^{(2)}\theta_b\right\} x_0 \exp\left\{-iJ_{0c}^{(2)}\theta_c\right\} = x_0, \tag{1.10}$$

θ_b — параметры преобразования.

Формула (1.10) указывает на то, что время не меняется при переходе от одной системы отсчета в другой. Это означает, что релятивистское уравнение (1.1) инвариантно относительно преобразовании (1.9), (1.10), хотя время при таком преобразовании не изменяется. Заметим, что нелокальное преобразование (1.10), конечно, не совпадает ни с преобразованием Лоренца, ни с преобразованием Галилея. Это означает, что преобразования (1.9), (1.10) не сохраняют квадратичную форму в конфигурационном пространстве

$$x_0^2 - x_a^2 \neq (x_0)^2 - (x_a)^2.$$

Однако аналогичные преобразования для энергии и импульса сохраняют квадратичную форму в импульсном пространстве

$$p_0^2 = p_a^2 = (p_0)^2 - (p_a)^2.$$

Таким образом, уравнение Дирака (1.1) обладает двойственной природой. С одной стороны, оно инвариантно относительно преобразований Лоренца, сохраняющих квадратичные формы как в конфигурационном, так и в импульсном пространствах. С другой стороны, уравнение Дирака инвариантно относительно преобразований (1.9), (1.10), которые не сохраняют квадратичную форму в конфигурационном пространстве. Если с помощью операторов (1.7) найти соответствующие формулы преобразования для энергии н импульса, то такие преобразования сохраняют квадратичную форму в импульсном пространстве. Этот последний факт, инвариантность уравнения (1.1) и не инвариантность квадратичной формы относительно преобразований (1.9), (1.10), является следствием того, что оператор $i\frac{\partial}{\partial t}$ в пространстве решений уравнения (1.1) имеет такой же спектр, как и оператор $\mathcal{H}$. Спектр оператора $\mathcal{H}$ лежит, за исключением интервала $(-m, m)$, на всей действительной оси.

Используя эти рассуждения можно доказать следующее общее утверждение.

Теорема 2. *Если произвольное уравнение вида (1.1) инвариантно относительно преобразований Лоренца, и спектр оператора $\mathcal{H}(p)$ лежит на действительной оси и имеет ненулевую щель, то такое уравнение также инвариантно относительно преобразований координат $x_a = f_a(x_1, x_2, x_3)$, $a = 1, 2, 3$, при которых время не изменяется.*

Замечание 2. Уравнения Максвелла при отсутствии зарядов может быть записано в форме (1.1) н оператор $\mathcal{H}$ для этих уравнений удовлетворяет условиям теоремы 2 [7]. Операторы (1.4), (1.5) являются интегро-дифференциальными.

С помощью интегрального преобразования (1.6) по указанной схеме доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. *Уравнение (1.1) инвариантно относительно алгебры Ли четырехмерной группы вращений $O(4)$, базисные элементы которой задаются интегро-дифференциальными операторами*

$$\tilde{S}_{ab} = \frac{i}{4}(\tilde{\gamma}_a\tilde{\gamma}_b - \tilde{\gamma}_b\tilde{\gamma}_b), \quad a, b = 1, 2, 3, \qquad \tilde{S}_{4a} = \frac{i}{4}(\tilde{\gamma}_4\tilde{\gamma}_a - \tilde{\gamma}_a\tilde{\gamma}_4), \tag{1.11}$$

где

$$\tilde{\gamma}_a = U^+\gamma_a U = \gamma_a + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\gamma_0\mathcal{H}}{\sqrt{\mathcal{H}^2}}\right)\left\{\frac{(\gamma_a\gamma_c - \gamma_c\gamma_a)p_c + 2\gamma_a\gamma_4 m}{\sqrt{\mathcal{H}^2}}\right\},$$

$$\tilde{\gamma}_4 = U^+\gamma_4 U = \gamma_4 + \left(1 - \frac{\gamma_b p_b + \gamma_4 m}{\sqrt{\mathcal{H}^2}}\right)\frac{\gamma_4\gamma_c p_c}{\sqrt{\mathcal{H}^2}}.$$

2. Рассмотрим групповые свойства уравнения типа Дирака с собственным временем [11]

$$i\frac{\partial\Psi(\tau, x_0, x_1, x_2, x_3)}{\partial\tau} = (\gamma_0 p_0 - \gamma_a p_a)\Psi(\tau, x_0, x_1, x_2, x_3). \tag{1.12}$$

Теорема 4. *Уравнение (1.12) инвариантно относительно группы вращений и сдвигов в пятимерном пространстве Минковского. Базисные элементы этой алгебры инвариантности уравнения (1.12) задаются такими дифференциальными операторами:*

$$\begin{gathered}
P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad P_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad P_4 = -i\frac{\partial}{\partial\tau}, \\
J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \qquad S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu), \\
J_{4\mu} = \tau p_\mu + \frac{1}{2}(x_\mu\hat{M} + \hat{M}x_\mu), \qquad \hat{M} = \gamma_0 p_0 - \gamma_a p_a.
\end{gathered} \tag{1.13}$$

Теорема 5. *Уравнение (1.12) инвариантно относительно группы $SO(1,5)$, если на множестве решений уравнения (1.12) оператор $p_\mu^2 = p_0^2 - p_a^2 > 0$, или группы $SO(2,4)$, если на множестве решений уравнения (1.12) оператор $p_\mu^2 = p_0^2 - p_a^2 < 0$.*

Замечание 3. В этом случае базисные элементы алгебры инвариантности уравнения (1.12) являются интегро-дифференциальными операторами. Из теоремы 5 следует, что уравнение (1.12) инвариантно относительно конформных преобразований.

2. Групповые свойства уравнений Кеммера–Дэффина и Клейна–Гордона–Фока

1. Уравнение Кеммера–Дэффина (КД) — это система десяти дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} &(\beta_0 p_0 - \beta_a p_a - m)\Psi(t, x_1, x_2, x_3) = 0, \\ &p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad a = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где четыре десятирядные матрицы β_0 и β_a удовлетворяют алгебре

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\lambda + \beta_\lambda \beta_\nu \beta_\mu = g_{\mu\nu}\beta_\lambda + g_{\lambda\nu}\beta_\mu. \tag{2.2}$$

Групповые свойства уравнения КД устанавливаются следующей теоремой.

Теорема 6. *Уравнение КД инвариантно относительно 34-мерной алгебры Ли, содержащей в качестве подалгебры алгебру группы $SU(3)$.*

Доказательство этой теоремы опубликовано в [13].

Известно, что помимо 10-мерного неприводимого представления алгебры (2.2), существует 5-мерное неприводимое представление. Поэтому неприводимое представление алгебры (2.2) наименьшей размерности может быть реализовано матрицами 5×5. В этом случае уравнение КД представляет собой дифференциальную систему пяти уравнений, для которых справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Пятимерная система уравнений КД инвариантная относительно алгебры Ли группы $SU(3)$.*

2. Перейдем к изучению групповых свойств уравнения Клейна–Гордона–Фока (КГФ). Преобразуем уравнение КГФ

$$\left(p_0^2 - p_a^2 - m^2\right)\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad x_0 = t \tag{2.3}$$

с помощью замены

$$p_0\varphi = \varkappa\psi_2, \qquad \varphi \equiv \psi_2, \qquad p_0\varphi \neq 0, \tag{2.4}$$

где $\varkappa$ — постоянная величина, в системе двух уравнений первого порядка относительно временной производной:

$$p_0\Psi(t, \vec{x}) = \mathcal{H}\Psi(t, \vec{x}), \qquad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1(t, \vec{x}) \\ \psi_2(t, \vec{x}) \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\varkappa}\left\{\left(E^2 + \varkappa^2\right)\sigma_1 - i\sigma_2\left(E^2 - \varkappa^2\right)\right\}, \qquad E = \left(p_a^2 + m^2\right)^{1/2}, \tag{2.6}$$

где σ_1, σ_2, σ_3 — двухмерные матрицы Паули.

Следующая теорема устанавливает групповые свойства уравнения КГФ.

Теорема 8. *Уравнение (2.5) инвариантно относительно двух 10-мерных алгебр Ли, базисные элементы которых задаются операторами:*

$$
\begin{aligned}
&P_0^{(1)} = p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad P_a^{(1)} = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad J_{ab}^{(1)} = x_a p_b - x_b p_a,\\
&J_{0a}^{(1)} = x_0 p_a - x_a p_0 + \xi_a^{(1)}, \qquad \xi_a^{(1)} = -ip_a\frac{p_0}{2E^2}(\sigma_0+\sigma_3);
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&P_0^{(2)} = \mathcal{H}, \qquad P_0^{(2)} = p_a, \qquad J_{ab}^{(2)} = x_a p_b - x_b p_a,\\
&J_{0a}^{(2)} = x_0 p_a - \frac{1}{2}(x_a\mathcal{H} + \mathcal{H}x_a) + \xi_a^{(2)}, \qquad \xi_a^{(2)} = -ip_a\frac{\mathcal{H}}{2E^2},
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

где σ_0 — единичная двухмерная матрица.

Замечание 1. Операторы (2.7) н (2.8) удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли группы Пуанкаре $P(1,3)$.

3. Изучим групповые свойства линейного уравнения четвертого порядка

$$
i\frac{\partial\Psi(t,x_1,x_2,x_3)}{\partial t} = (a_0 + a_2p^2 + a_4p^4)\Psi(t,x_1,x_2,x_3),
\tag{2.9}
$$

где a_0, a_2, a_4 — постоянные величины,

$$
p^2 = p_a^2 = p_1^2+p_2^2+p_3^2, \quad p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad p^4 = (p_a^2)^2 = (p_1^2+p_2^2+p_3^2)^2.
$$

Если в (2.9) положить $a_0 = a_4 = 0$, $a_2 = (2m)^{-1}$, то такое уравнение совпадает со свободным нерелятивистским уравнением Шредингера для одной частицы. Поэтому уравнение (2.9) следует рассматривать как определенное обобщение уравнения Шредингера, учитывающее релятивистские эффекты. Для построения основ обобщенной нерелятивистской квантовой механики на базе уравнения (2.9) необходимо прежде всею найти группу инвариантности такого уравнения, что дает возможность получить формулу сложения скоростей при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Следующая теорема устанавливает группу инвариантности уравнения (2.9).

Теорема 9. *Уравнение (2.9) инвариантно относительно 20-мерной алгебры Ли, базисные элементы которой задаются операторами*

$$
\begin{aligned}
&P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad P_{ab} = p_a p_b,\\
&L_a = p^2 p_a, \qquad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, \qquad \hat{M} = b_4\hat{I},
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

$$
G_a = tp_a^{(4)} - b_4 x_a, \qquad a = 1,2,3,
\tag{2.11}
$$

где $p_a^{(4)} = 2b_4(a_2 + 2a_4p^2)p_a$, b_4 — постоянная величина, $\hat{I}$ — единичный оператор.

Операторы G_a порождают такие преобразования пространственных координат и обобщенного импульса $p_a^{(4)}$:

$$
\begin{aligned}
&x_a' = \exp\{iG_b\theta_b\}x_a\exp\{-iG_c\theta_c\} = x_a + b_4^{-1}\left(p_a^{(4)\prime} - p_a^{(4)}\right)t,\\
&t' = \exp\{iG_b\theta_b\}t\exp\{-iG_c\theta_c\} = t,
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

$$p_a^{(4)'} = \exp\{iG_b\theta_b\}p_a^{(4)}\exp\{-iG_c\theta_c\} = p_a^{(4)} + b_4(x'_a - x_a)t^{-1}, \tag{2.13}$$

$$p_a^{(4)'} = p_a + 2b_4^2\{(a_0^2 + 2b_4^2a_4\theta^2 + 2a_4p^2 + 4a_4b_4p_b\theta_b)\theta_a + \\ +2a_4(2p_b\theta_b + b_4\theta^2)p_a\}, \tag{2.14}$$

где θ_b — параметры преобразования, $\theta^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2$.

В случае, когда $a_0 = a_4 = 0$, $a_2 = (2m)^{-1}$, $b_4 = m$, а параметры преобразования $\theta_a = v_a$ — компоненты скорости одной системы отсчета относительно другой, преобразования (2,12) и (2.13) приобретают простой вид

$$x'_a = x_a + \frac{p_a - p_0}{m}t = x_a + tv_a, \qquad p'_a = p_a + mv_a, \qquad t' = t. \tag{2.15}$$

Преобразования (2.15) совпадают с обычными преобразованиями Галилея.

Замечание 2. Оператор обобщенного импульса определяется из требования инвариантности уравнения (2.9) относительно операторов (2.11), т.е. из требования $[p_0 - \mathcal{H}, G_a] = 0$.

Теорема 10. *Алгеброй инвариантности свободного уравнения Шредингера (уравнение (2.9), где $a_0 = a_4 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2m}$) является шестимерная алгебра Ли, изоморфная алгебре Ли группы Лоренца $SO(1,3)$.*

Доказательство этой теоремы приведено в [15].

Во всех рассмотренных выше системах дифференциальных уравнений вида

$$\hat{L}\left(t, x, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(t, x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{2.16}$$

$\hat{L}$ — линейный дифференциальный оператор первого порядка с постоянными коэффициентами. Заметим, что все теоремы о группах инвариантности таких уравнении доказывались с помощью приведения матричного оператора $\hat{L}$ к диагональному виду изометрическим (или унитарным) преобразованием. Привести L к диагональному виду удалось благодаря тому, что символ $L(x,p)$ этого оператора является симметрической матрицей.

В тех случаях, когда символ оператора $\hat{L}$ появляется симметрической матрицей, для установления алгебры инвариантности уравнения (2.16) нужно преобразовать его к виду, в котором символ преобразованного оператора $\hat{L}'$ имеет канонический вид Жордана. Установив алгебру инвариантности для преобразованного уравнения (2.16), с помощью изометрического преобразования находится явный вид алгебры инвариантности для исходного уравнения (2.16). Очевидно, что методом канонических преобразований можно изучить групповые свойства дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Алгебра инвариантности уравнения (2.16) может быть установлена с помощью диагонализации и в том случае, когда $\hat{L}$ — абстрактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Согласно спектральной теореме фон Неймана, всякий самосопряженный оператор может быть приведен к диагональному виду унитарным преобразованием. Примером таких уравнений может служить счетная система уравнений первого порядка в частных производных типа Майорана, описывающая движение релятивистской системы с переменной массой и спином. Групповые свойства линейных дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве будут изучены в другой статье.

1. Овсянников Л.В., Группы и инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений, *ДАН СССР*, 1958, **118**, № 3, С. 439–441.
2. Овсянников Л.В., Групповые свойства уравнений механики, В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа, М., Наука, 1972, С. 381–393.
3. Митропольский Ю.А., Лопатин Л.К., О преобразовании систем нелинейных дифференциальных уравнений к нормальной форме, *Математическая физика*, К., 1973, вып. 14, С. 125–140.
4. Mitropolski Yu.A., Lopatine A.K., Le methode asymptotique dans la theoriedes processus non-lineaires ondulatoires et osciliatcires, *Bolletino della Unione Matematica Italiana*, 1975, **4**, 11, Suppl. fasc. 3, P. 413–429.
5. Fushchych W.I., On additional invariance of relativistic equations of motion, Preprint Inst. Theor. Phys., 1970. № 32E, P. 1–16.
6. Фущич В.И., О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения, *Теор. и мат. физика*, 1971, **7**, № 1, С. 3–12.
7. Fushchych W.I., On the additional invariance of the Dirac and Maxwell Equations, *Lettere Nuovo Cimento*, 1974, **11**, № 10, P. 508–512.
8. Фущич В.И., О релятивистски-инвариантном массовом операторе, *Укр. физ. журн.*, 1968, **13**, № 3, С. 363–372.
9. Фущич В.И., О представлении группы де Ситтера, *Укр. физ. журн.*, 1966, **11**, № 8, С. 907—909.
10. Фущич В.И., О дополнительной инвариантности уравнения Клейна–Гордона–Фока, *ДАН СССР*, 1976, **230**, № 3, С. 570–573.
11. Фущич В.И., Сегеда Ю.Н., О группах инвариантности некоторых уравнений релятивистской квантовой механики, *Укр. мат. журн.,* 1976, **28**, № 6, С. 844–849.
12. Никитин А.Г., Сегеда Ю.Н., Фущич В.И., О дополнительной инвариантности уравнений Кеммера–Дэффина и Рариты–Швингера, *Теор. и мат. физика*, 1976, **29**, № 1, С. 82–92.
13. Владимиров С.А., Фущич В.И., Максимальная и минимальная группы симметрии атома водорода, *Укр. физ. журн.*, 1976, **21**, № 9, С. 1460–1462.
14. Сегеда Ю.Н., О дополнительной инвариантности уравнений Максвелла, В кн.: Краевые задачи электродинамики сплошных сред, Киев, 1976, С. 218—224.
15. Фущич В.И., Сегеда Ю.Н., О новой алгебре инвариантности уравнения Шредингера, *ДАН СССР*, 1977, **232**, № 4, С. 801–802.
16. Niederer U., The maximal kinematical Invariance groups of Schrödinger equation, *Helvetica Physica Acta*, 1972, **45**, С. 802–814.
17. Anderson R.L., Kumei S., Wulfman C.E., Generalization of the concept of invariance of differential equations, *Physical Review Letters*, 1972, **28**, № 15, С. 988–992.
18. Boyer C.P., Kalnins E.G., Miller W., Lie theory and separation of variables, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, P. 499–512.