О дополнительной инвариантности уравнений Кеммера–Дэффина и Рариты–Швингера

А.Г. НИКИТИН, Ю.Н. СЕГЕДА, В.И. ФУЩИЧ

The complementary (implicite) symmetry of the Kemmer–Duffin (KD), Rarita–Schwinger (RS) and Dirac equations is established. It is shown that the algebra of the invariance of the KD equations is the 34-dimensional Lie algebra including the $SU(3)$ algebra as one of its subalgebras, and the RS equation is invariant with respect to the 64-dimensional Lie algebra including the subalgebra $O(2,4)$. The explicit form of the operator reducing the RS equation to the diagonal form, and the operator transforming the KD equation into the TST equation are found. The algebra of the complementary invariance of the Dirac and TST equations are found in the class of differential operators.

Установлена дополнительная (неявная) симметрия уравнений Кеммера–Дэффина (КД), Рариты–Швингера (РШ) и Дирака. Показано, что алгеброй инвариантности уравнения КД является 34-мерная алгебра Ли, содержащая алгебру $SU(3)$ в качестве подалгебры, и что уравнение РШ инвариантно относительно 64-мерной алгебры Ли, включающей подалгебру $O(2,4)$. Найдены явный вид оператора, приводящего уравнение РШ к диагональной форме, и оператор, преобразующий уравнение КД в уравнение Тамма–Сакаты–Такетани (ТСТ). Найдена алгебра дополнительной инвариантности уравнений Дирака и ТСТ в классе дифференциальных операторов.

Введение

Хорошо известно, что некоторые уравнения движения в квантовой физике обладают дополнительной (неявной) симметрией. Так, например, уравнение Шредингера для атома водорода обладает неявной инвариантностью относительно группы четырехмерных вращений [1], уравнения Максвелла и Дирака (для нулевой массы) инвариантны относительно конформной группы [2].

В [3, 4] установлено, что уравнения Максвелла, Клейна–Гордона и Дирака (с нулевой и ненулевой массами) обладают дополнительной инвариантностью, отличной от лоренц-инвариантности. Базисные элементы этой новой алгебры инвариантности не принадлежат, как это имеет место в случае лоренц-симметрии, когда инфинитезимальные операторы представляют собой линейные дифференциальные операторы первого порядка, классу дифференциальных операторов. В этом случае базисные элементы являются интегродифференциальными (нелокальными) операторами в конфигурационном пространстве. Из-за нелокальности эти операторы не являются инфинитезимальными операторами касательных преобразований в смысле Ли, однако они образуют конечномерную алгебру Ли.

В дальнейшем под дополнительной инвариантностью уравнений движения мы понимаем любую инвариантность, отличную от лоренц-инвариантности.

В настоящей работе исследуются групповые свойства свободных релятивистских уравнений движения для частиц с ненулевой массой и спинами $s \leq 3/2$.

Теоретическая и математическая физика, 1976, **29**, № 1, С. 82–93.

Устанавливаются теоремы о дополнительной инвариантности уравнений Кеммера–Дэффина (КД), Тамма–Сакаты–Такетани (ТСТ) и Рариты–Швингера (РШ). Кроме того, найдена алгебра инвариантности Дирака и ТСТ в классе дифференциальных операторов. Доказательство теорем осуществляется с помощью приема, предложенного в [3]. Суть его состоит в том, что сначала система дифференциальных уравнений первого порядка, предварительно приведенная к гамильтоновой форме, с помощью унитарного преобразования приводится к другому эквивалентному уравнению с диагональным гамильтонианом, а затем уже для преобразованного уравнения устанавливается дополнительная алгебра инвариантности. Найдя базисные элементы дополнительной алгебры инвариантности для преобразованного уравнения и имея унитарный оператор, диагонализующий гамильтониан, определяем алгебру инвариантности исходного уравнения.

В последние годы интенсивно изучаются групповые свойства дифференциальных уравнений в частных производных на основе классических методов Ли [5, 6]. Эти методы существенно отличаются от наших.

1. Симметрия уравнений Кеммера–Дэффина и Тамма–Сакаты–Такетани

А. Уравнение КД записывается в виде

$$(\beta_\mu p^\mu - m)\Psi(t,\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \mu = 0,1,2,3, \tag{1.1}$$

где $p_\mu = i\partial/\partial x^\mu$, а матрицы β_μ удовлетворяют алгебре

$$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\lambda + \beta_\lambda\beta_\nu\beta_\mu = \beta_\mu g_{\nu\lambda} + \beta_\lambda g_{\mu\nu}. \tag{1.2}$$

Как известно, уравнение КД описывает свободное движение частицы со спином 0 или 1. В первом случае матрицы β_μ 5-рядные, а во втором — 10-рядные.

Удобнее записать уравнение (1.1) в гамильтоновой форме [7]

$$i\partial\Psi/\partial t = H\Psi(t,\boldsymbol{x}), \qquad H = [\beta_0,\beta_a]p_a + \beta_0 m, \tag{1.3}$$

$$\left\{m\left(1-\beta_0^2\right) + (\beta\cdot\boldsymbol{p})\beta_0^2\right\}\Psi(t,\boldsymbol{x}) \equiv mP\Psi = 0. \tag{1.4}$$

Физический смысл дополнительного условия (1.4) состоит в том, что оно устраняет “лишние” компоненты волновой функции Ψ. Для спина $s=0$ волновая функция имеет три, а для спина $s=1$ — четыре лишние компоненты.

Условие инвариантности уравнения (1.1) относительно некоторой совокупности преобразований эквивалентно по определению выполнению условий

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - H, Q_A\right]\Psi(t,\boldsymbol{x}) = 0, \qquad [mP, Q_A]\Psi(t,\boldsymbol{x}) = 0, \tag{1.5}$$

где Q_A — операторы преобразований, Ψ удовлетворяет уравнениям (1.3), (1.4), $\{A\}$ — некоторое множество индексов.

Задача о нахождении алгебры инвариантности уравнения (1.1) состоит в описании всевозможных операторов Q_A, удовлетворяющих условиям (1.5).

Покажем, что справедлива следующая

Теорема 1. *Уравнение КД инвариантно относительно алгебры Ли группы $SU(3)$. В случае спина $s=1$ уравнение КД инвариантно относительно более* *широкой, 34-мерной алгебры Ли, содержащей алгебру $SU(3)$ в качестве подалгебры. Базисные элементы этой алгебры инвариантности удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.10), (1.14).*

Доказательство. Переход к представлению, в котором H диагонален, осуществляется с помощью интегрального унитарного оператора типа Фолди–Ваутхойзена [8]

$$\begin{gathered}\Psi \to \Phi = U\Psi, \qquad U = \exp\left\{\frac{\beta_a p_a}{p}\operatorname{arctg}\frac{p}{m}\right\},\\ p = \left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right)^{1/2}, \qquad a = 1, 2, 3.\end{gathered} \tag{1.6}$$

В результате получаем систему интегродифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} i\partial\Phi/\partial t = H^\Phi \Phi(t, \boldsymbol{x}), \qquad H^\Phi = UHU^{-1} = \beta_0 E,\\ \left(1 - \beta_0^2\right)\Phi(t, \boldsymbol{x}) = 0, \qquad E = (p^2 + m^2)^{1/2},\end{gathered} \tag{1.7}$$

а условие инвариантности (1.5) приводится к виду

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - \beta_0 E, Q_A^\Phi\right]\Phi = 0, \qquad Q_A^\Phi = UQ_A U^{-1}, \qquad [1 - \beta_0^2, Q_A^\Phi]\Phi = 0. \tag{1.5$'$}$$

Условие (1.5′) удовлетворяется произвольными матрицами, коммутирующими с β_0.

Используя соотношения (1.2), нетрудно убедиться, что условию (1.5′) удовлетворяют матрицы

$$S_{ab} = i(\beta_a\beta_b - \beta_b\beta_a), \qquad S_{ab} = \varepsilon_{abc}S_c, \qquad a, b, c = 1, 2, 3. \tag{1.8}$$

Этим же свойством обладают, очевидно, все функции от S_{ab}, среди которых можно выбрать только восемь независимых:

$$\begin{gathered} Q_1^\Phi = -(S_1S_2 + S_2S_1), \qquad Q_2^\Phi = S_3, \qquad Q_3^\Phi - i(S_3S_1S_2 - S_1S_2S_3),\\ Q_4^\Phi = -(S_3S_1 + S_1S_2), \qquad Q_5^\Phi = -S_2, \qquad Q_6^\Phi = -(S_2S_3 + S_3S_2),\\ Q_7^\Phi = S_1, \qquad Q_8^\Phi = -\frac{i}{\sqrt{3}}(S_3S_1S_2 + S_1S_2S_3 - 2S_2S_3S_1).\end{gathered} \tag{1.9}$$

Операторы Q_A^Φ, $A = 1, 2, \ldots, 8$, удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[Q_M^\Phi, Q_L^\Phi] = if_{MLK}Q_K^\Phi, \qquad M, L, K = 1, 2, \ldots, 8, \tag{1.10}$$

где f_{MLK} — структурные константы группы $SU(3)$.

В случае спина $s = 0$ операторами (1.10) исчерпываются всевозможные (с точностью до эквивалентности) независимые матрицы, коммутирующие с β_0. При $s = 1$ число таких матриц увеличивается. Полную систему матриц, коммутирующих с β_0, построим следующим образом. Не умаляя общности, матрицу β_0 можно выбрать в виде

$$\beta_0 = \begin{pmatrix} I^3 & & \\ & -I^3 & \\ & & 0^4 \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

где I^3, 0^4 — трехрядная единичная и четырехрядная нулевая матрицы, на остальных местах стоят нули.

Общий вид матрицы, коммутирующей с β_0, задается выражением

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

где a, b, c — произвольные квадратные матрицы размерности 3×3, 3×3 и 4×4, соответственно. Таким образом, имеется всего 34 линейно-независимые матрицы, коммутирующие с β_0. В число этих 34 матриц входят операторы Q_A^Φ, $A = 1, 2, \ldots, 8$, из (1.9), а остальные можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&Q_{s+A}^\Phi = \beta_0 Q_A^\Phi, \quad A = 1, 2, \ldots, 8, \qquad Q_{17}^\Phi = \Gamma_0 = (S_{12} - S_{43})(1 - \beta_0^2), \\
&Q_{17+a}^\Phi = \Gamma_a = (S_{bc} + S_{4a})(S_{31} - S_{42})(1 - \beta_0^2), \qquad S_{4a} = i(\beta_a\beta_4 - \beta_4\beta_a), \\
&\beta_4 = \frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\beta_\mu\beta_\nu\beta_\rho\beta_\sigma, \qquad \{Q_{21}^\Phi, Q_{22}^\Phi, \ldots, Q_{32}^\Phi\} = \\
&= \{\Gamma_\mu\Gamma_\nu; \Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\lambda; \Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\}, \qquad Q_{33}^\Phi = 1, \qquad Q_{34}^\Phi = \beta_0, \\
&\mu, \nu, \lambda, \ldots = 0, 1, 2, 3, \qquad a = 1, 2, 3; \qquad (a, b, c) = \text{цикл}\,(1, 2, 3).
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Эти операторы удовлетворяют соотношениям коммутации

$$[Q_{s+A}^\Phi, Q_{s+B}^\Phi] = i f_{ABC} Q_C^\Phi, \qquad [Q_{s+A}^\Phi, Q_B^\Phi] = i f_{ABC} Q_{s+C}^\Phi; \tag{1.14$'$}$$

$$[\Gamma_\mu, Q_A^\Phi] = [\Gamma_\mu, Q_{s+A}^\Phi] = 0, \qquad (\Gamma_\mu\Gamma_\nu + \Gamma_\nu\Gamma_\mu)(1 - \beta_0^2) = 2g_{\mu\nu}(1 - \beta_0^2). \tag{1.14$''$}$$

Перестановочные соотношения (1.10) и (1.14) непосредственно следуют из (1.2). Теорема доказана.

В заключение этого пункта отметим, что явный вид операторов (1.9) и (1.13) в исходном Ψ-представлении получается с помощью преобразования, обратного к (1.6). Иными словами, операторы Q_A получаются из Q_A^Φ, $A = 1, 2, \ldots, 34$, посредством замены

$$\boldsymbol{S} \to \boldsymbol{S} = U^{-1}\boldsymbol{S}U = \boldsymbol{S} = \frac{m}{E} - i\frac{\beta \times \boldsymbol{p}}{E} + \frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{p})}{E(E+m)}. \tag{1.8$'$}$$

Замечание 1. Как известно [9], уравнение (1.1) в предельном случае $m \to 0$ не может служить для описания движения безмассовых частиц. Оказывается, однако, что такой предельный переход возможен в гамильтоновой форме (1.3), (1.4) уравнения КД. При этом теорема 1 остается верной.

Если же на волновую функцию Ψ наложить пуанкаре-инвариантное условие поперечности

$$(\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{p})\Psi = 0, \tag{1.15}$$

то теорема 1 не имеет места.

Система уравнений (1.3), (1.4) (с $m = 0$) и (1.15) эквивалентна уравнениям Максвелла.

Замечание 2. Для уравнения КД, как и для уравнения Дирака [3], можно указать четыре типа операторов, удовлетворяющих коммутационным соотношениям алгебры Ли группы Пуанкаре, для которых выполняется условие (1.5). Эти операторы имеют такое явное представление:

$$\begin{aligned}\{Q^1\}:\quad & {}^1P_\mu = i\partial/\partial x^\mu,\\ & {}^1J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu},\qquad S_{\mu\nu} = i(\beta_\mu\beta_\nu - \beta_\nu\beta_\mu);\end{aligned}\tag{1.16}$$

$$\begin{aligned}\{Q^2\}:\quad & {}^2P_0 = H,\qquad {}^2P_a = -i\partial/\partial x_a,\\ & {}^2J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab},\qquad {}^2J_{0a} = x_0 p_a - \frac{1}{2}(x_a H + H x_a);\end{aligned}\tag{1.17}$$

$$\begin{aligned}\{Q^3\}:\quad & {}^3P_0 = i\partial/\partial t,\qquad {}^3P_a = -i\partial/\partial x_a,\\ & {}^3J_{ab} = \widetilde{x}_a p_b - \widetilde{x}_b p_a,\qquad {}^3J_{0a} = x_0 p_a - \widetilde{x}_a p_0;\end{aligned}\tag{1.18}$$

$$\begin{aligned}\{Q^4\}:\quad & {}^4P_0 = H,\qquad {}^3P_a = -i\partial/\partial x_a,\\ & {}^4J_{ab} = \widetilde{x}_a p_b - \widetilde{x}_b p_a,\qquad {}^4J_{0a} = x_0 p_a - \frac{1}{2}(\widetilde{x}_a H + H\widetilde{x}_a);\end{aligned}\tag{1.19}$$

где

$$\widetilde{x}_a = x_a - i\frac{\beta_a}{E} + i\frac{(\beta_k p_k)p_a}{E^2(E+m)} + \frac{(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{S})_a}{E(E+m)}.$$

Операторы (1.16) неэрмитовы в гильбертовом пространстве, где эрмитовы операторы (1.17). Операторы (1.18) и (1.19) эрмитовы и неэквивалентны операторам (1.16) и (1.17). Этот факт легко установить, если вычислить операторы Казимира для представлений (1.16), (1.18) и (1.17), (1.19).

Далее отметим, что операторы (1.16)–(1.19) порождают совершенно различные законы преобразования координаты и времени. А именно из явного вида операторов J_{0a} непосредственно получаем, что в случае (1.17) и (1.19) в отличие от (1.16) и (1.18) время не изменяется:

$$x_0' = \exp\{iJ_{0a}\theta_a\}x_0\exp\{-iJ_{0b}\theta_b\} = x_0.\tag{1.20}$$

Б. Уравнение ТСТ имеет вид [10]

$$\begin{aligned}& i\partial\Psi^{\text{ТСТ}}/\partial t = H^{\text{ТСТ}}\Psi_{\text{ТСТ}}(t,\boldsymbol{x}),\\ & H^{\text{ТСТ}} = \sigma_2 m - i\sigma_1\frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2}{m} + (i\sigma_1+\sigma_2)\frac{p^2}{2m},\end{aligned}\tag{1.21}$$

где $\Psi_{\text{ТСТ}}$ — шестикомпонентная волновая функция, S_a — генераторы представления, являющегося прямой суммой двух неприводимых представлений $D(1)$ группы $O(3)$, σ_1 и σ_2 — шестирядные матрицы Паули, коммутирующие с S_a.

Уравнение ТСТ описывает движение свободной релятивистской частицы со спином $s=1$ и в отличие от (1.1) не содержит лишних компонент.

Теорема 2. *Уравнение ТСТ инвариантно относительно 16-мерной алгебры Ли, содержащей алгебру $SU(3)$ в качестве подалгебры. Базисные элементы этой алгебры удовлетворяют перестановочным соотношениям (1.10), (1.14).*

Доказательство. Прежде всего установим связь между решениями уравнений КД и ТСТ. Обычно уравнение ТСТ получают из уравнений КД путем непосредственного исключена лишних компонент. Эта процедура для наших целей непригодна. Покажем, что уравнение ТСТ может быть получено из уравнений КД с помощью изометрического преобразования

$$\Psi \to \Psi^{\text{ТСТ}} = V\Psi, \qquad V = \exp\left\{\frac{\beta_a p_a}{m}\beta_0^2\right\} = 1 + \frac{\beta_a p_a}{m}\beta_0^2, \quad a = 1,2,3. \tag{1.22}$$

Нетрудно убедиться, что $\Psi^{\text{ТСТ}}$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} &i\partial\Psi^{\text{ТСТ}}/\partial t = VHV^{-1}\Psi^{\text{ТСТ}} = \beta_0\left(m + \frac{\beta_a p_a}{m}\right)\Psi^{\text{ТСТ}},\\ &V(mP)V^{-1}\Psi^{\text{ТСТ}} = m(1-\beta_0^2)\Psi^{\text{ТСТ}} = 0. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Система уравнений (1.23), как известно [7], эквивалентна (1.21), поскольку волновая функция $\Psi^{\text{ТСТ}}$ имеет только шесть отличных от нуля компонент, и всегда можно положить

$$\begin{aligned} &\beta_0 m\Psi^{\text{ТСТ}} = \sigma_2 m\Psi^{\text{ТСТ}},\\ &\beta_0\frac{\beta_a p_a}{m}\Psi^{\text{ТСТ}} = \left[-i\sigma_1\frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2}{m} + (\sigma_2 + i\sigma_1)\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\right]\Psi^{\text{ТСТ}}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Поскольку уравнения (1.3), (1.4) инвариантны относительно алгебры, порождаемой операторами Q_A, то уравнение (1.21) инвариантно относительно алгебры $\{Q_A^{\text{ТСТ}}\}$, $Q_A^{\text{ТСТ}} = VQ_AV^{-1}$. Явный вид операторов $Q_A^{\text{ТСТ}}$ получаем из (1.9), (1.13), (1.8′) и (1.22):

$$\begin{aligned} &Q_1^{\text{ТСТ}} = -(\check{S}_1\check{S}_2 + \check{S}_2\check{S}_1), \qquad Q_2^{\text{ТСТ}} = \check{S}_3,\\ &Q_3^{\text{ТСТ}} = -i(\check{S}_3\check{S}_1\check{S}_2 - \check{S}_1\check{S}_2\check{S}_3), \qquad Q_4^{\text{ТСТ}} = -(\check{S}_3\check{S}_1 + \check{S}_1\check{S}_3),\\ &Q_5^{\text{ТСТ}} = -\check{S}_2, \qquad Q_6^{\text{ТСТ}} = -(\check{S}_2\check{S}_3 + \check{S}_3\check{S}_2), \qquad Q_7^{\text{ТСТ}} = -\check{S}_1,\\ &Q_8^{\text{ТСТ}} = -\frac{i}{\sqrt{3}}(\check{S}_3\check{S}_1\check{S}_2 + \check{S}_1\check{S}_2\check{S}_3 - 2\check{S}_2\check{S}_3\check{S}_1), \qquad Q_{s+A}^{\text{ТСТ}} = \frac{H^{\text{ТСТ}}}{E}Q_A^{\text{ТСТ}},\\ &\check{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{S}\frac{m}{E} + \frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})}{E(E+m)} + \frac{i}{mE}\left\{\sigma_3(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{p})(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}) + \frac{i}{2}(1+\sigma_3)[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}^2]\right\}, \end{aligned} \tag{1.25}$$

$$Q_{17}^{\text{ТСТ}} = H^{\text{ТСТ}}/E, \qquad Q_{18}^{\text{ТСТ}} = 1. \tag{1.26}$$

Операторы (1.25) удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям (1.9) и (1.14′), что и операторы Q_A^{Φ}, Q_{A+8}^{Φ}. Операторы (1.26) коммутируют с (1.25).

Алгебра (1.25), (1.26) инвариантности уравнения ТСТ, конечно, уже алгебры (1.9), (1.14) уравнения КД. Это связано с тем, что волновая функция ТСТ имеет меньше компонент, чем волновая функция КД, и поэтому операторы $VQ_{17}, Q_{18}, \ldots, Q_{32}V^{-1}$ на решениях уравнения ТСТ не определены. Теорема доказана.

Замечание 3. Релятивистские уравнения без лишних компонент для частиц со спином $s = 1$, полученные в [11], также инвариантны относительно преобразований, удовлетворяющих алгебре (1.10), (1.14). Доказательство этого утверждения аналогично изложенному выше, поскольку упомянутые уравнения могут быть приведены к диагональной форме.

2. Симметрия уравнения Рариты–Швингера

Уравнение РШ для частицы со спином $s = 3/2$ может быть записано в виде

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\Psi^\nu(t,\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \gamma_\nu \Psi^\nu(t,\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3, \tag{2.1}$$

где γ_μ — 4×4-мерные матрицы Дирака. Волновая функция РШ имеет 16 компонент Ψ^ν_α, $\alpha = 1,2,3,4$.

Систему уравнений (2.1) запишем в гамильтоновой форме:

$$\begin{gathered} i\partial\Psi/\partial t = H\Psi(t,\boldsymbol{x}), \qquad \gamma_\nu\Psi^\nu(t,\boldsymbol{x}) = 0, \\ H = \begin{pmatrix} \hat{H} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{H} \end{pmatrix}, \qquad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix}, \qquad \hat{H} = \gamma_0\gamma_a p_a + \gamma_0 m. \end{gathered} \tag{2.2}$$

На решениях уравнений (2.2) реализуется следующее явно ковариантное представление алгебры Ли группы Пуанкаре:

$$P_0 = H, \qquad P_a = p_a = -i\partial/\partial x_a, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \tag{2.3}$$

где спиновые матрицы $S_{\mu\nu}$ являются генераторами представления $D(1/2,1/2) \times [D(1/2,0) \oplus D(0,1/2)]$ группы $O(1,3)$ и, следовательно, могут быть представлены в виде

$$\begin{gathered} S_{\mu\nu} = j_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}, \qquad [j_{\mu\nu}, \tau_{\mu'\nu'}] = 0, \qquad \tau_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\gamma_\mu\gamma_\nu, \\ j_{ab} = j^1_c + j^2_c, \qquad j_{0a} = i(j^1_a - j^2_a), \qquad [j^1_a, j^2_b] = 0, \end{gathered} \tag{2.4}$$

где j^1_a, j^2_b — генераторы представления $D(1/2)$ группы $O(3)$. Покажем теперь, что имеет место

Теорема 3. *Уравнение РШ инвариантно относительно 64-мерной алгебры Ли, содержащей алгебру Ли группы $O(2,4)$ как подалгебру. Базисными элементами этой алгебры являются всевозможные независимые произведения операторов (2.12).*

Доказательство. Как и в предыдущем разделе, для доказательства теоремы перейдем к представлению, в котором гамильтониан H диагонален, а волновая функция имеет только $2(2s+1)$ отличных от нуля компонент. Вопрос о переходе к такому представлению для уравнения РШ обсуждался в [12], однако там не был найден в явном виде оператор преобразования.

Мы получили такой оператор в форме

$$W = \exp\left\{ i\gamma_0 \frac{j_{0a}p_a}{p} \operatorname{arth}\frac{p}{E} \right\} \exp\left\{ \frac{\gamma_a p_a}{p} \operatorname{arctg}\frac{p}{m} \right\}. \tag{2.5}$$

Этот оператор не только диагонализует гамильтониан H (2.2), но также приводит остальные генераторы (2.3) канонической форме Фолди–Широкова.

Уравнения (2.2) после преобразования W принимают вид

$$\begin{gathered} i\partial\Phi/\partial t = H^\Phi\Phi(t,\boldsymbol{x}), \qquad H^\Phi = WHW^{-1} = \Gamma_0^{(16)}E, \\ S^2_{ab}\Phi = 3/2(3/2+1)\Phi; \qquad \Phi = W\Psi; \qquad E = (p^2+m^2)^{1/2}, \end{gathered} \tag{2.6}$$

где 16-рядная матрица $\Gamma_0^{(16)}$ всегда может быть выбрана в виде

$$\Gamma_0^{(16)} = \begin{pmatrix} \hat{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\hat{I} \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

$\hat{I}$ и 0 — четырехрядные единичная и нулевая матрицы.

Из (2.6) явствует, что дополнительная инвариантность уравнений РШ порождается теми матрицами B_N, которые удовлетворяют условиям

$$[B_N, \Gamma_0^{(16)}] = 0, \qquad [B_N, S_{ab}^2] = 0. \tag{2.8}$$

Без потери общности матрицу S_{ab}^2 можно выбрать в таком диагональном виде:

$$S_{ab}^2 = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 5\hat{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5\hat{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{I} \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Из (2.7) и (2.9) видно, что самый общий вид матрицы, коммутирующей с $\Gamma_0^{(16)}$ и S_{ab}^2, задается выражением

$$A = \begin{pmatrix} l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

где l, f, g, h — произвольные квадратные четырехрядные матрицы. Поэтому матрицу A можно представить в виде линейной комбинации 64 линейно-независимых матриц B_N, коммутирующих с $\Gamma_0^{(16)}$ и S_{ab}^2:

$$A = \sum_{N=1}^{64} a_N B_N, \tag{2.11}$$

с произвольными коэффициентами a_N.

Систему базисных матриц B_N можно построить в явном виде. Именно выберем 6 матриц размерностью 16×16:

$$\begin{gathered} \Gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(S_{23}S_{31} + S_{31}S_{23} - i\varepsilon_{abc}j_{0a}\tau_{bc}), \\ \Gamma_1 = 2i\tau_{23}(1 - 2j_{23}^2)(j_{ab}^2 - 1), \qquad \Gamma_2 = 2i\tau_{31}(1 - 2j_{31}^2)(j_{ab}^2 - 1), \\ \Gamma_3 = 2i[\tau_{12}(1 - j_{12}^2) + 2j_{12}\tau_{12}](j_{ab}^2 - 1), \qquad L_1 = \Gamma_0^{(16)}, \qquad L_2 = \frac{2}{3}S_{ab}^2 - \frac{3}{2}, \end{gathered} \tag{2.12}$$

которые удовлетворяют условию (2.8).

Используя соотношение (2.4), с помощью довольно громоздких вычислений можно установить, что операторы (2.12) удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} \Gamma_\mu\Gamma_\nu + \Gamma_\nu\Gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \qquad [L_1, L_2] = [\Gamma_\mu, L_1] = [\Gamma_\mu, L_2] = 0, \\ L_1^2 = L_2^2 = 1. \end{gathered} \tag{2.13}$$

Если теперь взять совокупность всевозможных независимых произведений операторов (2.13), то получим в точности 64 элемента, которые и образуют базисную систему матриц, удовлетворяющих (2.8). В частности, совокупность всевозможных независимых произведений матриц Γ_μ, как следует из (2.13), образует алгебру Клиффорда C_4, элементы которой являются базисными элементами алгебры Ли группы $O(2,4)$.

Для полноты изложения приведем явный вид матриц Γ_μ, L_1, L_2 в Ψ-представлении, где $\Psi = W^{-1}\Phi$. С помощью обратного преобразования W^{-1} получаем

$$\hat{\Gamma}_\mu = W^{-1}\Gamma_\mu W, \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{\Gamma}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{S}_{23}\hat{S}_{31} + \hat{S}_{31}\hat{S}_{23} - i\varepsilon_{abc}\hat{j}_{0a}\hat{\tau}_{bc}), \qquad \hat{\Gamma}_1 = 2i\hat{\tau}_{23}(1 - 2\hat{j}_{23}^2)(j_{ab}^2 - 1),\\
&\hat{\Gamma}_2 = 2i\hat{\tau}_{31}(1 - 2\hat{j}_{31}^2)(\hat{j}_{ab}^2 - 1), \qquad \hat{\Gamma}_3 = 2i\hat{\tau}_{12}(1 - \hat{j}_{12}^2 + 2\hat{j}_{12}\hat{\tau}_{12})(j_{ab}^2 - 1),\\
&\hat{L}_1 = H/E, \qquad \hat{L}_2 = \frac{2}{3}\hat{S}_{ab}^2 - \frac{3}{2},
\end{aligned} \tag{2.15}$$

где

$$\begin{aligned}
&\hat{\tau}_{ab} = \tau_{ab}\frac{m}{E} + i\frac{\gamma_a p_b - \gamma_b p_a}{m} + \frac{p_c(p_\alpha \cdot \tau_\alpha)}{E(E+m)},\\
&\hat{j}_{ab} = j_{ab}\frac{m}{E} - \frac{H}{Em}(j_{0a}p_b - j_{0b}p_a) + \frac{p_c(p_b j_{0b})}{E(E+m)},\\
&\hat{j}_{0a} = j_{0a} + \frac{p_a(p_b \cdot j_b) - j_a p_b^2}{E(E+m)} - \frac{j_{ab}p_b}{Em}H,\\
&\hat{S}_{ab} = \hat{j}_{ab} + \hat{\tau}_{ab}, \qquad (a,b,c) = \text{цикл}\ (1,2,3).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

В заключение отметим, что сделанные выше утверждения о дополнительной инвариантности справедливы и для уравнений Баргмана–Вигнера, Дирака–Фирца–Паули, Баба, описывающих частицы со спином 1 и 3/2. Дополнительная симметрия релятивистских уравнений для частив со спином $s > 3/2$ также может быть исследована с помощью методов использованных в настоящей работе.

3. Алгебра инвариантности уравнений Дирака и ТСТ в классе дифференциальных операторов

Во введении отмечалось, что уравнение Дирака, помимо инвариантности относительно алгебры Пуанкаре, неявно инвариантно относительно алгебры $O(4)$. Эта алгебра задается интегродифференциальными операторами и является в определенном смысле максимальной алгеброй дополнительной инвариантности уравнения Дирака [3]. В связи с этим результатом естественно выяснить следующий вопрос: существует ли алгебра неявной инвариантности уравнений Дирака и ТСТ в классе дифференциальных операторов?

В дальнейшем мы докажем теоремы, дающие положительный ответ на поставленный вопрос.

Теорема 4. *Уравнение Дирака инвариантно относительно алгебры $O(4)$, базисные элементы которой задаются дифференциальными операторами.*

Доказательство. Уравнение Дирака

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\Psi = 0 \tag{3.1}$$

подвергнем преобразованию

$$\Psi \to \Phi = V\Psi, \qquad (m - \gamma_\mu p^\mu) \to V(m - \gamma_\mu p^\mu)V^{-1} = m - (P_\mu P^\mu)^{1/2}\gamma_5;$$
$$V = \exp\left(\frac{S_{5\mu}p_\mu}{\sqrt{p_\mu p_\mu}}\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{2S_{5\mu}p^\mu}{(p_\mu p^\mu)^{1/2}}\right), \tag{3.2}$$
$$S_{5\mu} = \frac{i}{2}\gamma_5\gamma_\mu, \qquad \gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3.$$

Условие инвариантности принимает вид

$$[m - (p_\mu p_\mu)^{1/2}\gamma_5, Q']\Phi(t, \boldsymbol{x}) = 0. \tag{3.3}$$

Уравнению (3.3) удовлетворяют произвольные матрицы, коммутирующие с γ_5. Любая такая матрица может быть представлена в виде линейной комбинации величин

$$S_{ab} = \frac{i}{2}\gamma_a\gamma_b, \qquad S_{4a} = \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_a. \tag{3.4}$$

Матрицы (3.4), как известно, реализуют прямую сумму двух неприводимых представлений $D(1/2, 0) \oplus D(0, 1/2)$ алгебры $O(4)$. Посредством преобразования, обратного (3.2), получаем базисные элементы алгебры дополнительной инвариантности уравнения (3.1):

$$\hat{S}_{ab} = V^{-1}S_{ab}V = S_{ab} - \frac{i}{m}(1 + \varphi_5)(\gamma_a p_b - \gamma_b p_a),$$
$$\hat{S}_{4a} = S_{4a} - \frac{1}{m}(1 + \gamma_5)(\gamma_0 p_a - \gamma_a p_0). \tag{3.5}$$

Следует отметить, что эта алгебра не эквивалентна алгебре Ли группы трехмерных вращений, задаваемой генераторами $J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}$ группы Пуанкаре. Теорема доказана.

Замечание 4. Операторы $\hat{S}_{ab}$ неэрмитовы относительно обычного скалярного произведения

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x\ \Psi_1^+(x)\Psi_2(x), \tag{3.6}$$

однако они эрмитовы в таком индефинитном скалярном произведении:

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x\ \Psi_1^+\left[\gamma_0 + (1 - \gamma_4)\frac{2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})}{m}\right]\Psi_2. \tag{3.7}$$

В скалярном произведении (3.7) эрмитов также гамильтониан Дирака (3.1).

Теорема 5. *Уравнение ТСТ инвариантно относительно алгебры $SU(3)$, базисные элементы которой задаются дифференциальными операторами.*

Доказательство. Подвергнем уравнение ТСТ (1.21) преобразованию

$$\Psi^{\text{TCT}} \to \Psi'^{\text{TCT}} = W\Psi^{\text{TCT}},$$
$$H^{\text{TCT}} \to WH^{\text{TCT}}W^{-1} = \sigma_2 m + (\sigma_2 + i\sigma_1)\frac{p^2}{2m} = H'^{\text{TCT}}, \tag{3.8}$$
$$W = 1 + \sigma_2\frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})}{m} + (1 + \sigma_3)\frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2}{2m^2}.$$

Оператор H'^{TCT} (3.8) коммутирует со спиновыми матрицами S_a. Отсюда заключаем, что оператор $i\partial/\partial t - H'^{\text{TCT}}$ коммутирует с набором величин

$$
\begin{aligned}
&Q_1'^{\text{TCT}} = -(S_1'S_2' + S_2'S_1'), \qquad Q_2'^{\text{TCT}} = S_3', \\
&Q_3'^{\text{TCT}} = -i(S_3'S_1'S_2' - S_1'S_2'S_3'), \qquad Q_4'^{\text{TCT}} = -(S_3'S_1' + S_1'S_3'), \\
&Q_5'^{\text{TCT}} = -S_2', \qquad Q_6'^{\text{TCT}} = -(S_2'S_3' + S_3'S_2'), \qquad Q_7'^{\text{TCT}} = S_1', \\
&Q_8'^{\text{TCT}} = -\frac{i}{\sqrt{3}}(S_3'S_1'S_2' + S_1'S_2'S_3' - 2S_2'S_3'S_1'),
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

где

$$
\begin{aligned}
S_a' = S_a + i\left\{\sigma_2\frac{\varepsilon_{abc}S_bp_c}{m} + (1+\sigma_3)\frac{[\varepsilon_{abc}S_bp_c, (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})]_+}{2m^2}\right\}\times \\
\times\left\{1 - \sigma_2\frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})}{m} + (1-\sigma_3)\frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2}{2m^2}\right\}.
\end{aligned}
$$

Это означает, что операторы (3.9) удовлетворяют условию инвариантности уравнения ТСТ. Непосредственной проверкой можно убедиться, что операторы (3.9) удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.10) алгебры $SU(3)$. Эти базисные элементы алгебры инвариантности уравнения ТСТ эрмитовы относительно такого индефинитного скалярного произведения:

$$
\begin{aligned}
(\Psi_1, \Psi_2) &= \int d^3x\ \Psi_1^+(t,\boldsymbol{x})W^+\sigma_2 W\Psi_2(t,\boldsymbol{x}) = \\
&= \int d^3x\ \Psi_1^+\left\{\sigma_2 + 2\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{m} + 2\sigma_2\frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2}{m^2} + (1-\sigma_3)\frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^3}{m^3}\right\}.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Теорема доказана.

Изложенные выше результаты могут быть использованы для нахождения интегралов движения частиц, взаимодействующих с внешним полем. Так, например, для частицы со спином $s = 1/2$ в однородном магнитном поле $\boldsymbol{H}$ интегралом движения является оператор $Q = \varepsilon_{abc}\hat{S}_{bc}(\pi)H_c$, где $\hat{S}_{ab}(\pi)$ получаются из (3.5) заменой $p_a \to \pi = p_a - eA_a$.

1. Фок В.А., *Z. Phys.*, 1936, **98**, 145.
2. Lomont J.S., *Nuovo Cim.*, 1957, **6**, 204; Gross L., *J. Math. Phys.*, 1964, **5**, 687.
3. Фущич В.И., *ТМФ*, 1971, **7**, № 1, 3–12; *Lett. Nuovo Cim.*, 1974, **11**, № 11, 508–512; Preprint ITP-70-32E, Kiev, 1970, 17 p.
4. Фущич В.И., *ДАН СССР*, 1976, **230**, № 3, 570–573.
5. Овсянников Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений, Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1962; Ибрагимов Н.Х., *ДАН СССР*, 1969, **185**, 1226.
6. Niederer U., *Helv. Phys. Acta*, 1972, **45**, 802; Andersson R.L. et al., *Phys. Rev. Lett.*, 1972, **28**, 988; Boyer C.P., Kalnins E.G., Miller W. (Jr.), *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, 499.
7. Kemmer N., *Proc. Roy. Soc. A*, 1939, **173**, 91; Heitler W., *Proc. Roy. Irish Acad. A*, 1939, **49**, 1; Krajcik R.A., Nieto M.M., *Phys. Rev. D*, 1974, **10**, 4049.
8. Garrido L.M., Pascual P., *Nuovo Cim.*, 1959, **12**, 181.
9. Bludman S.A., *Phys. Rev.*, 1957, **107**, 1163.

10. Тамм И.Е., *ДАН СССР*, 1940, **29**, 551; Sakata S., Taketany M., *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, 1940, **22**, 757.

11. Фущич В.И., Грищенко А.Л., Никитин А.Г., *ТМФ*, 1971, **8**, № 2, 192–205.

12. Bryden A.D., *Nucl. Phys.*, 1964, **53**, 165.