Редукция неприводимых унитарных представлений обобщенных групп Пуанкаре по их подгрупах

А.Г. НИКИТИН, В.И. ФУЩИЧ, И.И. ЮРИК

The problem of the reduction of the generalized Poincaré groups $P(1,n)$ representations by their subgroups $P(1,n-k)$ is considered. The explicit form of the unitary operator connecting the canonical representation basis with the $P(1,n-k)$)-basis is given explicitly. The case of the inhomogeneous De Sitter Group is considered in detail.

Рассматривается задача о редукции унитарных неприводимых представлений обобщенных групп Пуанкаре $P(1,n)$ по их подгруппам $P(1,n-k)$. Находится явный вид унитарного оператора, связывающего канонический базис представления с $P(1,n-k)$-базисом. Явно задается действие генераторов в $P(1,n-k)$-базисе. Подробно рассмотрен случай неоднородной группы де Ситтера.

Введение

Обобщенная группа Пуанкаре $P(1,n)$ является полупрямым произведением групп $SO_0(1,n)$ и T, где T — аддитивная группа n-мерных вещественных векторов $p_0, p_1, \ldots, p_n$, а $SO_0(1,n)$ — связная компонента единицы в группе всех линейных преобразований T на T, сохраняющих квадратичную форму $p_0^2 - p_1^2 - \cdots - p_n^2$.

В [1, 2] предложено использовать группы $P(1,n)$, $P(1,6)$, $P(1,4)$ для описания физических систем с переменной массой и спином. Примером такой физической системы является система из двух (или трех) свободных релятивистских частиц. Действительно, в этом случае оператор энергии имеет вид

$$E = \sqrt{\boldsymbol{P}^2 + M^2}, \qquad M = (m_1^2 + \boldsymbol{K}^2)^{1/2} + (m_2^2 + \boldsymbol{K}^2)^{1/2}, \tag{0.1}$$

где $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{(1)} + \boldsymbol{P}^{(2)}$ — импульс центра масс частиц, $\boldsymbol{K}$ — относительный импульс[1].

Формула (0.1), как хорошо известно [3, 4], получается при редукции прямого произведения двух унитарных неприводимых представлений группы $P(1,3)$. Поскольку неприводимое представление группы $P(1,n>3)$ является приводимым относительно $P(1,3)$, то естественно рассмотреть задачу о редукции этих представлений по неприводимым представлениям группы Пуанкаре[2].

Помимо указанных приложений, обобщенные группы $P(1,4)$, $P(2,3)$ и т.д. могут иметь прямое отношение к задаче о расширении S-матрицы за массовую оболочку [5] и для описания частиц с внутренней структурой [2, 6]. Во всех этих задачах первоочередным вопросом является редукция неприводимых представлений $P(1,n) \to P(1,3)$.

Теоретическая и математическая физика, 1976, **26**, № 2, С. 206–220.

Препринт ИМ-75-5, Институт математики АН Украины, Киев, 1975, 32 с.

[1]Более подробно об этом см. [2] (и цитированную там литературу).

[2]На самом деле производится редукция представлений алгебры Ли. Алгебры Ли и соответствующие им группы обозначаются одинаковыми символами. В [11] рассмотрена редукция приводимых представлений алгебры $P(1,n)$ по $P(1,3)$.

В данной работе произведена редукция неприводимых унитарных представлений группы $P(1,n) \to P(1,n-k)$ для случая, когда оператор квадрата “массы” $P_\mu P^\mu = P_0^2 - P_k^2 = \varkappa^2 \geq 0$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ и энергии $P_0^2 > 0$.

В разделе 1 приводятся необходимые сведения о представлениях группы $P(1,4)$ — неоднородной группы де Ситтера — и формулируется задача редукции $P(1,4) \to P(1,3)$. В разделе 2 находится унитарный оператор, связывающий канонический базис группы $P(1,4)$ с $P(1,3)$-базисом. Здесь же приведена редукция $P(1,4) \to P(1,3) \to P(1,2)$. Раздел 3 посвящен редукции $P(1,n) \to P(1,n-1) \to \cdots \to P(1,n-k)$.

1. Основные определения и постановка задачи

Группа $P(1,4)$ является наиболее естественным обобщением группы Пуанкаре $P(1,3)$, поэтому мы подробно рассмотрим редукцию $P(1,4) \to P(1,3)$. Часть результатов, приведенных для группы $P(1,4)$, легко переносится на случай группы $P(2,3)$. Группа $P(1,4)$ имеет три основных инварианта [1][3]:

$$\begin{aligned}
&P^2 = P_\mu^2 = P_0^2 - P_a^2 - P_4^2, \qquad V_1^2 = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}^2,\\
&V_2^2 = -\frac{1}{4}J_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}, \qquad \omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta\gamma}P^\alpha J^{\beta\gamma}.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Алгебра Ли группы $P(1,4)$ порождается операторами P_μ, $J_{\mu\nu}$, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned}
&[P_\mu, P_\nu] = 0; \qquad [P_\mu, J_{\alpha\beta}] = i(g_{\mu\alpha}P_\beta - g_{\mu\beta}P_\alpha);\\
&[J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] = i(g_{\mu\beta}J_{\nu\alpha} + g_{\nu\alpha}J_{\mu\beta} - g_{\nu\beta}J_{\mu\alpha} - g_{\mu\alpha}J_{\nu\beta}).
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Генераторы P_μ, $J_{\mu\nu}$ в каноническом базисе $|\boldsymbol{p}, p_4, j_3, \tau_3; j, \tau, \varkappa\rangle$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&P_0 = E = \sqrt{p_a^2 + p_4^2 + \varkappa^2}, \qquad P_k = p_k,\\
&J_{ab} = ip_b\frac{\partial}{\partial p_a} - ip_a\frac{\partial}{\partial p_b} + S_{ab}, \qquad a,b = 1,2,3;\\
&J_{0a} = -ip_0\frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{S_{ab}P_b + S_{4a}P_4}{E+\varkappa}, \qquad J_{4a} = ip_a\frac{\partial}{\partial p_4} - ip_4\frac{\partial}{\partial p_a} + S_{4a},\\
&J_{04} = -ip_0\frac{\partial}{\partial p_4} - \frac{S_{4b}P_b}{E+\varkappa},
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где S_{kl} $(k,l = 1,2,3,4)$ — матрицы неприводимого представления $D(j,\tau)$ алгебры Ли группы $SO(4) \sim SU(2) \otimes SU(2)$. Числа $\varkappa$, j, τ характеризуют неприводимые представления класса I $(P_\mu^2 > 0)$ группы $P(1,4)$. В пространстве H неприводимого представления группы $P(1,4)$ операторы

$$\begin{aligned}
&J_a^2 = \frac{V_1}{4\varkappa^2} + \frac{\varepsilon V_2}{2\varkappa} = j(j+1)I, \qquad T_a^2 = \frac{V_1}{4\varkappa^2} - \frac{\varepsilon V_2}{2\varkappa} = \tau(\tau+1)I,\\
&P_\mu^2 = \varkappa^2 I, \qquad \varepsilon = \frac{P_0}{|P_0|}
\end{aligned} \tag{1.4}$$

[3]Обозначения, приведенные без объяснений, те же, что и в [1].

кратны единичному оператору. Матрицы J_a, T_a выражаются через матрицы S_{kl} следующим образом:

$$J_a = \frac{1}{2}(\varepsilon_{abc}S_{bc} + S_{4a}), \qquad T_a = \frac{1}{2}(\varepsilon_{abc}S_{bc} - S_{4a}). \tag{1.5}$$

Операторы (1.3) определены на пространстве Гординга $D \subset H$ (см. дополнение).

Базисные векторы $|\boldsymbol{p}, p_4, j_3, \tau_3; j, \tau, \varkappa\rangle$[4] нормированы согласно

$$\langle \boldsymbol{p}, p_4, j_3, \tau_3; j, \tau, \varkappa | \boldsymbol{p}', p_4', j_3', \tau_3'; j, \tau, \varkappa\rangle = 2p_0\delta^{(3)}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'])\delta(p_4 - p_4')\delta_{\tau_3\tau_3'}\delta_{j_3j_3'},$$

а скалярное произведение имеет вид

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int \frac{d^4p}{2p_0}\Psi_1^+(p_k, j_3, \tau_3)\Psi_2(p_k, j_3, \tau_3).$$

Базис неприводимого представления группы $P(1,4)$, в котором диагональны операторы квадрата массы $M^2 = P_0^2 - P_a^2$ и спина $W^2 = W_0^2 - W_a^2$, а также операторы P_a и S_3, будем называть пуанкаре-базисом и обозначать его через $|\boldsymbol{p}, m, s, s_3; j, \tau, \varkappa\rangle$.

Базисные векторы нормируем согласно

$$\langle \boldsymbol{p}, m, s, s_3; j, \tau, \varkappa | \boldsymbol{p}', m', s', s_3'; j, \tau, \varkappa\rangle = 2p_0\delta(m - m')\delta^3(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')\delta_{ss'}\delta_{s_3s_3'}, \tag{1.6}$$

а это означает что

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_s \int dm \int \frac{d^3p}{2p_0}\varphi_1^+(s, s_3, m)\varphi_2(s, s_3, m).$$

Собственные значения операторов M^2 и W^2 соответствуют неприводимым представлениям группы $P(1,3)$.

Наша задача состоит в том, чтобы определить спектр возможных значений M^2 и W^2, найти явный вид генераторов $J_{\mu\nu}$ и P_μ в $P(1,3)$-базисе и отыскать унитарный оператор, связывающий базис $|\boldsymbol{p}, p_4, j_3, \tau_3; j, \tau, \varkappa\rangle$ и базис $|\boldsymbol{p}, m, s, s_3; j, \tau, \varkappa\rangle$.

2. Редукция $P(1,4) \to P(1,3)$

1. Неприводимое представление (1.3) характеризуется величиной $\varkappa^2 > 0$ и числами j, τ, задающими неприводимое представление малой группы $SO(4)$. При сужении на подгруппу $P(1,3)$ пространство H разлагается в прямую сумму $P(1,3)$-инвариантных подпространств H_{p_4} (одно для каждого значения p_4). Подпространства H_{p_4} неприводимы относительно $P(1,3)$ тогда и только тогда, когда представления малой группы $P(1,3)$ неприводимы. Пересечение групп $SO(4)$ и $P(1,3)$ есть малая группа в $P(1,3)$, соответствующая орбите $p_0^2 - p_a^2 = p_4^2 + \varkappa^2$, а это группа $SO(3)$. Поэтому отсюда следует, что пространство H разлагается на подпространства, соответствующие унитарным неприводимым представлениям подгруппы $P(1,3)$ со следующими значениями массы m и спина s:

$$\varkappa^2 \le m^2 < \infty, \qquad |j - \tau| \le s \le j + \tau. \tag{2.1}$$

Оператор V_4, связывающий канонический базис с $P(1,3)$-базисом, является некоторой матрицей (зависящей от переменных $\boldsymbol{p}$, p_4), заданной в пространстве

[4] Базис $|\boldsymbol{p}, p_4, j_3, \tau_3; j, \tau, \varkappa\rangle$ мы будем называть каноническим.

неприводимого представления группы $P(1,4)$ размерности $(2j+1)(2\tau+1)$, поэтому естественно для нахождения его явного вида воспользоваться разложением по полной системе ортопроекторов. Будем искать оператор V_4 в виде

$$V_4 = \sum_r \sum_l a_{rl}(\boldsymbol{p}, p_4) A_r B_l, \tag{2.2}$$

где

$$A_r = \prod_{r \neq r'} \frac{\dfrac{\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{p}}{p} - r'}{r - r'}, \qquad B_l = \prod_{l \neq l'} \frac{\dfrac{\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{p}}{p} - l'}{l - l'} \qquad (p = \sqrt{p_a^2}) \tag{2.3}$$

являются операторами проектирования на собственные подпространства эрмитовых операторов $\dfrac{\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{p}}{p}$, $\dfrac{\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{p}}{p}$, удовлетворяющие условиям ортогональности и полноты

$$\begin{aligned} &A_r A_{r'} = \delta_{rr'} A_r, \qquad \sum_{r=-j}^{j} A_r = 1, \qquad \frac{\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{p}}{p} = \sum_{r=-j}^{j} r A_r, \\ &B_l A_{l'} = \delta_{ll'} B_l, \qquad \sum_{l=-\tau}^{\tau} B_l = 1, \qquad \frac{\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{p}}{p} = \sum_{l=-\tau}^{\tau} l B_l. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Обратный оператор V_4^{-1} имеет вид

$$V_4^{-1} = \sum_r \sum_l a_{rl}^{-1}(\boldsymbol{p}, p_4) A_r B_l. \tag{2.5}$$

Поскольку генераторы P_0, P_a, J_{ab}, J_{0a} в $P(1,3)$-базисе имеют канонический вид Вигнера–Широкова, то оператор V_4 должен удовлетворять условиям

$$V_4 P_0 V_4^{-1} = \sqrt{p_a^2 + m^2}, \qquad m^2 = \varkappa^2 + p_4^2, \tag{2.6}$$

$$V_4 P_k V_4^{-1} = p_k, \tag{2.7}$$

$$V_4 J_{ab} V_4^{-1} = i p_b \frac{\partial}{\partial p_a} - i p_a \frac{\partial}{\partial p_b} + S_{ab}, \tag{2.8}$$

$$V_4 J_{0a} V_4^{-1} = -i p_0 \frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{S_{ab} p_b}{p_0 + m} \equiv J'_{0a}, \tag{2.9}$$

где P_0, P_a, J_{ab}, J_{0a}, S_{ab} — из (1.3). Из (2.6)–(2.8) следует, что функции a_{rl} и a_{rl}^{-1} являются скалярами относительно трехмерных вращений, т.е.

$$a_{rl}(\boldsymbol{p}, p_4) = a_{rl}(\boldsymbol{p}^2, p_4), \qquad a_{rl}^{-1}(\boldsymbol{p}, p_4) = a_{rl}^{-1}(\boldsymbol{p}^2, p_4). \tag{2.10}$$

Окончательную структуру функций a_{rl} и a_{rl}^{-1} определяет соотношение (2.9). Запишем его в форме

$$[V_4^{-1}, J_{0a}] V_4 = \frac{((\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{J})_a + (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{T})_a)(\varkappa - m)}{(E+m)(E+\varkappa)} + \frac{(J_a - T_a)p_4}{E+\varkappa}. \tag{2.11}$$

Из уравнения (2.11) найдем условия, которым должны удовлетворять функции a_{rl} и a^{-1}_{rl}. Для вычисления в явном виде коммутатора, входящего в левую часть уравнения (2.11), воспользуемся соотношениями [7]

$$\begin{aligned}
&\left[A_r, i\frac{\partial}{\partial p_a}\right] = -\frac{1}{p^2}[A_r, (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{J})_a] = \frac{(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{J})_a}{2p^2}(2A_r - A_{r-1} - A_{r+1}) + \\
&\quad + \frac{i}{2p}\left(J_a - \frac{p_a}{p}\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{p}}{p}\right)(A_{r+1} - A_{r-1}), \\
&\left[B_l, i\frac{\partial}{\partial p_a}\right] = -\frac{1}{p^2}[B_l, (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{T})_a] = \frac{(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{T})_a}{2p^2}(2B_l - B_{l-1} - B_{l+1}) + \\
&\quad + \frac{1}{2p}\left(T_a - \frac{p_a}{p}\frac{\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{p}}{p}\right)(B_{l+1} - B_{l-1}).
\end{aligned}\tag{2.12}$$

Подставляя (2.2), (2.5) в (2.11) и учитывая (2.12), приходим к уравнению

$$\begin{aligned}
&[V_4^{-1}, J'_{0a}]V_4 = \sum_{l,r,l',r'}\left[a^{-1}_{r'l'}A_{r'l'}, \left\{-iE\frac{\partial}{\partial p_a} - \right.\right. \\
&\left.\left. - \frac{(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{J})_a + (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{T})_a}{E+m}\right\}\right]a_{rl}A_rB_l = \sum_{l,r,l',r'}\left\{i\frac{p_a}{p}\frac{\partial a^{-1}_{r'l'}}{\partial p}A_{r'}B_{l'}a_{rl}A_rB_l - \right. \\
&\left. - a^{-1}_{r'l'}\left[\left\{iE\frac{\partial}{\partial p_a} + \frac{(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{T})_a + (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{J})_a}{E+m}\right\}, A_{r'}B_{l'}\right]\right\}a_{rl}A_rB_l = \\
&= \sum_{l',r',l,r}\left\{\frac{p_a}{p}\frac{\partial a^{-1}_{rl}}{\partial p}Ea_{rl}A_rB_l - ma^{-1}_{r'l'}a_{rl}\left(\left[A_{r'}, i\frac{\partial}{\partial p_a}\right]B_{l'} + \right.\right. \\
&\left.\left. + \left[B_{l'}, i\frac{\partial}{\partial p_a}\right]A_{r'}\right)\right\}A_rB_l = \sum_{r,l}\left\{iE\frac{p_a}{p}\frac{\partial a^{-1}_{rl}}{\partial p}a_{rl} - \right. \\
&- m\left[\frac{(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{J})_a}{p^2}(2a^{-1}_{rl} - a^{-1}_{r+1\,l} - a^{-1}_{r-1\,l}) + \frac{(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{T})_a}{p^2}(2a^{-1}_{rl} - \right. \\
&\left. - a_{r\,l+1} - a_{r\,l-1}\right] + \frac{i}{2p}\left[\left(J_a - \frac{p_a}{p}\frac{\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{p})_a}{p}\right)(a^{-1}_{r-1\,l} - a^{-1}_{r+1\,l}) + \right. \\
&\left.\left. + \left(T_a - \frac{p_a}{p}\frac{\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{p}}{p}\right)(a^{-1}_{r\,l-1} - a^{-1}_{r\,l+1}\right]\right\}A_rB_l = \\
&= \frac{[(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{J})_a + (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{T})_a](\varkappa - m)}{(E+m)(E+\varkappa)} + \frac{(J_a - T_a)p_4}{E+m}.
\end{aligned}\tag{2.13}$$

Приравнивая в (2.13) коэффициенты при линейно-независимых векторах

$$i\frac{p_a}{p}A_rB_l, \quad T_aA_rB_l, \quad J_aA_rB_l, \quad (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{J})_aA_rB_l \quad \text{и} \quad (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{T})_aA_rB_l,$$

получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial a_{rl}^{-1}}{\partial p}a_{rl}+\frac{m}{2p}\left[r\left(a_{r-1\,l}^{-1}-a_{r+1\,l}^{-1}\right)a_{rl}+l\left(a_{r\,l-1}^{-1}-a_{r\,l+1}^{-1}\right)a_{rl}\right]=0,\\
&\frac{im}{2p}\left(a_{r-1\,l}^{-1}-a_{r+1\,l}^{-1}\right)a_{rl}=-\frac{p_4}{E+\varkappa},\\
&\frac{im}{2p}\left(a_{r\,l-1}^{-1}-a_{r\,l+1}^{-1}\right)a_{rl}=\frac{p_4}{E+\varkappa},\\
&\frac{m}{2p^2}\left(2a_{rl}^{-1}-a_{r-1\,l}^{-1}-a_{r+1\,l}^{-1}\right)a_{rl}=\frac{m-\varkappa}{(E+m)(E+\varkappa)},\\
&\frac{m}{2p^2}\left(2a_{rl}^{-1}-a_{r\,l-1}^{-1}-a_{r\,l+1}^{-1}\right)a_{rl}=\frac{m-\varkappa}{(E+m)(E+\varkappa)}.
\end{aligned}\tag{2.14}$$

После несложных преобразований система (2.14) приводится к виду

$$\begin{aligned}
&E\frac{\partial a_{rl}^{-1}}{\partial p}a_{rl}+i\frac{p_4}{E+\varkappa}(r-l)=0,\\
&a_{r\pm1\,l}^{-1}a_{rl}=\frac{\varkappa E+m^2\mp ipp_4}{m(E+\varkappa)}=\exp(\pm i\theta_4),\\
&a_{r\,l\pm1}^{-1}a_{rl}=\frac{\varkappa E+m^2\pm ipp_4}{m(E+\varkappa)}=\exp(\mp i\theta_4),\\
&\theta_4=\operatorname{arctg}\frac{pp_4}{m^2+\varkappa E}=2\operatorname{arctg}\frac{pp_4}{(E+m)(m+\varkappa)}.
\end{aligned}\tag{2.15}$$

Покажем, что общее решение системы (2.15) задается формулой

$$a_{rl}=R_4\exp i(r-l)\theta_4,\tag{2.16}$$

где R_4 — произвольная функция от p_4. Действительно, представляя a_{rl} в форме

$$a_{rl}=B_{rl}\exp[iE(r-l)\theta_4-C_{rl}],\tag{2.17}$$

где B_{rl}, C_{rl} — функции от $\boldsymbol{p}^2$, p_4, получаем из (2.15)

$$B_{rl}=B_{r\pm1\,l}=B_{r\,l\pm1}=B;\qquad C_{rl}=C_{r\pm1\,l}=C_{r\,l\pm1}=C.\tag{2.18}$$

Обозначив Be^{ic} через R_4 и подставляя (2.19) в (2.17), приходим к (2.16). Легко видеть, что подстановка (2.16) в (2.17) обращает последнее уравнение в тождество. Из (1.6) следует, что $R_4=\sqrt{m/p_4}$.

Принимая во внимание соотношение

$$\frac{S_{4a}p_a}{p}=\sum(r-l)A_rB_l\tag{2.19}$$

и подставляя (2.16) в (2.2), получаем

$$V_4=\sqrt{\frac{m}{p_4}}\exp\left(i\frac{S_{4a}p_a}{p}2\operatorname{arctg}\frac{pp_4}{(E+m)(E+\varkappa)}\right).\tag{2.20}$$

Формула (2.20) задает искомый оператор преобразования из канонического базиса к $P(1,3)$-базису.

Теперь найдем явный вид генераторов J_{04}, J_{4a} в $P(1,3)$-базисе. Используя тождество Хаусдорфа–Камбела

$$e^A B e^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{B,A\}^{(n)}}{n!}, \qquad (2.21)$$
$$\{B,A\}^{(n)} = [\{B,A\}^{(n-1)}, A], \qquad \{B,A\}^{(0)} = B,$$

имеем

$$V_4 i\frac{\partial}{\partial p_a}V_4^{-1} = i\frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{p_a S_{4b} p_b p_4}{(E+\varkappa)(E+m)Em} + \frac{p_4 S_{4a}}{m(E+\varkappa)} + \frac{S_{ab}p_b(m-\varkappa)}{m(E+m)(E+\varkappa)},$$
$$V_4 S_{4a} V_4^{-1} = \frac{S_{4a}(m^2+\varkappa E)}{m(E+\varkappa)} + \frac{p_a}{p}\frac{S_{4b}p_b(m-\varkappa)}{mp(E+m)(E+\varkappa)} + \frac{S_{ab}p_b p_4}{m(E+\varkappa)},$$
$$V_4 i\frac{\partial}{\partial p_4}V_4^{-1} = i\frac{\partial}{\partial p_4} - \frac{\varkappa^2}{2p_4 m^2} + \frac{\varkappa S_{4b}p_b}{Em^2} - \frac{S_{4a}p_a}{E(E+\varkappa)},$$
$$V_4 S_{ab}p_b V_4^{-1} = S_{ab}p_b + \frac{pp_4 S_{4b}p_b}{(E+\varkappa)(E+m)Em} + \frac{pp_4 S_{4a}}{m(E+\varkappa)} + \frac{S_{ab}p_b p(m-\varkappa)}{m(E+m)(E+\varkappa)}.$$

Сделав затем замену переменных $p_4 \to \varepsilon_4\sqrt{m^2-\varkappa^2}$, $\varepsilon = \pm 1$, получаем явный вид операторов J_{04}, J_{4a} в $P(1,3)$-базисе.

Итак, мы пришли к окончательному результату.

Теорема. *Пространство H унитарного неприводимого представления группы $P(1,4)$ с $\varkappa^2 > 0$, $P_0 > 0$, разлагается на подпространства, соответствующие унитарным неприводимым представлениям подгруппы $P(1,3)$ со следующими значениями инвариантов M^2 и W^2: $\varkappa^2 \le m^2 < \infty$, $|j-\tau| \le s \le j+\tau$. Оператор перехода от базиса $|\boldsymbol{p}, p_4, j_3, \tau_3; j, \tau, \varkappa\rangle$ к $P(1,3)$-базису задается формулой (2.20), а операторы $J_{\mu\nu}$, P_μ в $P(1,3)$-базисе имеют вид*

$$P_0 = \sqrt{p^2+m^2}, \qquad P_a = p_a, \qquad P_4 = \varepsilon_4\sqrt{m^2+\varkappa^2}, \qquad \varepsilon_4 = \pm 1,$$
$$J_{ab} = ip_b\frac{\partial}{\partial p_a} - ip_a\frac{\partial}{\partial p_b} + S_{ab}, \qquad J_{0a} = -ip_0\frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{S_{ab}p_b}{E+m},$$
$$J_{04} = -iE\left\{\varepsilon_4\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{m^2}}, \frac{\partial}{\partial m}\right\} - \frac{\varkappa}{m}\frac{S_{4a}p_a}{m}, \qquad (2.22)$$
$$J_{4a} = ip_a\left\{\varepsilon_4\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{m^2}}, \frac{\partial}{\partial m}\right\} - i\varepsilon m\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{m^2}}\frac{\partial}{\partial p_a} +$$
$$+ \frac{\varkappa p_a S_{4b}p_b}{m^2(E+m)} + \varepsilon_4\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{m^2}}\frac{S_{ab}p_b}{E+m} + \frac{\varkappa}{m}S_{4a},$$

где

$$\{A,B\} \equiv AB + BA.$$

Замечание. Если в (2.22) положить $\varkappa = 0$ ($p_4 \neq 0$), то операторы $J_{\mu\nu}$, P_μ имеют вид [1]

$$P_0 = \sqrt{p^2 + m^2}, \qquad m^2 = p_4^2, \qquad J_{ab} = ip_b \frac{\partial}{\partial p_a} - ip_a \frac{\partial}{\partial p_b} + S_{ab},$$
$$J_{04} = -iE \left\{ \varepsilon_4 \sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{m^2}}, \frac{\partial}{\partial m} \right\},$$
$$J_{4a} = \frac{i}{2} p_a \left\{ \varepsilon_4 \sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{m^2}}, \frac{\partial}{\partial m} \right\} - i\varepsilon_4 \sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{m^2}} \frac{\partial}{\partial p_a} - \varepsilon_4 \frac{S_{ab} p_b}{E + m}.$$

2. В случае $\varkappa^2 < 0$ генераторы канонического неприводимого представления группы $P(1,4)$ выглядят так:

$$P_0 = \sqrt{p_k^2 - \eta^2}, \qquad P_k = p_k, \qquad P_\mu P^\mu = -\eta^2,$$
$$J_{ab} = ip_b \frac{\partial}{\partial p_a} - ip_a \frac{\partial}{\partial p_b} + S_{ab}, \qquad J_{0a} = -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_a} + S_{0a},$$
$$J_{a4} = ip_4 \frac{\partial}{\partial p_a} - ip_a \frac{\partial}{\partial p_4} - \frac{S_{ab} p_b - S_{a0} P_0}{p_4 + \eta}, \qquad J_{04} = -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_4} - \frac{S_{0a} p_a}{p_4 + \eta},$$

где $S_{\mu\nu}$ — генераторы неприводимого представления группы $SO_0(1,3)$. С помощью изометрического преобразования

$$V = \exp\left(-i \frac{S_{0a} p_a}{p} \operatorname{arcth} \frac{p}{E} \right)$$

и последующей замены переменной $p_4 \to \varepsilon_4 \sqrt{m^2 - \varkappa^2}$ получаем

$$P_0 = \sqrt{p_a^2 + m^2}, \qquad P_a = p_a, \qquad P_4 = \varepsilon_4 \sqrt{m^2 + \eta^2},$$
$$J_{ab} = ip_b \frac{\partial}{\partial p_a} - ip_a \frac{\partial}{\partial p_b} + S_{ab}, \qquad J_{0a} = -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{S_{ab} p_b}{E + m},$$
$$J_{04} = -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_4} + \frac{\eta}{m} \frac{S_{0a} p_a}{m},$$
$$J_{a4} = \frac{i}{2} p_a \left\{ \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{m^2}}, \frac{\partial}{\partial m} \right\} - i\varepsilon_4 \sqrt{m^2 + \eta^2} \frac{\partial}{\partial p_a} +$$
$$+ \frac{\eta p_a S_{ab} p_b}{m^2 (E + m)} + \frac{\eta}{m} S_{0a} + \varepsilon_4 \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{m^2}} \frac{S_{ab} p_b}{E + m}.$$

Если $p_4^2 > \eta^2$, то эти формулы задают представление группы $P(1,4)$ в $P(1,3)$-базисе.

3. В некоторых физических задачах, когда нарушена $P(1,3)$-симметрия, но сохраняется еще симметрия относительно подгруппы $P(1,2)$, удобно использовать $P(1,2)$-базис. В связи с этим интересно продолжить редукцию до подгруппы

$P(1,2)$. Это означает переход к такому базису, в котором генераторы P_0, P_α, $J_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\beta=1,2)$ имеют каноническую форму

$$P_0=E=\sqrt{p_\alpha^2+m_3^2},\qquad P_\alpha=p_\alpha,\qquad m_3^2=m^2+p_3^2,$$
$$J_{12}=ip_2\frac{\partial}{\partial p_1}-ip_1\frac{\partial}{\partial p_2}+S_{12},\qquad J_{0\alpha}=-ip_0\frac{\partial}{\partial p_\alpha}-\frac{S_{\alpha\beta}p_\beta}{E+m_3}.$$

Найдем вид остальных генераторов группы $P(1,4)$. Для этого достаточно определить оператор V_3, удовлетворяющий условиям

$$V_3P_0V_3^{-1}=E,\qquad V_3P_\alpha V_3^{-1}=p_\alpha,\tag{2.23}$$
$$V_3J_{0\alpha}V_3^{-1}=-ip_0\frac{\partial}{\partial p_\alpha}-\frac{S_{\alpha\beta}p_\beta}{E+m},\tag{2.24}$$

где операторы P_0, P_α, $J_{0\alpha}$, $S_{\alpha\beta}$ заданы в $P(1,3)$-базисе.

Представим V_3 в виде

$$V_3=R_3\exp\left(i\frac{S_{3\alpha}p_\alpha}{|p|_3}\theta_3\right),\qquad |p|_3=\sqrt{p_1^2+p_2^2},\tag{2.25}$$

где R_3 и θ_3 — некоторые функции от p_3, p_4 и $|p|_3$, p_3, p_4, соответственно. Чтобы определить эти функции, подставим (2.25) в (2.24). Тогда имеем

$$\left[V_3^{-1},-ip_0\frac{\partial}{\partial p_\alpha}-\frac{S_{\alpha\beta}p_\beta}{E+m_3}\right]V_3=-\frac{S_{\alpha3}p_3}{E+m}+\frac{(m-m_3)S_{\alpha\beta}p_\beta}{(E+m_3)(E+m)}.\tag{2.26}$$

Используя (2.21), получаем

$$\begin{gathered}\left[V_3^{-1},-ip_0\frac{\partial}{\partial p_\alpha}-\frac{S_{\alpha\beta}p_\beta}{E+m_3}\right]V_3\equiv\frac{p_\alpha}{|p|_3}\frac{\partial\theta_3}{\partial|p|_3}E\frac{S_{3\alpha}p_\alpha}{|p|_3}-\\ -m_3\frac{S_{\alpha\beta}p_\beta}{|p|_3}(1-\cos\theta_3)+\frac{m_3}{|p|_3}\left(S_{3\alpha}-\frac{p_\alpha}{|p|_3}\frac{S_{3\beta}p_\beta}{|p|_3}\right)\sin\theta_3,\end{gathered}\tag{2.27}$$

откуда

$$\theta_3=2\,\mathrm{arctg}\,\frac{|p|p_3}{(E+m_3)(m_3+m)}.\tag{2.28}$$

Множитель R_3 выберем в виде $R_3=\sqrt{m_3/p_3}$, тогда скалярное произведение в $P(1,2)$-базисе будет иметь форму

$$(\varphi_1,\varphi_2)=\int\limits_\varkappa^\infty dm\int\limits_m^\infty dm_3\int\frac{d^2p}{2E}\varphi_1^+\varphi_2.$$

Теперь, используя (2.24), (2.27), можно найти действие генераторов J_{03}, J_{04}, J_{34} группы $P(1,4)$ в $P(1,2)$-базисе. Имеем

$$J_{03}=-\frac{i}{2}E\left\{\varepsilon_3\sqrt{1-\left(\frac{m}{m_3}\right)^2},\frac{\partial}{\partial m_3}\right\}-\frac{m}{m_3}\frac{S_{3\alpha}p_\alpha}{m_3},\qquad \varepsilon_3=p_3/|p|_3,$$
$$J_{43}=-\frac{im}{2}\left\{\varepsilon_3\varepsilon_4\sqrt{\left[1-\left(\frac{m}{m_3}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\varkappa}{m}\right)^2\right]},\frac{\partial}{\partial m}\right\}+\frac{\varkappa m_3}{m^2}S_{43},$$

$$J_{04}=-\frac{i}{2}E\left[\left\{\varepsilon_3\sqrt{1-\left(\frac{m}{m_3}\right)^2},\frac{\partial}{\partial m_3}\right\}+\left\{\varepsilon_4\sqrt{1-\left(\frac{\varkappa}{m}\right)^2},\frac{\partial}{\partial m}\right\}\right]-\frac{\varkappa S_{4\alpha}p_\alpha}{mm_3}+$$

$$+\varepsilon_3\varepsilon_4\sqrt{\left[1-\left(\frac{m}{m_3}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\varkappa}{m}\right)^2\right]}\frac{S_{3\alpha}p_\alpha}{m_3}-\varkappa\varepsilon_3\sqrt{1-\left(\frac{m}{m_3}\right)^2}E\frac{S_{43}}{m^2}.$$

3. Редукция $P(1,n)\to P(1,n-1)\to\cdots\to P(1,n-k)$

1. Покажем сначала, как представление алгебры $P(1,n)$ может быть задано в $P(1,n-1)$-базисе. Каноническое неприводимое представление генераторов группы $P(1,n)$ задается формулами

$$\begin{aligned}
&P_0=E=\sqrt{p_k^2+\varkappa^2},\qquad P_k=p_k,\quad k=1,2,\ldots,n,\\
&J_{ab}=ip_b\frac{\partial}{\partial p_a}-ip_a\frac{\partial}{\partial p_b}+S_{ab},\qquad a,b<n,\\
&J_{0a}=-ip_0\frac{\partial}{\partial p_a}-\frac{S_{ab}p_b}{P_0+\varkappa}-\frac{S_{an}p_n}{P_0+\varkappa},
\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$J_{0n}=-ip_0\frac{\partial}{\partial p_n}-\frac{S_{na}p_a}{P_0+\varkappa},\qquad J_{an}=ip_n\frac{\partial}{\partial p_a}-ip_a\frac{\partial}{\partial p_n}+S_{an},\tag{3.2}$$

здесь S_{kl} — матрицы неприводимого представления $D(m_1,m_2,\ldots,m_{[n/2]})$ алгебры $SO(n)$, m_i — числа Гельфанда–Цетлина. Операторы (3.1) эрмитовы относительно скалярного произведения

$$(\Psi_1,\Psi_2)=\int\frac{d^np}{2p_0}\Psi_1^+\Psi_2.\tag{3.3}$$

В $P(1,n-1)$-базисе генераторы (3.1) по определению имеют вид прямой суммы генераторов канонических представлений группы $P(1,n-1)$. Если представление алгебры $SO(n)$ задано в базисе $SO(n)\supset SO(n-1)\supset\cdots$, то эти генераторы имеют форму

$$\begin{aligned}
&P_0=E=\sqrt{P_a^2+m_n^2},\qquad m_n^2=\varkappa^2+p_n^2,\qquad P_a=p_a,\\
&J_{ab}=ip_b\frac{\partial}{\partial p_a}-ip_a\frac{\partial}{\partial p_b}+S_{ab},\qquad J_{0a}=-ip_0\frac{\partial}{\partial p_a}-\frac{S_{ab}p_b}{E+m_n}.
\end{aligned}\tag{3.4}$$

Задача нахождения явного вида генераторов P_μ, $J_{\mu\nu}$ в $P(1,n-1)$-базисе сводится к отысканию изометрического оператора, преобразующего генераторы (3.1) к виду (3.4).

По аналогии с разделом 2 оператор преобразования будем искать в виде

$$V_n=R_n\exp\left(i\frac{S_{na}p_a}{|p|_n}\theta_n\right),\qquad |p|_n=\left(\sum_{a<n}p_a^2\right)^{1/2},\tag{3.5}$$

где R_n и θ_n — некоторые функции от p_n и p_n, $|p|_n$, соответственно, которые предстоит найти.

Оператор V_n преобразует (3.1) к (3.4), если выполняются соотношения

$$[V_n^{-1}, J_{0a}]V_n = \frac{S_{ab}p_b(\varkappa - m_n)}{(E+m_n)(E+\varkappa)} + \frac{S_{na}p_n}{E+\varkappa}. \tag{3.6}$$

Подставляя (3.4), (3.5) в (3.6) и используя тождества

$$\begin{gathered}
V_n^{-1} i\frac{\partial}{\partial p_a}V_n = i\frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{p_a}{|p|_n}\frac{\partial\theta_n}{\partial p}\frac{S_{nb}p_b}{|p|_n} + \\
+ \frac{S_{ab}p_b}{|p|_n^2}(1-\cos\theta_n) - \frac{1}{|p|_n}\left(S_{na} - \frac{p_a}{|p|_n}\frac{S_{nb}p_b}{|p|_n}\right)\sin\theta_n, \\
V_n S_{ab}p_b V_n^{-1} = p^2(V_n x_a V_n^{-1} - x_a),
\end{gathered}$$

приходим к уравнению

$$\begin{gathered}
\frac{p_a}{|p|_n}E\frac{\partial\theta_n}{\partial|p|_n}\frac{S_{nb}p_b}{|p|_n} - m\left[\frac{S_{ab}p_b}{|p|_n^2}(1-\cos\theta_n) - \right. \\
\left. -\frac{1}{|p|_n}\left(S_{na} - \frac{p_a S_{nb}p_b}{|p|_n^2}\right)\right] = \frac{S_{ab}p_b(\varkappa-m_n)}{(E+m_n)(E+\varkappa)} + \frac{S_{na}p_n}{E+\varkappa}.
\end{gathered}$$

Приравнивая коэффициент при линейно-независимых векторах $\dfrac{p_a}{|p|_n}\dfrac{S_{nb}p_b}{|p|_n}$, $\dfrac{S_{ab}p_b}{|p|_n}$ и S_{na}, получаем систему уравнений для искомых функций θ_n

$$\begin{gathered}
E\frac{\partial\theta_n}{\partial|p|_n} - \frac{m_n}{|p|_n}\sin\theta_n = 0, \qquad m_n\sin\theta_n = \frac{|p|_n p_n}{E+\varkappa}, \\
m_n(\cos\theta_n - 1) = \frac{p^2(\varkappa - m_n)}{(E+m_n)(E+\varkappa)}.
\end{gathered} \tag{3.7}$$

Решение системы (3.7) задается формулой

$$\theta_n^2 = \operatorname{arctg}\frac{|p|_n p_n}{(E+m_n)(m_n+\varkappa)}. \tag{3.8}$$

Из условия нормировки базисных векторов получаем, что множитель $R_n = \sqrt{m_n/p_n}$.

Теперь, используя явный вид оператора V_n, нетрудно найти выражения для генераторов J_{0n}, J_{an} в $P(1,n-1)$ базисе. Принимая во внимание тождества

$$\begin{gathered}
V_n i\frac{\partial}{\partial p_a}V_n^{-1} = i\frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{p_a p_n S_{ab}p_b}{Em_n(E+m_n)(E+\varkappa)} + \\
+ \frac{p_n S_{na}}{m_n(E+\varkappa)} + \frac{S_{ab}p_b(m_n-\varkappa)}{m_n(E+m_n)(E+\varkappa)}, \\
V_n S_{na} V_n^{-1} = S_{na}\frac{m_n^2 + \varkappa E}{m_n(E+\varkappa)} + \frac{p_n S_{nb}p_b(m_n-\varkappa)}{m_n(E+m_n)(E+\varkappa)} + \frac{p_n S_{ab}p_b}{m_n(E+\varkappa)}, \\
V_n i\frac{\partial}{\partial p_n}V_n^{-1} = i\frac{\partial}{\partial p_n} + S_{na}p_a\left(\frac{\varkappa}{Em_n^2} - \frac{1}{E(E+\varkappa)} - \frac{i\varkappa^2}{2p_n m_n^2}\right)
\end{gathered}$$

и сделав замену переменных $p_n \to \varepsilon_n \sqrt{m_n^2 - \varkappa^2}$, получаем

$$J_{na} = \frac{ip_a}{2}\left\{\varepsilon_n \sqrt{1 - \left(\frac{\varkappa}{m_n}\right)^2}, \frac{\partial}{\partial m_n}\right\} - i\varepsilon_n \sqrt{1 - \left(\frac{\varkappa}{m_n}\right)^2}\frac{\partial}{\partial p_a} +$$

$$+ \frac{P_a \varkappa S_{nb} p_b}{m_n^2 (E + m_n)} + \varepsilon_n \sqrt{1 - \left(\frac{\varkappa}{m_n}\right)^2}\frac{S_{ab} p_b}{(E + m_n)} + \frac{\varkappa}{m_n} S_{na}, \quad \varepsilon_n = p_n/|p_n|, \tag{3.9}$$

$$J_{0n} = -\frac{i}{2} E \left\{\varepsilon_n \sqrt{1 - \left(\frac{\varkappa}{m_n}\right)^2}, \frac{\partial}{\partial m_n}\right\} - \frac{\varkappa}{m_n}\frac{S_{na} p_a}{m_n}.$$

Итак, мы нашли, что явный вид генераторов группы $P(1, n)$ в $P(1, n-1)$-базисе задается формулами (3.4), (3.9). Генераторы (3.4), (3.9) эрмитовы относительно скалярного произведения

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int\limits_{\varkappa}^{\infty} dm_n \sum_{\eta} \frac{d^{n-1}p}{2E} \varphi_1^{+}(\eta, m) \varphi_2(\eta, m),$$

где η — набор чисел, характеризующих неприводимые представления группы $SO(n-1)$, содержащиеся в представлении $D(m_1, m_2, \ldots, m_{[\frac{n}{2}]})$.

2. Получим теперь представление алгебры $P(1, n)$ в $P(1, n-2)$-базисе. Используя приведенные выше результаты, заключаем, что оператор

$$V_{n-1} = \sqrt{\frac{m_{n-1}}{p_{n-1}}} \exp\left(2i \frac{S_{n-1\,a} p_a}{|p|_{n-1}} \operatorname{arctg} \frac{p_{n-1} |p|_{n-1}}{(E + m_{n-1})(m_n + m_{n-1})}\right), \tag{3.10}$$

где

$$m_{n-1} = \left(\varkappa^2 + p_n^2 + p_{n-1}^2\right)^{1/2}, \qquad |p|_{n-1} = \left(\sum_{a<n-1} p_a^2\right)^{1/2},$$

преобразует генераторы (3.4) к виду

$$\begin{gathered}
P_0 = E = \sqrt{p_a^2 + m_{n-1}^2}, \qquad P_a = p_a, \qquad a \le n-1, \\
P_n = \varepsilon_n \sqrt{m_n^2 - \varkappa^2}, \qquad P_{n-1} = \varepsilon_{n-1} \sqrt{m_{n-1}^2 - m_n^2}, \\
J_{ab} = ip_b \frac{\partial}{\partial p_a} - ip_a \frac{\partial}{\partial p_b} + S_{ab}, \qquad J_{0a} = -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{S_{ab} p_b}{E + m_{n-1}}, \\
J_{0\,n-1} = -\frac{i}{2} E \left\{\sqrt{1 - \left(\frac{m_n}{m_{n-1}}\right)^2}, \frac{\partial}{\partial m_{n-1}}\right\} - \frac{m_n}{m_{n-1}} \frac{S_{n-1\,a} p_a}{m_{n-1}}.
\end{gathered} \tag{3.11}$$

Для того чтобы задать вид остальных генераторов в $P(1, n-2)$-базисе, достаточно найти генератор $J_{n\,n-1}$ (остальные определяются из коммутационных соотношений (1.2)). Используя тождества

$$V_{n-1}^{-1} i \frac{\partial}{\partial p_n} V_{n-1} = i \frac{\partial}{\partial p_n} - \frac{p_n p_{n-1} S_{n-1\,a} p_a}{m_n m_{n-1}^2 E} - \frac{i}{2} \frac{p_n}{m_{n-1}^2},$$

$$V_{n-1}^{-1} i\frac{\partial}{\partial p_{n-1}} V_{n-1} = i\frac{\partial}{\partial p_{n-1}} + S_{n-1\,a}p_a\left(\frac{m_n}{Em_{n-1}^2} - \frac{1}{E(E+m_n)}\right) + \frac{im_n^2}{p_{n-1}m_{n-1}^2},$$

$$V_{n-1}^{-1} S_{n\,n-1} V_{n-1} = S_{n\,n-1}\frac{m_{n-1}^2 + Em}{m_{n-1}(E+m_n)} + \frac{S_{na}p_a p_{n-1}}{m_{n-1}(E+m_n)}$$

получаем

$$J_{n\,n-1} = \frac{i}{2}\left\{\sqrt{\left(1-\frac{\varkappa}{m_n}\right)\left(1-\frac{m_n}{m_{n-1}}\right)} m_{n-1}, \frac{\partial}{\partial m_n}\right\} + \frac{\varkappa m_{n-1}}{m_n^2} S_{n\,n-1}. \qquad (3.12)$$

Генераторы (3.11), (3.12) эрмитовы относительно скалярного произведения

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int\limits_{\varkappa}^{\infty} dm_n \int\limits_{m_n}^{\infty} dm_{n-1} \sum_{\alpha} \int \frac{d^{n-2}p}{p_0} \varphi_1^{+}(m_{n-1}, \alpha)\varphi_2(m_{n-1}, \alpha),$$

где через α обозначены числа, нумерующие неприводимые представления алгебры $SO(n-2)$, содержащиеся в представлении $D(m_1, m_2, \ldots, m_{[\frac{n}{2}]})$ группы $SO(n)$.

3. Аналогично определяется представление алгебры $P(1,n)$ в $P(1,n-3)$-базисе. Подвергая генераторы (3.11) и (3.12) преобразованию

$$V_{n-2} = \sqrt{\frac{m_{n-2}}{p_{n-2}}} \exp\left(2i\frac{S_{n-2\,a}p_a}{|p|_{n-2}} \operatorname{arctg} \frac{p_{n-2}|p|_{n-2}}{(E+m_{n-2})(m_{n-2}+m_{n-1})}\right),$$

$$|p|_{n-2} = \left(\sum_{a<n-2} p_a^2\right)^{1/2}, \qquad m_{n-2} = \left(\varkappa^2 + p_n^2 + p_{n-1}^2 + p_{n-2}^2\right)^{1/2}$$

и учитывая коммутативность (3.12) и (3.2), имеем

$$\begin{gathered}
P_0 = E, \qquad P_a = p_a, \qquad P_n = \varepsilon_n\sqrt{m_n^2 - \varkappa^2}, \\
P_{n-1} = \varepsilon_{n-1}\sqrt{m_{n-1}^2 - m_n^2}, \qquad P_{n-2} = \varepsilon_{n-2}\sqrt{m_{n-2}^2 - m_{n-1}^2}, \\
J_{ab} = i\frac{\partial}{\partial p_a}p_b - i\frac{\partial}{\partial p_b}p_a + S_{ab}, \qquad a, b < n-2, \\
J_{0\,n-2} = -\frac{i}{2}E\left\{\frac{P_{n-2}}{m_{n-2}}, \frac{\partial}{\partial m_{n-2}}\right\} - \frac{m_{n-1}}{m_{n-2}}\frac{S_{n-2\,a}p_a}{m_{n-2}}, \\
J_{n-1\,n-2} = \frac{i}{2}\left\{\frac{P_{n-1}P_{n-2}}{m_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial m_n}\right\} + \frac{m_n m_{n-2}}{m_{n-1}^2}S_{n\,n-2}, \\
J_{n\,n-1} = \frac{i}{2}\left\{\frac{P_n P_{n-1}}{m_n}, \frac{\partial}{\partial m_{n-1}}\right\} + \frac{\varkappa m_{n-1}}{m_n^2}S_{n\,n-1}.
\end{gathered} \qquad (3.13)$$

4. Подвергая генераторы (3.13) последовательно преобразованиям

$$V_{n-l} = \sqrt{\frac{m_{n-l}}{p_{n-l}}} \exp\left(2i\frac{S_{n-l\,a}p_a}{|p|_{n-l}} \operatorname{arctg} \frac{|p|_{n-l}p_{n-l}}{(E+m_{n-l})(m_{n-l}+m_{n-l+1})}\right),$$

где

$$|p|_{n-l} = \left(\sum_{a<n-l} p_a^2\right)^{1/2}, \qquad m_{n-l} = \left(\varkappa^2 + \sum_{\alpha=1}^{l} p_{n-\alpha}^2\right)^{1/2}, \qquad l = 3, 4, \ldots,$$

и используя результаты п. 1–3, получаем

$$
\begin{aligned}
&P_0 = E, \qquad P_a = p_a, \qquad P_{n-\alpha} = \varepsilon_{n-\alpha}\sqrt{m_{n-\alpha}^2 - m_{n-\alpha+1}^2}, \qquad \alpha < k,\\
&J_{0a} = -ip_0\frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{S_{ab}p_b}{E + m_{n-k+1}}, \qquad a, b \le n-k,\\
&J_{ab} = i\frac{\partial}{\partial p_a}p_b - i\frac{\partial}{\partial p_b}p_a + S_{ab},\\
&J_{0\,n-\alpha} = -\frac{i}{2}E\left\{\frac{P_{n-\alpha}}{m_{n-\alpha}}, \frac{\partial}{\partial m_{n-\alpha}}\right\} - \frac{m_{n-\alpha+1}}{m_{n-\alpha}}\frac{S_{n-\alpha\,a}p_a}{m_{n-\alpha}},\\
&J_{n-\alpha\,n-\alpha+1} = \frac{i}{2}\left\{\frac{P_{n-\alpha}P_{n-\alpha+1}}{m_{n-\alpha}}, \frac{\partial}{\partial m_n}\right\} + \frac{\varkappa m_{n-\alpha+1}}{m_{n-\alpha}^2}S_{n-\alpha\,n-\alpha+1}.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Генераторы (3.14) эрмитовы относительно скалярного произведения

$$
(\varphi_1, \varphi_2) = \int dm_{n-k}\int dm_{n-k+1}\cdots\int dm_n\sum_\lambda\frac{d^{n-l}p}{p_0}\varphi_1^+\varphi_2,
$$

где λ — набор чисел, характеризующих представления группы $SO(n-k)$. входящих в представление группы $D(m_1, m_2, \ldots, m_{[\frac{n}{2}]})$ группы $SO(n)$.

Таким образом, генераторы группы $P(1,n)$ в $P(1,n-k)$-базисе имеют вид (3.14). Оператор преобразования из (3.1) к (3.14) задается формулой

$$
V = \prod_{l=1}^{k}V_{n-l}.
$$

Дополнение

В D можно так ввести топологию со счетной системой норм

$$
(\varphi_1, \varphi_2)_n = (\varphi_1, (\Delta+1)^n\varphi_2), \qquad \Delta = \sum_\mu p_\mu^2 + \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu}J_{\mu\nu}^2,
$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в пространстве H, относительно которого $J_{\mu\nu}$, P_μ эрмитовы, что, пополнив D по ней, получим пространство Ψ, обладающее следующими замечательными свойствами:

1) Ψ плотно в H;

2) обертывающая алгебра $E(P(1,4))$ является алгеброй непрерывных (относительно топологии Ψ) операторов на Ψ;

3) Ψ ядерно.

Приведем доказательство ядерности Ψ. Используя результаты работы [8] и тот факт, что группу $P(1,4)$ можно получить сжатием группы $SO_0(1,5)$ в смысле Иноню–Вигнера [9], достаточно показать, что существует такой оператор X, принадлежащий $E(SO_0(1,5))$, для которого $X^* = X^{**}$ и X^{-1} ядерный.

Рассмотрим оператор $A = (C+1)^n$, где C — оператор Казимира группы $SO_0(1,5)$ второго порядка. Из теоремы Нельсона [10] следует, что C и C^n существенно самосопряженные, поэтому $A^* = A^{**}$.

Покажем далее, что A^{-1} — оператор Гильберта–Шмидта. Очевидно,

$$A^{-1} = \sum_i \frac{1}{(c_i - 1)^n} P_i,$$

где P_i — проекторы на подпространства H_i (H_i — собственное пространство оператора Казимира C с собственным значением c_i). Кроме того, легко проверить, что при достаточно больших n выполняется неравенство

$$\sum \left(\frac{1}{(c_i + 1)^n} \dim H_i \right)^2 < \infty.$$

Таким образом, A^{-1} — оператор Гильберта–Шмидта. Поскольку квадрат оператора Гильберта–Шмидта всегда существенно самосопряжен, то за X мы можем взять оператор $(A^{-1})^2$. Итак, Ψ ядерно. Из свойств 1–3 следует, что в нашем случае ядерная спектральная теорема применима и векторы $|\boldsymbol{p}, p_4, j_3\tau_3; j, \tau, \varkappa\rangle$ канонического базиса принадлежат пространству Ψ^* ($\Psi \subset H \subset \Psi^*$).

1. Фущич В.И., *ТМФ*, 1970, **4**, № 3, 360–382;
Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1968, **7**, 79–82; 1969, **14**, № 2, 573–585.
2. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cim.*, 1974, **10**, № 4, 163–167.
3. Широков Ю.М., *ДАН СССР*, 1954, **99**, 737.
4. Macfarlane A.J., *J. Math. Phys.*, 1963, **4**, 490;
Fong R., Sucher J., *J. Math. Phys.*, 1964, **5**, 456.
5. Donkov A.D., Kadyshevsky V.G., Mateev M.D., Mir-Kasimov R.M., Preprint JINR E2-7936, Dubna, 1974.
6. Aghassi J.J., Roman P., Santilli R.M., *J. Math. Phys.*, 1970, **11**, 2297;
Castell L., *Nuovo Cim.*, 1967, **49**, 285.
7. Фущич В.И., Грищенко А.Л., Никитин А.Г., *ТМФ*, 1971, **8**, № 2, 192–205.
8. Roberts J.E., *Commun. Math. Phys.*, 1966, **3**, 98.
9. Inönü K., Wigner E.P., *Proc. N.A.S.*, 1953, **39**, 50.
10. Nelson E., Stinespring W.F., *Amer. J. Math.*, 1959, **81**, 547.
11. Фущич В.И., Никитин А.Г., Юрик И.И., Препринт Института математики АН Украины, № 5, Киев, 1975, 32 с.