О группах инвариантности некоторых уравнений релятивистской квантовой механики

В.И. ФУЩИЧ, Ю.Н. СЕГЕДА

В данной заметке находим группы инвариантности уравнений

$$i\frac{\partial\varphi(\tau,x)}{\partial\tau}=\frac{1}{l}\Box\varphi(\tau,x), \tag{1}$$

$$i\frac{\partial\Psi(\tau,x)}{\partial\tau}=\gamma_\mu p^\mu\Psi(\tau,x), \qquad p_\mu=i\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \mu=0,1,2,3, \tag{2}$$

где $\Box=\dfrac{\partial^2}{\partial x_0^2}-\nabla^2$ — оператор Даламбера, x — точка в пространстве Минковского, l — постоянная величина.

Четырехрядные матрицы γ_μ удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2g_{\mu\nu}, \qquad g_{00}=-g_{kk}=1, \quad k=1,2,3; \qquad g_{\mu\nu}=0, \quad \mu\neq\nu. \tag{3}$$

В уравнении (2) по повторяющимся индексам μ, подразумевается суммирование от 0 до 3. $\phi(\tau,x)$ — скалярная функция, $\Psi(\tau,x)$ — четырехрядная матрица-столбец

$$\Psi(\tau,x)=\begin{pmatrix}\psi_1(\tau,x)\\ \psi_2(\tau,x)\\ \psi_3(\tau,x)\\ \psi_4(\tau,x)\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Переменная τ — собственное время частицы.

Обозначим через Q_A базисные векторы алгебры Ли некоторой группы G. Для того чтобы уравнения (1) и (2) были инвариантными относительно группы G, должны выполняться, по определению, следующие коммутационные соотношения:

$$\left[i\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{1}{l}\Box, Q_A\right]\varphi(\tau,x)=0, \tag{5}$$

$$\left[i\frac{\partial}{\partial\tau}-\gamma_\mu p^\mu, Q_A\right]\Psi(\tau,x)=0. \tag{6}$$

Мы иногда будем употреблять термин “алгебра инвариантности” вместо “группа инвариантности”.

1. Найдем максимальную группу инвариантности уравнения (1) в классе дифференциальных операторов первого порядка

$$Q_A=\sum_{j=0}^{4}f_A^j(\tau,x)D_j+f_A(\tau,x), \tag{7}$$

УМЖ, 1976, **28**, № 6, С. 844–849.

где

$$D_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad D_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad D_4 = i\frac{\partial}{\partial \tau}, \qquad k = 1, 2, 3, \tag{8}$$

$\{A\}$ — некоторое множество индексов.

Наша задача состоит в том, чтобы найти функции $f_A^j(\tau, x)$, $f_A(\tau, x)$, при которых условия (5) выполняются. Условия (5) можно записать в виде

$$\left[i\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{l}\Box, Q_A\right] = i\lambda(\tau, x)\left(i\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{l}\Box\right), \tag{9}$$

где $\lambda(\tau, x)$ — некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция, подлежащая определению. Подставляя (7) в (8), получаем довольно громоздкую систему дифференциальных уравнений для функций $\lambda(\tau, x)$, $f_A(\tau, x)$, $f_A^j(\tau, x)$. Решая эту систему уравнений, получим набор 17 операторов $\{Q_A\}$, удовлетворяющих условию (9). Эти операторы имеют следующий явный вид:

$$\begin{gathered} A = -i\left(\tau^2\frac{\partial}{\partial \tau} + \tau t\frac{\partial}{\partial t} + \tau x_k\frac{\partial}{\partial x_k} + 2\tau\right) + \frac{l}{4}s^2, \\ D = i\left(2\tau\frac{\partial}{\partial \tau} + t\frac{\partial}{\partial t} + x_k\frac{\partial}{\partial x_k} + 2\right), \qquad R = i\frac{\partial}{\partial \tau}, \qquad P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \\ P_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad G_\mu = \tau p_\mu - \frac{l}{2}x_\mu, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \\ x_0 \equiv t, \qquad s^2 = t^2 - x_k^2 = x_\mu x^\mu, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{10}$$

Операторы (10) образуют алгебру Ли и удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$\begin{gathered} [A, D] = -2iA, \qquad [D, R] = -2iR, \qquad [R, G_\mu] = iP_\mu, \qquad [A, R] = iD, \\ [D, P_\mu] = -iP_\mu, \qquad [R, J_{\mu\nu}] = 0, \qquad [A, P_\mu] = iG_\mu, \qquad [D, G_\mu] = iG_\mu, \\ [P_\mu, G_\nu] = -i\frac{l}{2}g_{\mu\nu}, \qquad [A, G_\mu] = 0, \qquad [D, J_{\mu\nu}] = 0, \qquad [A, J_{\mu\nu}] = 0, \\ [R, P_\mu] = 0, \qquad [G_\mu, G_\nu] = 0, \qquad [J_{\mu\nu}, P_\lambda] = i(g_{\nu\lambda}P_\mu - g_{\mu\lambda}P_\nu), \\ [J_{\mu\nu}, G_\lambda] = i(g_{\nu\lambda}G_\mu - g_{\mu\lambda}G_\nu), \\ [J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] = i(g_{\mu\beta}J_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha}J_{\nu\beta} + g_{\nu\alpha}J_{\mu\beta} - g_{\nu\beta}J_{\mu\alpha}). \end{gathered} \tag{11}$$

Эта алгебра Ли порождает соответствующую 17-параметрическую группу Ли, которую по аналогии с группой инвариантности нерелятивистского уравнения Шредингера [1–3] назовем релятивистской группой Шредингера.

Таким образом, окончательно имеем следующий результат.

Теорема 1. *Уравнение (1) инвариантно относительно релятивистской группы Шредингера, алгебра Ли которой задается коммутационными соотношениями (11).*

Замечание 1. Можно непосредственной проверкой убедиться, что если к операторам $J_{\mu\nu}$ присоединить оператор

$$J_{\mu 4} = \tau\widetilde{p}_\mu - \frac{1}{2}(x_\mu p + p x_\mu), \qquad \widetilde{p}_\mu = p_\mu\frac{2p}{l}, \qquad p = (p_\alpha p^\alpha)^{1/2},$$

то совокупность операторов $\{J_{\mu\nu}, J_{\mu 4}\}$ удовлетворяет коммутационным соотношениям алгебры Ли группы $SO(1,4)$:

$$[J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] = i(g_{\mu\beta}J_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha}J_{\nu\beta} + g_{\nu\alpha}J_{\mu\beta} - g_{\nu\beta}J_{\mu\alpha}),$$
$$[J_{\mu\nu}, J_{\lambda 4}] = i(g_{\nu\lambda}J_{\mu 4} - g_{\mu\nu}J_{\nu 4}), \qquad [J_{\mu 4}, J_{\nu 4}] = iJ_{\mu\nu}.$$

Замечание 2. В работе [4] была предложена релятивистская группа Галилея $\widetilde{G}_5$, являющаяся естественным обобщением группы Галилея G_4. Группа $\widetilde{G}_5$ является подгруппой релятивистской группы Шредингера.

2. В этом пункте найдем группы симметрии уравнения (2) — уравнения типа Дирака с собственным временем.

Теорема 2. *Уравнение (2) инвариантно относительно группы вращений и сдвигов в пятимерном пространстве Минковского.*

Доказательство. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что совокупность операторов

$$\begin{gathered}
P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad P_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad P_4 = -i\frac{\partial}{\partial \tau}, \\
J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \qquad S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \\
J^{\mathrm{I}}_{4\mu} = \tau p_\mu + \frac{1}{2}(x_\mu \hat{M} + \hat{M} x_\mu), \qquad \hat{M} = \gamma_\mu p^\mu,
\end{gathered} \tag{12}$$

удовлетворяет условиям (6), а их коммутационные соотношения имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}
[J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] = i(g_{\mu\beta}J_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha}J_{\nu\beta} + g_{\nu\alpha}J_{\mu\beta} - g_{\nu\beta}J_{\mu\alpha}), \\
[J_{\mu\nu}, P_\lambda] = i(g_{\nu\lambda}P_\mu - g_{\mu\lambda}P_\nu),
\end{gathered} \tag{13}$$

где $\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta = 0,1,2,3,4$; $g_{00} = -g_{11} = \cdots = -g_{44} = 1$. Из (13) видно, что совокупность операторов $J_{\mu\nu}$, P_λ, $\mu, \nu, \lambda = 0, 1, \ldots, 4$, является базисными элементами алгебры Ли группы вращений и сдвигов в 5-мерном пространстве Минковского — группы $P(1,4)$. Более подробно об этой группе и ее применениях в физике см. [5].

На множестве решений уравнения (2) операторы (12) можно представить в виде

$$\begin{gathered}
P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad P_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad P_4 = -i\frac{\partial}{\partial \tau}, \\
J^{\mathrm{II}}_{\mu\nu} = J_{\mu\nu}, \qquad J^{\mathrm{II}}_{4\mu} = \tau p_\mu - x_\mu p_4 + \frac{i}{2}\gamma_\mu, \qquad \mu, \nu = 0,1,2,3.
\end{gathered} \tag{12$'$}$$

3. До сих пор мы находили алгебры Ли групп инвариантности дифференциальных уравнений (1) и (2) в классе дифференциальных операторов первого порядка. В [6] показано, что, например, уравнения Максвелла и Дирака допускают алгебру инвариантности, базисные элементы которой являются существенно интегро-дифференциальными операторами. Это означает, что если расширить класс искомых дифференциальных операторов Q_A до интегро-дифференциальных операторов, сможем обнаружить совершенно новые симметрии уравнений движения. В этом пункте найдем несколько алгебр инвариантности для уравнения (2) в классе интегро-дифференциальных операторов.

Теорема 3. *Если на множестве решений уравнений (1) и (2)* $p_\mu^2 > 0$*, то эти уравнения инвариантны относительно групп* $SO(1,4)$ *и* $SO(1,5)$ *соответственно.*

Доказательство проведем только для уравнения (2). Воспользуемся приемом, предложенным в [7]. Рассмотрим оператор

$$R_\mu = \frac{1}{2}(P^\alpha J_{\mu\alpha} + J_{\mu\alpha}P^\alpha) \qquad (\mu,\alpha = 0,1,2,3,4). \tag{14}$$

Оператор R_μ удовлетворяет следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} &[R_\mu, R_\nu] = iJ_{\mu\nu}(P_\alpha P^\alpha), \qquad [J_{\mu\nu}, R_\lambda] = i(g_{\nu\lambda}R_\mu - g_{\mu\lambda}R_\nu),\\ &[J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] = i(g_{\mu\beta}J_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha}J_{\nu\beta} + g_{\nu\alpha}J_{\mu\beta} - g_{\nu\beta}J_{\mu\alpha}). \end{aligned} \tag{15}$$

Введем интегральный оператор

$$J_{\mu5} = \frac{R_\mu}{\sqrt{P_\alpha P^\alpha}}. \tag{16}$$

Оператор $J_{\mu5}$ удовлетворяет соотношениям

$$[J_{\mu5}, J_{\nu5}] = iJ_{\mu\nu}. \tag{17}$$

Из (15)–(17) следует, что операторы $J_{\mu\nu}$, $J_{\mu5}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли группы $SO(1,5)$ группы вращений в $(1+5)$-мерном пространстве Минковского. Теорема доказана.

Совершенно аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 4. *Если на множестве решений уравнений (1) и (2)* $p_\mu^2 < 0$*, то эти уравнения инвариантны относительно групп* $SO(2,3)$ *и* $SO(2,4)$ *соответственно.*

Все найденные выше типы инвариантности уравнений связаны с преобразованием пространственно-временных координат. Оказывается, что система уравнений (2) обладает еще одним типом симметрии, обусловленным преобразованием только компонент волновой функции $\Psi(\tau,x)$. Базисные элементы алгебры инвариантности Q_A в этом случае также являются интегро-дифференциальными операторами.

Теорема 5. *Уравнение (2) инвариантно относительно группы* $SO(1,3)$*, причем базисные элементы алгебры Ли задаются формулами*

$$S'^{\mu\nu}(p) = S^{\mu\nu} + \xi^{\mu\nu}(p), \tag{18}$$

где

$$\begin{aligned} &S^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu, \qquad \mu \neq \nu = 0,1,2,3;\\ &\xi^{\mu\nu}(p) = -\frac{i}{2}(\gamma^\mu p^\nu - \gamma^\nu p^\mu)\frac{1}{p^2}(i\gamma_5 m - \hat{M}). \end{aligned} \tag{19}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы перейдем от дифференциального уравнения (2) к эквивалентному ему интегро-дифференциальному уравнению [6–8]. Этот переход осуществляется с помощью оператора

$$
\begin{aligned}
&W = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + i\gamma_5\frac{\hat{M}}{m}\right), \qquad m = [\hat{M}^2]^{1/2},\\
&W = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - i\gamma_5\frac{\hat{M}}{m}\right), \qquad \gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Оператор W использовался в работах [9, 10] для совершенно других целей.

После преобразования (20) уравнение (2) принимает вид

$$
i\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} = i\gamma_5 m\Phi, \qquad \Phi = W\Psi.
\tag{21}
$$

Условие инвариантности (6) принимает вид

$$
\left[i\frac{\partial}{\partial\tau} - i\gamma_5 m, Q_A^\Phi\right]\Phi = 0, \qquad Q_A^\Phi = WQ_AW^{-1}.
\tag{22}
$$

Из (22) видно, что все те четырехрядные матрицы, которые коммутируют с матрицей γ_5, образуют алгебру инвариантности уравнения (21). Базисными элементами этой алгебры являются матрицы

$$
S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu].
\tag{23}
$$

Если теперь над матрицами (23) сделать обратное преобразование W^{-1}, то получим интегральные операторы (19), образующие алгебру Ли группы $SO(1,3)$. Теорема доказана.

В связи с приведенными выше результатами интересно исследовать группы симметрии уравнений типа (1) и (2) с потенциалом $V(x_\mu x^\mu)$. Приведем без доказательства следующее утверждение.

Теорема 6. *Уравнение*

$$
i\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = \mathcal{H}\varphi(\tau, x),
$$

где

$$
\mathcal{H} = -\frac{1}{l}p_\alpha p^\alpha + V(x), \qquad V(x) = (x_\alpha x^\alpha)^{-1/2},
$$

инвариантно относительно группы $SO(1,4)$*, если* $\mathcal{H} < 0$*, и группы* $SO(2,3)$*, если* $\mathcal{H} > 0$.

Замечание 3. Если на решения уравнения (2) наложить релятивистски-инвариантное условие

$$
i\frac{\partial\Psi(\tau, x)}{\partial\tau} = \varkappa\Psi(\tau, x),
\tag{24}
$$

$\varkappa$ — фиксированная масса частицы, то система уравнений (2), (24) совпадет с обычным уравнением Дирака. Важно при этом подчеркнуть, что алгеброй инвариантности системы (2), (24) также будет алгебра Ли группы $SO(1,3)$, базисными элементами которой будут уже не интегральные, а дифференциальные операторы, так как в (19), согласно (24), следует положить $p^2 = \varkappa^2$ и $m = \varkappa$.

1. Niederer U., The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equation, *Helv. Phys. Acta*, 1972, **45**, № 5, 802–810.
2. Andersson R.L., Kumei S., Wulfman C.E., Invariants of the equations of wave mechanics, *Rev. Mex. Phvs.*, 1972, **21**, № 1, 1–35.
3. Boyer C.P., Kalnins E.G., Miller W.Jr., Lie theory and separation of variables, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 3, 499–511.
4. Aghassi J.J., Roman P., Santilli R.M., New dynamical group for relativistic quantum mechanics, *Phys. Rev. D*, 1970, **1**, № 10, 2753–2765.
5. Фущич В.И., Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе, *ТМФ*, 1970, **4**, № 3, 361–382.
6. Fushchych W.I., On the additional invariance of the Dirac and Maxwell Equations, *Lett. Nuovo Cim.*, 1974, **11**, № 10, 508–512
7. Фущич В.И., О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения, *ТМФ*, 1971, **7**, № 1, 3–12.
8. Fushchych W., On the additional invariance of the relativistic equations of motion, Preprint ITP-70-32, Kiev, 1970, 17 p.
9. Chakrabarti A., Canonical form of the covariant free-particle equations, *J. Math. Phys.*, 1963, **4**, № 10, 1215–1222.
10. Johnson J., Chang K.K., Exact diagonalisation of the Dirac hamiltonian in an external field, *Phys. Rev. D*, 1974, **10**, № 8, 2421–2430.