О дополнительной инвариантности уравнения Клейна–Гордона–Фока

В.И. ФУЩИЧ

Хорошо известно, что уравнение Клейна–Гордона–Фока (КГФ)

$$\begin{gathered} L\varphi(x_0,\boldsymbol{x})=0, \qquad L=p_0^2-p_a^2-m^2, \\ x_0\equiv t, \qquad p_0=i\frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad p_a=-i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad a=1,2,3, \end{gathered} \tag{1}$$

инвариантно относительно группы Пуанкаре. В терминах алгебры Ли это означает, что удовлетворяются следующие условия:

$$[L,Q_i]\varphi(t,\boldsymbol{x})\equiv(LQ_i-Q_iL)\varphi=0; \qquad i=1,2,\ldots,10, \tag{2}$$

где Q_i — базисные элементы алгебры Пуанкаре $P(1,3)$ имеющие такую явную структуру:

$$P_\mu=p_\mu, \qquad J_{\mu\nu}=x_\mu p_\nu-x_\nu p_\mu, \qquad \mu,\nu=0,1,2,3. \tag{3}$$

В данной работе дается положительный ответ на следующий вопрос: существует ли алгебра (группа) инвариантности уравнения КГФ, унитарно неэквивалентная алгебре (3)?

С помощью замены

$$p_0\varphi=\varkappa\Psi_1, \qquad \varphi=\Psi_2, \qquad p_0\varphi\neq0, \tag{4}$$

где $\varkappa$ — постоянная величина, уравнение (1) преобразуем к системе двух уравнений первого порядка относительно временной производной

$$p_0\Psi(t,\boldsymbol{x})=\mathcal{H}\Psi(t,\boldsymbol{x}), \qquad \Psi=\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2\varkappa}\left\{(E^2+\varkappa^2)\sigma_1-i\sigma_2(E^2-\varkappa^2)\right\}, \qquad E=(p_a^2+m^2)^{1/2}, \tag{6}$$

где σ_1, σ_2, σ_3 — двумерные матрицы Паули. Операторы (3) после преобразования (4) принимают вид

$$\begin{aligned} \{Q^{\mathrm{I}}\}:\quad & P_\mu^{\mathrm{I}}=VP_\mu V^{-1}=p_\mu, \qquad J_{ab}^{\mathrm{I}}=J_{ab}, \qquad a,b=1,2,3; \\ & J_{0a}^{\mathrm{I}}=VJ_{0a}V^{-1}=x_0p_a-x_ap_0+\xi_a^{\mathrm{I}}, \qquad \xi_a^{\mathrm{I}}=\frac{ip_a}{2p_0}(\sigma_0-\sigma_3); \end{aligned} \tag{7}$$

$$V=\frac{1}{2}\left\{\left(1+\frac{p_0}{\varkappa}\right)\sigma_1+i\left(1-\frac{p_0}{\varkappa}\right)\sigma_2\right\}. \tag{8}$$

Доклады Академии наук СССР, 1976, **230**, № 3, С. 570–572.

Теорема. *Уравнение (5) инвариантно относительно следующих двух алгебр:*

$$\{Q^{\mathrm{II}}\}: \quad P_\mu^{\mathrm{II}} = p_\mu, \qquad J_{ab}^{\mathrm{II}} = J_{ab}, \qquad J_{0a}^{\mathrm{II}} = J_{0a} + \xi_a^{\mathrm{II}}, \\ \xi_a^{\mathrm{II}} = -ip_a \frac{p}{2E^2}(\sigma_0 + \sigma_3); \tag{9}$$

$$\{Q^{\mathrm{III}}\}: \quad P_0^{\mathrm{III}} = \mathcal{H}, \qquad P_a^{\mathrm{III}} = p_a, \qquad J_{ab}^{\mathrm{III}} = J_{ab}, \\ J_{0a}^{\mathrm{III}} = x_0 p_a - \frac{1}{2}(x_a\mathcal{H} + \mathcal{H}x_a) + \xi_a^{\mathrm{III}}, \qquad \xi_a^{\mathrm{III}} = -ip_a\frac{\mathcal{H}}{2E^2}. \tag{10}$$

Доказательство. Воспользуемся приемом [1, 2], с помощью которого была обнаружена новая симметрия уравнений Максвелла и Дирака. Осуществим над уравнением (5) изометрическое интегральное преобразование

$$W = \frac{1}{2\sqrt{\varkappa}}\left\{(E+\varkappa)(\sigma_0 + i\sigma_2) + (E-\varkappa)(\sigma_3 - \sigma_1)\right\}; \tag{11}$$

σ_0 — единичная двумерная матрица. После этого преобразования уравнение (5) переходит в систему двух не зацепляющихся интегро-дифференциальных уравнений вида

$$i\frac{\partial\Phi(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = \sigma_3 E\Phi(t,\boldsymbol{x}), \qquad \Phi = W\Psi, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $E = (p_a^2 + m^2)^{1/2}$ — положительный псевдодифференциальный оператор.

Условие инвариантности (2) для уравнения (12) выглядит так

$$[L', Q_i']_- \Phi = 0, \qquad L' = p_0 - \sigma_3 E. \tag{2$'$}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что условие (2$'$) удовлетворяется для таких двух алгебр:

$$\{Q^{(2)}\}: \quad P_\mu^{(2)} = p_\mu, \qquad J_{\mu\nu}^{(2)} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu; \tag{13}$$

$$\{Q^{(3)}\}: \quad P_0^{(3)} = \sigma_3 E, \qquad P_a^{(3)} = p_a, \qquad J_{ab}^{(3)} = J_{ab}, \\ J_{0a}^{(3)} = tp_a - \frac{1}{2}(x_a\mathcal{H}' + \mathcal{H}'x_a), \qquad \mathcal{H}' = \sigma_3 E. \tag{14}$$

Явная структура операторов (9) и (10) получается из операторов (13) и (14) с помощью таких преобразований

$$Q_i^{\mathrm{II}} = W^{-1}Q_i^{(2)}W, \tag{15}$$

$$Q_i^{\mathrm{III}} = W^{-1}Q_i^{(3)}W, \tag{16}$$

где

$$W^{-1} = \frac{1}{4\sqrt{\varkappa E}}\left\{(E+\varkappa)(\sigma_0 - i\sigma_2) + (E-\varkappa)(\sigma_1 - i\sigma_2)\right\}. \tag{17}$$

Этим самым и доказана теорема. Конечно, зная явный вид операторов (9) и (10), в справедливости теоремы можно было убедиться и прямой проверкой условий (2).

Замечание 1. Помимо алгебры (7), (9), (10) уравнение (5) инвариантно, например, относительно такой совокупности операторов:

$$\begin{aligned} &P_0^{\mathrm{IV}} = \mathcal{H}, \qquad P_a^{\mathrm{IV}} = p_a, \qquad J_{ab}^{\mathrm{IV}} = J_{ab}, \\ &J_{0a}^{\mathrm{IV}} = tp_a - \frac{1}{2}(x_a\mathcal{H} + \mathcal{H}x_a) = tp_a - x_a\mathcal{H} + \frac{ip_a}{2\varkappa}(\sigma_1 - i\sigma_2). \end{aligned} \tag{18}$$

На решениях уравнения (5) операторы P_0^{IV}, J_{0a}^{IV} можно представить в виде

$$P_0^{\mathrm{IV}}\Psi = p_0\Psi, \qquad J_{0a}^{\mathrm{IV}}\Psi = \left\{ tp_a - x_a p_0 + \frac{ip_a}{2\varkappa}(\sigma_1 - i\sigma_2) \right\}\Psi.$$

Можно, однако, показать, что операторы (18) унитарно эквивалентны операторам (10).

Замечание 2. Операторы (9) и (10) реализуют представления алгебры Пуанкаре $P(1,3)$ в классе интегро-дифференциальных (нелокальных) операторов. Вся нелокальность содержится в операторах ξ_a^{II} и ξ_a^{III}, поскольку E^{-2} — интегральный оператор в x-пространстве.

Следствие 1. *Для алгебры (10)*

$$[x_a, J_{\mu\nu}]_- \neq i(g_{a\mu}x_\nu - g_{a\nu}x_\mu), \qquad a = 1,2,3; \quad \mu,\nu = 0,1,2,3, \tag{19}$$

$$[x_0, J_{\mu\nu}]_- = 0. \tag{20}$$

Следствие 2. *Операторы (9) и (10) порождают обычные, лоренцовские, правила преобразования для энергии и импульса, поскольку для обеих алгебр удовлетворяются коммутационные соотношения*

$$[P_\mu, J_{\alpha\beta}]_- = i(g_{\mu\alpha}P_\beta - g_{\mu\beta}P_\alpha).$$

Следствие 3. *Операторы (9) и (10) порождают совершенно различные правила преобразования для пространственных и временной координат при переходе от одной системы отсчета к другой:*

$$\begin{aligned} &\left(x_a^{\mathrm{II}}\right)' = \exp\left(iJ_{0b}^{\mathrm{II}}\theta_b\right) x_a \exp\left(-iJ_{0c}^{\mathrm{II}}\theta_c\right), \qquad a,b,c, = 1,2,3, \\ &\left(x_0^{\mathrm{II}}\right)' = \exp\left(iJ_{0b}^{\mathrm{II}}\theta_b\right) x_0 \exp\left(-iJ_{0c}^{\mathrm{II}}\theta_c\right); \end{aligned} \tag{21}$$

$$\left(x_a^{\mathrm{III}}\right)' = \exp\left(iJ_{0b}^{\mathrm{III}}\theta_b\right) x_a \exp\left(-iJ_{0c}^{\mathrm{III}}\theta_c\right); \tag{22}$$

$$\left(x_0^{\mathrm{III}}\right)' = \exp\left(iJ_{0b}^{\mathrm{III}}\theta_b\right) x_0 \exp\left(-iJ_{0c}^{\mathrm{III}}\theta_c\right) = x_0^{\mathrm{III}}. \tag{23}$$

Формула (23) является следствием соотношения (20) и указывает на то, что время не меняется при переходе от одной системы отсчета к другой.

Суммируя все сказанное, приходим к выводу: относительно преобразований (22), (23) релятивистское уравнение (5) инвариантно в смысле (2), хотя время не изменяется при переходе от одной системы отсчета к другой. При этом, конечно, нелокальные преобразования (22) не совпадают с преобразованиями Лоренца. Для уравнений Максвелла и Дирака этот факт был обнаружен в [2].

Замечание 3. Преобразование (11), осуществляющее переход от уравнения (5) к (12), не единственно. Существует много преобразований такого типа. Вот одно из них [1, 2]:

$$W_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\sigma_3\frac{\mathcal{H}}{E}\right), \qquad W_1^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\sigma_3\frac{\mathcal{H}}{E}\right).$$

Наконец, приведем явный вид оператора координаты в представлении Ψ:

$$\hat{X}_a = W^{-1}x_aW = x_a + \frac{ip_a}{2E^2}(\sigma_0+\sigma_3).$$

1. Фущич В.И., *Теор. и мат. физ.*, 1971, **7**, № 1, 3; Препринт Ин-та теор. физики АН УССР, № 70-32, Киев, 1970.
2. Fushchych W.I., *Lettere Nuovo Cimento*, 1974, **11**, № 10, 508.