Об уравнениях движения, инвариантных относительно группы $P(1,n)$. II

Л.П. СОКУР, В.И. ФУЩИЧ

Equations are deduced which generalize Dirac equation and are invariant relative to the rotations and translations in the $(n+1)$-dimensional Minkowski space. The group-theoretical analysis of the equations obtained is carried out. P-, T- and C-properties of the equations are studied.

Выведены уравнения, являющиеся обобщением уравнения Дирака, которые инвариантны относительно вращений и трансляций в $(n+1)$-мерном пространстве Минковского. Проведен теоретико-групповой анализ выведенных уравнений. Изучены P-, T-, C-свойства этих уравнений.

1. Введение

Настоящая работа является продолжением и обобщением некоторых результатов, приведенных в [1] для групп $P(1,3)$ и $P(1,4)$.

В [1] было отмечено, что уравнение Дирака с ненулевой массой ($\varkappa = m$)

$$\begin{gathered}(\gamma_\mu p^\mu - \varkappa)\Psi(t,\boldsymbol{x}) = 0 \qquad (\mu = 0,1,2,3),\\ p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad p_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k} \qquad (k=1,2,3)\end{gathered} \tag{1.1}$$

эквивалентно четырем уравнениям вида[1]

$$\begin{gathered}p_\mu\Psi(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{id}(S_{\mu\nu}p^\nu + \varkappa S_{\mu n+1})\Psi(t,\boldsymbol{x}),\\ \boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3), \qquad n=3, \qquad d=1/2,\end{gathered} \tag{1.2}$$

где матрицы

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu), \qquad S_{\mu 4} = \frac{i}{2}\gamma_\mu, \qquad S_{4\mu} = -\frac{i}{2}\gamma_\mu \tag{1.3}$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли группы $SO(1,4)$

$$\begin{gathered}[S_{AB}, S_{CD}]_- = i(g_{AD}S_{BC} + g_{BC}S_{AD} - g_{AC}S_{BD} - g_{BD}S_{AC})\\ (A,B,\ldots = 0,1,\ldots,4).\end{gathered} \tag{1.4}$$

Уравнение Дирака в форме (1.2) имеет по сравнению с формой (1.1) ряд преимуществ. Во-первых, все матрицы $S_{\mu\nu}$, $S_{\mu 4}$, входящие в это уравнение, удовлетворяют не алгебре Клиффорда, как это имеет место в случае уравнения (1.1), а алгебре Ли группы $SO(1,4)$. Это обстоятельство позволит показать, что уравнение (1.2) с матрицами $S_{\mu\nu}$, $S_{\mu 4}$ (соответствующей размерности) из алгебры $SO(1,4)$ при некотором выборе значения параметра d описывает свободное движение частицы и

Теоретическая и математическая физика, 1971, **6**, № 3, С. 348–363.

[1] Все обозначения, приведенные без объяснений, те же, что и в [1].

античастицы с произвольным спином s. Во-вторых, уравнение (1.2) сравнительно легко обобщается на группы более широкие, чем группа $P(1,3)$. Действительно, если в уравнении (1.2) индекс μ пробегает значения $0,1\ldots,n$, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, а матрицы принадлежат алгебре $SO(1,n+1)$ (или $SO(2,n)$), то такое уравнение, как будет показано ниже, инвариантно относительно группы $P(1,n)$ — группы вращений и трансляций в $(1+n)$-мерном пространстве Минковского.

Все неприводимые представления группы $P(1,n)$ (обобщенная группа Пуанкаре) могут быть построены и изучены методом Вигнера (см., например, [2, 1]).

Уравнение вида (1.2) в том случае, когда $\varkappa=0$, рассматривалось в [3] для группы $P(1,3)$ и в [4] для группы $P(1,4)$.

В данной работе будут выведены уравнения, инвариантные относительно группы $P(1,n)$. Проведен их теоретико-групповой анализ и изучены свойства этих уравнений относительно пространственно-временных отражений. Полученные уравнения являются обобщением уравнений (1.2).

2. Вывод уравнений

Пусть на некотором множестве $M\equiv\{\Psi(t,\boldsymbol{x})\}$, состоящем из функций $\Psi(t,\boldsymbol{x})$, которое всюду плотно в каком-то гильбертовом пространстве, задано следующее представление алгебры Ли групп $P(1,n)$:

$$\begin{aligned}&P^{\mu}=p^{\mu}=i\frac{\partial}{\partial x_{\mu}},\qquad \mu=0,1,\ldots,n,\quad t\equiv x_0,\quad \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\\ &J_{\mu\nu}=x_{\mu}p_{\nu}-x_{\nu}p_{\mu}+S_{\mu\nu},\end{aligned}\tag{2.1}$$

где $S_{\mu\nu}$ — базисные элементы некоторого приводимого представления[2] алгебры Ли группы $SO(1,n)$. Поскольку на M реализуется не только представление алгебры $P(1,n)$, но и представление матричной алгебры $SO(1,n)$, то в M можно так выбрать систему базисных векторов $\{\Psi_{\alpha}(t,\boldsymbol{x})\}$, что α-мультииндексы, нумерующие компоненты волновой функции $\Psi(t,\boldsymbol{x})$, являются схемами Гельфанда–Цетлина (Г–Ц) [5]. Линейную оболочку, порожденную базисными векторами $\Psi_{\alpha}(t,\boldsymbol{x})$, обозначим через $\mathcal{L}\{\Psi_{\alpha}(t,\boldsymbol{x})\}$.

Рассмотрим систему уравнений

$$p_{\mu}\Psi(t,\boldsymbol{x})=(L_{\mu\nu}p^{\nu}+\varkappa L_{\mu})\Psi(t,\boldsymbol{x}),\qquad \mathcal{P}_{\mu}\equiv L_{\mu\nu}p^{\nu}+\varkappa L_{\mu},\tag{2.2}$$

где $L_{\mu\nu}=-L_{\nu\mu}$, L_{μ} — некоторые матрицы, размерность которых определяет компонентность волновой функции $\Psi(t,\boldsymbol{x})\in\mathcal{L}\{\Psi_{\alpha}(t,\boldsymbol{x})\}$. Будем требовать, чтобы всякое решение уравнения (2.2) было решением $(1{+}n)$-мерного уравнения Клейна–Гордона

$$g^{\mu\nu}p_{\mu}p_{\nu}\Psi(t,\boldsymbol{x})=\varkappa^2\Psi(t,\boldsymbol{x}).\tag{2.3}$$

Это требование приводит к уравнению

$$L_{\mu}p^{\mu}\Psi(t,\boldsymbol{x})=\varkappa\Psi(t,\boldsymbol{x}).\tag{2.4}$$

Система уравнений (2.2), (2.4) будет инвариантной относительно преобразований из группы $P(1,n)$, если выполняются следующие коммутационные соотношения:

$$[P_{\mu},J_{\sigma\rho}]_{-}=i(g_{\mu\sigma}p_{\rho}-g_{\mu\rho}p_{\sigma}),\tag{2.5a}$$

[2]Мы уточним это представление ниже после вывода уравнений движения.

$$[L_\mu, J_{\sigma\rho}]_- = i(g_{\mu\sigma}L_\rho - g_{\mu\rho}L_\sigma), \tag{2.5б}$$

$$[P_\mu, P_\nu]_- = 0. \tag{2.5в}$$

Из (2.5а), (2.5б) следует, что матрицы $L_{\mu\nu}$ должны удовлетворять соотношениям

$$[S_{\sigma\rho}, L_{\mu\nu}]_- = i(g_{\sigma\nu}L_{\rho\mu} + g_{\rho\mu}L_{\sigma\nu} - g_{\sigma\mu}L_{\rho\nu} - g_{\rho\nu}L_{\sigma\mu}). \tag{2.6}$$

Поскольку матрицы $L_{\mu\nu}$ антисимметричны и удовлетворяют (2.6), то на линейной оболочке $\mathcal{L}\{L_{\mu\nu}\}$, порождаемой матрицами $L_{\mu\nu}$, реализуется представление группы $SO(1,n)$, которое изоморфно присоединенному представлению. Отсюда можно заключить, что с точностью до постоянного множителя матрицы $L_{\mu\nu}$ совпадают с матрицами $S_{\mu\nu}$, т.е.

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{id}S_{\mu\nu}. \tag{2.7}$$

Условие (2.5б) будет выполняться, если матрицы L_μ удовлетворяют соотношениям

$$[L_\mu, L_\nu]_- = \frac{1}{d}L_{\mu\nu}. \tag{2.8}$$

Учитывая (2.6), (2.7), (2.8) и обозначая матрицу

$$L_\mu \equiv \frac{1}{d}S_{\mu n+1}, \tag{2.9}$$

приходим к выводу, что матрицы $S_{AB} = (S_{\mu\nu}, S_{\mu n+1})$ $(A, B = 0, 1, \dots, n{+}1)$ удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли $SO(2,n)$, т.е. соотношениям (1.4) с метрическим тензором

$$g_{00} = -g_{11} = \cdots = -g_{nn} = g_{n+1\,n+1} = 1.$$

Итак, уравнения (2.2), (2.4) принимают вид

$$\begin{aligned} p_\mu\Psi(t,\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{id}(S_{\mu\nu}p^\nu + i\varkappa S_{\mu\,n+1})\Psi(t,\boldsymbol{x}), \\ \varkappa\Psi(t,\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{d}S_{\mu n+1}p^\mu\Psi(t,\boldsymbol{x}), \end{aligned} \tag{2.10}$$

где $\Psi(t,\boldsymbol{x}) \in \mathcal{L}\{\Psi_\alpha(t,\boldsymbol{x})\}$ — пространство, в котором реализуется конечномерное (неунитарное) представление группы $SO(2,n)$, точнее, в $\mathcal{L}\{\Psi_\alpha(t,\boldsymbol{x})\}$ должна реализоваться такая прямая сумма матричных представлений группы $SO(1,n)$, чтобы на ней могло быть реализовано некоторое приводимое или неприводимое представление группы $SO(2,n)$.

Систему уравнений (2.10) можно рассматривать как условия, которые сужают пространство $\mathcal{L}\{\Psi_\alpha(t,\boldsymbol{x})\}$ к некоторому $P(1,n)$-инвариантному подпространству $\mathcal{L}\{\Psi_\beta(t,\boldsymbol{x})\} \subset \mathcal{L}\{\Psi_\alpha(t,\boldsymbol{x})\}$, где $\{\Psi_\beta(t,\boldsymbol{x})\}$ – подсистема базисных векторов в $\{\Psi_\alpha(t,\boldsymbol{x})\}$.

Поскольку на $\mathcal{L}\{\Psi_\alpha(t,\boldsymbol{x})\}$ реализуется неунитарное представление группы $SO(2,n)$, то это значит, что часть матриц S_{AB} будет эрмитовой, а часть антиэрмитовой. Удобно выбрать

$$S^+_{kl} = S_{kl}, \qquad S^+_{0k} = -S_{0k}, \qquad S^+_{0\,n+1} = S_{0\,n+1}, \qquad S^+_{k\,n+1} = -S_{k\,n+1} \\ (k,l = 1,2,\ldots,n). \tag{2.11}$$

Из требований эрмитовости гамильтониана $H = \mathcal{P}_0$ вытекает, что $d = d^*$.

Таким образом, система уравнений (2.10) инвариантна относительно группы $P(1,n)$, и на ее решениях инвариант

$$P_\mu P^\mu \Psi(t,\boldsymbol{x}) = \varkappa^2 \Psi(t,\boldsymbol{x}). \tag{2.12}$$

3. Теоретико-групповой анализ уравнений (2.10)

В этом разделе ради простоты будет проведен теоретико-групповой анализ уравнений (2.10), инвариантных только относительно групп $P(1,3)$ и $P(1,4)$, т.е. будет показано, что при определенном выборе параметра d и матриц S_{AB} на множестве решений уравнений (2.10) реализуется прямая сумма двух неприводимых представлений этих групп. Аналогичное утверждение справедливо и для уравнений, инвариантных относительно произвольной группы $P(1,n)$.

1. Уравнения (2.10), инвариантные относительно группы Пуанкаре, имеют вид

$$\begin{aligned} p_\mu \Psi(t,\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{id}\left(S_{\mu\nu}p^\nu + i\varkappa S_{\mu 4}\right)\Psi(t,\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3), \\ \varkappa\Psi(t,\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{d} S_{\mu 4}p^\mu \Psi(t,\boldsymbol{x}), \qquad \varkappa = m. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Докажем следующее

Утверждение 1. *Если матрицы S_{AB} $(AB = 0,\ldots,4)$ в уравнениях (3.1) реализуют неприводимое представление алгебры $SO(2,3)$, задаваемое числами Г–Ц (μ_0,μ_1), и $d = \mu_0$, на множестве решений уравнений (3.1) реализуется прямая сумма*

$$D^+(\varkappa; s = \mu_1) \oplus D^-(\varkappa; s = \mu_1) \tag{3.2}$$

пеприводимых представлений группы $P(1,3)$.

Прежде чем приступить к доказательству этого утверждения, заметим, что между конечномерными представлениями алгебр $SO(2,3)$ и $SO(5)$ существует взаимно-однозначное соответствие, которое можно задать следующим способом:

$$\Sigma_{12} = S_{04}, \qquad \Sigma_{1\,k+2} = \frac{1}{i}S_{0k}, \qquad \Sigma_{k+2\,l+2} = S_{kl}, \qquad \Sigma_{2\,k+2} = \frac{1}{i}S_{4k}, \tag{3.3}$$

где Σ_{ij} $(i,j = 1,2,\ldots,5)$ — базисные элементы алгебры $SO(5)$, заданные в том же самом пространстве, что и операторы S_{AB}.

Выберем в $\mathcal{L}\{\Psi_\alpha(t,\boldsymbol{x})\}$ базис Г–Ц. При этом индекс α задается схемой

$$\alpha = \left|\begin{matrix} \mu_0 & \mu_1 \\ m_{04} & m_{14} \\ m_{03} & \\ m_{02} & \end{matrix}\right| \tag{3.4}$$

(по сравнению с [5] в (3.4) сделаны некоторые удобные для нас переобозначения).

Все числа $\mu = (\mu_0, \mu_1)$ и $m = (m_{02}, m_{03}, m_{04}, m_{14})$ одновременно целые или полуцелые и удовлетворяют неравенствам

$$\mu_0 \geq m_{04} \geq \mu_1 \geq |m_{14}| \geq 0, \qquad m_{04} \geq m_{03} \geq |m_{14}|, \qquad m_{03} \geq |m_{02}|. \tag{3.5}$$

В базисе Г–Ц матрицы Σ_{ij} (а значит, и матрицы S_{AB}) известны и задаются формулами [5]

$$\Sigma_{12}\Psi_\alpha = m_{02}\Psi_\alpha, \tag{3.6}$$

$$\begin{gathered}\Sigma_{23}\Psi_\alpha = \pm\frac{1}{2i}\left\{\left[(m_{03}-m_{02})(m_{03}+m_{02}+1)\right]^{1/2}\Psi_{\alpha(m_{02}\to m_{02}+1)}-\right.\\ \left.-\left[(m_{03}-m_{02}+1)(m_{03}+m_{02})\right]^{1/2}\Psi_{\alpha(m_{02}\to m_{02}-1)}\right\},\end{gathered} \tag{3.7}$$

$$\begin{gathered}\Sigma_{34}\Psi_\alpha = \pm\left\{\left[\frac{(m_{03}+m_{02}+1)(m_{03}-m_{02}+1)(m_{04}+m_{03}+2}{(2m_{03}+1)(2m_{03}+3)}\times\right.\right.\\ \left.\times\frac{(m_{04}-m_{03})(m_{03}-m_{14}+1)(m_{03}+m_{04}+1)}{(m_{03}+1)^2}\right]^{1/2}\Psi_{\alpha(m_{03}\to m_{03}+1)}-\\ -\left[\frac{(m_{03}+m_{02})(m_{03}-m_{02})(m_{04}+m_{03}+1)(m_{04}-m_{03}+1)}{(2m_{03}-1)(2m_{03}-1)}\times\right.\\ \left.\left.\times\frac{(m_{03}-m_{14})(m_{03}+m_{14})}{m_{03}^2}\right]^{1/2}\Psi_{\alpha(m_{03}\to m_{03}-1)}\right\}+m_{14}\frac{m_{02}(m_{04}+1)}{m_{03}(m_{03}+1)}\Psi_\alpha.\end{gathered} \tag{3.8}$$

$$\begin{gathered}\Sigma_{45}\Psi_\alpha = \pm\frac{1}{2i}\left\{\left[\frac{(m_{03}-m_{04}-1)(m_{03}+m_{04}+2)(\mu_1-m_{04}-1)}{(m_{04}+m_{14}+1)(m_{04}+m_{14}+2)}\times\right.\right.\\ \left.\times\frac{(\mu_1+m_{04}+2)(\mu_0-m_{04})(\mu_0+m_{04}+3)}{(m_{14}-m_{04}-2)(m_{14}-m_{04}-1)}\right]^{1/2}\Psi_{\alpha(m_{04}\to m_{04}+1)}+\\ +\left[\frac{(m_{03}-m_{14})(m_{14}+m_{03}+1)(\mu_1-m_{14})}{(m_{04}+m_{14}+1)(m_{04}+m_{14}+2)}\times\right.\\ \left.\times\frac{(\mu_1+m_{14}+1)(\mu_0-m_{14}+1)(\mu_0+m_{14}+2)}{(m_{04}-m_{14})(m_{04}+m_{14}+1)}\right]^{1/2}\Psi_{\alpha(m_{14}\to m_{14}+1)}-\\ -\left[\frac{(m_{03}-m_{04})(m_{03}+m_{04}+1)(\mu_1-m_{04})(\mu_1+m_{04}+1)}{(m_{04}+m_{14})(m_{04}+m_{14}+1)(m_{14}-m_{04}-1)}\times\right.\\ \left.\times\frac{(\mu_0-m_{04}+1)(\mu_0+m_{04}+2)}{(m_{14}-m_{04})}\right]^{1/2}\Psi_{\alpha(m_{04}\to m_{04}-1)}-\\ -\left[\frac{(m_{03}-m_{14}+1)(m_{14}+m_{03})(\mu_1-m_{14}+1)(\mu_1+m_{14})}{(m_{04}+m_{14})(m_{04}+m_{14}+1)(m_{04}-m_{14}+1)}\times\right.\\ \left.\left.\times\frac{(\mu_0-m_{14}+2)(\mu_0+m_{14}+1)}{(m_{04}-m_{14}+2)}\right]^{1/2}\Psi_{\alpha(m_{14}\to m_{14}-1)}\right\},\end{gathered} \tag{3.9}$$

где стрелки $\to$ обозначают соответствующую замену в схемах α (3.4).

Остальные генераторы Σ_{ij} могут быть получены из коммутационных соотношений алгебры $SO(5)$.

Перейдем теперь к доказательству утверждения 1.

Доказательство. Сначала докажем, что в “системе покоя” ($p_0 \neq 0$, $p_k = 0$) на множестве решений $\mathcal{L}\{\Psi^0_\beta\}$ уравнений (3.1) (с $d = \mu_0$) реализуется прямая сумма

$$D(\mu_1) \oplus D(\mu_1) \tag{3.10}$$

двух неприводимых представлений группы $SO(3)$.

В этой системе при $d = \mu_0$ уравнения (3.1) сводятся к двум независимым уравнениям[3]

$$\begin{aligned} p_0\Psi^0 &= \frac{\varkappa}{\mu_0} S_{04}\Psi^0, \\ \varkappa\Psi^0 &= \frac{1}{\mu_0} S_{04} p^0 \Psi^0, \end{aligned} \tag{3.11}$$

где Ψ^0 — волновая функция частицы в системе покоя.

Уравнения (3.11) эквивалентны двум матричным условиям

$$S_{04}\Psi^0 = \mu_0\Psi^0, \tag{3.12а}$$

$$S_{04}\Psi^0 = -\mu_0\Psi^0, \tag{3.12б}$$

Условия (3.12а) и (3.12б) сужают множество $\mathcal{L}\{\Psi^0_\alpha\}$, на котором реализуется неприводимое представление группы $SO(2,3)$, к двум непересекающимся подмножествам, которые мы обозначим как $\mathcal{L}\{\Psi^0_{\beta+}\}$ и $\mathcal{L}\{\Psi^0_{\beta-}\}$, соответственно, где $\Psi^0_{\beta+}$ и $\Psi^0_{\beta-}$ — базисные элементы этих подмножеств.

Чтобы описать эти подмножества, воспользуемся соответствием (3.3) и перепишем (3.12) так:

$$\Sigma_{12}\Psi^0_{\beta+} = \mu_0\Psi^0_{\beta+}, \tag{3.13а}$$

$$\Sigma_{12}\Psi^0_{\beta-} = -\mu_0\Psi^0_{\beta-} \tag{3.13б}$$

(условия (3.13) для удобства записаны как условия для базисных элементов).

Используя явный вид (3.6) генератора Σ_{12} и неравенства (3.5), приходим к заключению, что базисные элементы $\Psi^0_{\beta+} \in \{\Psi^0_\alpha\}$ и $\Psi^0_{\beta-} \in \{\Psi^0_\alpha\}$ удовлетворяют условиям (3.13а) и (3.13б) лишь в том случае, если их индексы имеют вид

$$\beta^+ = \left|\begin{matrix} \mu_0 & \mu_1 \\ \mu_0 & m_{14} \\ \mu_0 & \\ \mu_0 & \end{matrix}\right|, \qquad \mu_1 \geq |m_{14}|; \tag{3.14а}$$

$$\beta^- = \left|\begin{matrix} \mu_0 & \mu_1 \\ \mu_0 & m_{14} \\ \mu_0 & \\ -\mu_0 & \end{matrix}\right|, \qquad \mu_1 \geq |m_{14}|. \tag{3.14б}$$

[3] Зависимость волновой функции Ψ от переменных t, $\boldsymbol{x}$ не будем далее указывать, поскольку в этом разделе нас интересует только матричная структура уравнений (2.10).

Другими словами, условия сужения (3.13) эквивалентны условиям

$$m_{02} = m_{03} = m_{04} = \mu_0 \tag{3.15а}$$

и

$$-m_{02} = m_{03} = m_{04} = \mu_0, \tag{3.15б}$$

которые сужают множество индексов $\{\alpha\}$ к двум подмножествам

$$\{\beta^+\} \subset \{\alpha\} \qquad \text{и} \qquad \{\beta^-\} \subset \{\alpha\}; \qquad \{\beta^+\} \cap \{\beta^-\} = \{0\}.$$

Из неравенств (3.14а) и (3.14б) следует, что размерности пространств $\mathcal{L}\{\Psi^0_{\beta+}\}$ и $\mathcal{L}\{\Psi^0_{\beta-}\}$ совпадают с размерностью неприводимых представлений группы $SO(3)$. Тот факт, что на этих множествах реализуются неприводимые представления группы $SO(3)$, следует из явных выражений для операторов Σ'_{ij} и Σ''_{ij}, которые действуют в пространствах $\mathcal{L}\{\Psi^0_{\beta+}\}$ и $\mathcal{L}\{\Psi^0_{\beta-}\}$, соответственно, и которые получаются из выражений (3.8) и (3.9) с учетом условий (3.15а) и (3.15б) (операторы Σ_{23} и Σ_{12} исключаем из рассмотрения, поскольку область значений оператора Σ_{23} не принадлежит пространствам $\mathcal{L}\{\Psi^0_{\beta+}\}$ и $\mathcal{L}\{\Psi^0_{\beta-}\}$, а оператор Σ_{12} является константой в этих пространствах). Операторы Σ'_{ij} имеют вид

$$\begin{aligned}
&\Sigma'_{34}\Psi^0_{\beta+} = m_{14}\Psi^0_{\beta+},\\
&\Sigma'_{45}\Psi^0_{\beta+} = \pm\frac{1}{2i}\left\{\left[(\mu_1 - m_{14})(\mu_1 + m_{14} + 1)\right]^{1/2}\Psi^0_{\beta+(m_{14}\to m_{14}+1)} - \right.\\
&\qquad\left. - \left[(\mu_1 - m_{14} + 1)(\mu_1 + m_{14})\right]^{1/2}\Psi^0_{\beta+(m_{14}\to m_{14}-1)}\right\}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Отсюда мы видим, что в $\mathcal{L}\{\Psi^0_{\beta+}\}$ реализуется неприводимое представление $D(\mu_1)$ алгебры $SO(3)$.

Аналогично показывается, что то же самое представление алгебры $SO(3)$ реализуется и в $\mathcal{L}\{\Psi^0_{\beta-}\}$. Для этого нужно заметить лишь, что отображение $\Psi^0_{\beta-} \to \Psi^{0'}_{\beta-} = \Psi^0_{\beta-(m_{14}\to -m_{14})}$ является внутренним для пространства $\mathcal{L}\{\Psi^0_{\beta-}\}$. При таком отображении операторы Σ''_{ij} представляются в виде (3.16).

Итак, мы показали, что на множестве решений уравнений (3.11) действительно реализуется прямая сумма (3.10).

Для завершения доказательства осталось показать, что на $\Psi^0_+ \in \mathcal{L}\{\Psi^0_{\beta+}\}$ и $\Psi^0_- \in \mathcal{L}\{\Psi^0_{\beta-}\}$ оператор знака энергии $\hat{\varepsilon} = \mathcal{P}_0/|\mathcal{P}_0|$ имеет собственные значения $(+1)$ и (-1). В силу (3.11) имеем

$$p_0\Psi^0_+ = \varkappa\Psi^0_+, \qquad p_0\Psi^0_- = -\varkappa\Psi^0_-, \tag{3.17}$$

откуда и следует, что

$$\hat{\varepsilon}\Psi^0_\pm = \pm\Psi^0_\pm.$$

При переходе от системы покоя к произвольной системе отсчета множества $\mathcal{L}\{\Psi^0_{\beta+}\}$ и $\mathcal{L}\{\Psi^0_{\beta-}\}$ перейдут в некоторые другие множества $\mathcal{L}\{\Psi_{\beta+}\}$ и $\mathcal{L}\{\Psi_{\beta-}\}$, на которых также реализуется прямая сумма (3.10). Кроме того, поскольку $\hat{\varepsilon}$ является инвариантом группы $P(1,3)$, то собственные значения этого инварианта не изменяются. Таким образом, мы доказали утверждение 1.

2. Уравнения (2.10), инвариантные относительно группы $P(1,4)$, имеют вид

$$\begin{aligned} &p_\mu \Psi(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{id}\left(S_{\mu\nu}p^\nu + i\varkappa S_{\mu 5}\right)\Psi(t,\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_4),\\ &\varkappa\Psi(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{d}S_{\mu 5}p^\mu\Psi(t,\boldsymbol{x}), \qquad (\mu=0,1,\ldots,4). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Для уравнений (3.18) справедливо следующее

Утверждение 2. *Если матрицы S_{AB} $(A,B=0,1,\ldots,4)$ в уравнениях (3.18) реализуют неприводимое конечномерное представление алгебры $SO(2,4)$, задаваемое числами (μ_0,μ_1,μ_2), и $d=\mu_0$, то на его решениях реализуется прямая сумма*

$$D^+(\varkappa;s,\tau)\oplus D^-(\varkappa;\tau,s), \qquad s\equiv\frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2), \qquad \tau\equiv\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2), \tag{3.19}$$

неприводимых представлений группы $P(1,4)$.

Доказательство. Способ доказательства утверждения 2 тот же самый, что и утверждения 1, поэтому мы здесь отметим лишь те новые элементы, которые возникают в этом случае.

Соответствие между базисными элементами Σ_{ij} $(i,j=1,2,\ldots,6)$ алгебры $SO(6)$ и базисными элементами S_{AB} алгебры $SO(2,4)$ задается соотношениями

$$\begin{aligned} &\Sigma_{12}=S_{05}, \qquad \Sigma_{1\,k+2}=\frac{1}{i}S_{0k}, \qquad \Sigma_{2\,k+2}=\frac{1}{i}S_{5k}, \qquad \Sigma_{k+2\,l+2}=S_{kl},\\ &(k,l=1,2,3,4). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Схемы Г–Ц в этом случае имеют вид

$$\alpha=\left|\begin{matrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2\\ m_{05} & m_{15} & \\ m_{04} & m_{14} & \\ m_{03} & & \\ m_{02} & & \end{matrix}\right|, \qquad \begin{aligned} &\mu_0\ge m_{05}\ge\mu_1\ge m_{15}\ge|\mu_2|\ge 0,\\ &m_{05}\ge m_{04}\ge m_{15}\ge|m_{14}|,\\ &m_{04}\ge m_{03}\ge|m_{14}|,\\ &m_{03}\ge|m_{02}|. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Операторы Σ_{12}, Σ_{23}, Σ_{34}, Σ_{45} задаются формулами (3.6)–(3.9), где числа μ_0 и μ_1 заменены числами m_{05} и m_{15}. Явный вид формулы Σ_{56} мы не будем выписывать из-за ее громоздкости (она может быть получена по общей формуле [5]).

Повторяя рассуждения п. 1, приходим к следующим условиям сужения:

$$\Sigma_{12}\Psi^0_{\beta+}=\mu_0\Psi^0_{\beta+}, \tag{3.22а}$$

$$\Sigma_{12}\Psi^0_{\beta-}=-\mu_0\Psi^0_{\beta-}. \tag{3.22б}$$

Из (3.22а) и (3.22б) с учетом неравенств (3.21) и явного вида оператора Σ_{12} получаем, что индексы β^+ и β^- представляются схемами

$$\beta^+=\left|\begin{matrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2\\ \mu_0 & m_{15} & \\ \mu_0 & m_{14} & \\ \mu_0 & & \\ \mu_0 & & \end{matrix}\right|, \qquad \begin{aligned} &\mu_1\ge m_{15}\ge|\mu_2|,\\ &m_{15}\ge|m_{14}| \end{aligned} \tag{3.23а}$$

и

$$\beta^- = \left| \begin{array}{lll} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_0 & m_{15} & \\ \mu_0 & m_{14} & \\ \mu_0 & & \\ -\mu_0 & & \end{array} \right|, \qquad \begin{array}{l} \mu_1 \geq m_{15} \geq |\mu_2|, \\ m_{15} \geq |m_{14}|. \end{array} \tag{3.23б}$$

Неравенства (3.23а) и (3.23б) показывают, что размерности множеств $\mathcal{L}\{\Psi^0_{\beta+}\}$ и $\mathcal{L}\{\Psi^0_{\beta-}\}$ совпадают с размерностями неприводимых представлений группы $SO(4)$.

Путем несложных вычислений (точно так же, как и в случае группы $P(1,3)$) убеждаемся, что

а) на множествах $\mathcal{L}\{\Psi^0_{\beta+}\}$ и $\mathcal{L}\{\Psi^0_{\beta-}\}$ реализуются представления $D(\mu_1,\mu_2)$ и $D(\mu_1,-\mu_2)$ группы $SO(4)$;

б) если $\Psi^0_+ \in \mathcal{L}\{\Psi^0_{\beta+}\}$, а $\Psi^0_- \in \mathcal{L}\{\Psi^0_{\beta-}\}$, то

$$\hat{\varepsilon}\Psi^0_\pm = \pm\Psi^0_\pm. \tag{3.24}$$

В силу $P(1,4)$-инвариантности уравнений (3.18) получаем окончательно, что на множестве решений этих уравнений реализуется прямая сумма

$$D^+(\varkappa;\mu_1,\mu_2) \oplus D^-(\varkappa;\mu_1,-\mu_2) \tag{3.25}$$

неприводимых представлений группы $P(1,4)$.

Для завершения доказательства утверждения 2 достаточно лишь указать (см., например, [1]), что числа (μ_1,μ_2) и числа (s,τ), характеризующие неприводимое представление группы $SO(4)$, связаны между собой соотношениями (3.19).

Замечание 1. Если в уравнениях (3.18) выбрать $d = -\mu_0$, то на множестве решений таких уравнений реализуется следующая прямая сумма неприводимых представлений группы $P(1,4)$:

$$D^-(\varkappa;s,\tau) \oplus D^-(\varkappa;\tau,s).$$

Замечание 2. Уравнения (3.18) будут P-, T-, C-инвариантными, как это будет показано в разделе 4, если матрицы S_{AB} имеют вид

$$S_{AB} = \begin{pmatrix} S^{(1)}_{AB} & 0 \\ 0 & S^{(2)}_{AB} \end{pmatrix}, \tag{3.26}$$

где матрицы $S^{(1)}_{AB}$ и $S^{(2)}_{AB}$ реализуют неприводимые представления $D(\mu_0,\mu_1,\mu_2)$ и $D(\mu_0,\mu_1,-\mu_2)$ алгебры $SO(2,4)$. В этом случае на решениях уравнения (3.18) реализуется представление

$$D^+(\varkappa;s,\tau) \oplus D^-(\varkappa;\tau,s) \oplus D^+(\varkappa;\tau,s) \oplus D^+(\varkappa;s,\tau). \tag{3.27}$$

Анализ уравнений (2.10) для произвольной группы $P(1,n)$ может быть проведен точно так же, как и для групп $P(1,3)$ и $P(1,4)$, т.е. можно показать, что *если* *матрицы S_{AB} реализуют неприводимое представление алгебры $SO(2,n)$, задаваемое числами $(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_l)$, и $d=\mu_0$, то на множестве решений уравнений (2.10) реализуется представление*

$$D^+(\varkappa; \mu_1, \ldots, \mu_{l-1}, \mu_l) \oplus D^-(\varkappa; \mu_1, \ldots, \mu_{l-1}, \mu_l) \qquad \textit{при} \quad n = 2l+1; \tag{3.28}$$

или

$$D^+(\varkappa; \mu_1, \ldots, \mu_{l-1}, \mu_l) \oplus D^-(\varkappa; \mu_1, \ldots, \mu_{l-1}, -\mu_l) \qquad \textit{при} \quad n = 2l. \tag{3.29}$$

Мы не приводим здесь доказательства этого утверждения лишь потому, что формулы для операторов S_{AB} слишком громоздки.

В заключение этого раздела сделаем несколько замечаний об уравнениях, на решениях которых реализуется представление класса III группы $P(1,n)$. Если в уравнениях (2.10) провести замену $\varkappa \to i\varkappa$, то такие уравнения остаются инвариантными относительно группы $P(1,n)$, причем

$$P_\mu P^\mu \Psi(t,\boldsymbol{x}) = -\varkappa^2 \Psi(t,\boldsymbol{x}). \tag{3.30}$$

Операторы S_{AB}, как и раньше, реализуют некоторое конечномерное или бесконечномерное представление алгебры $SO(2,n)$ (в зависимости от выбора параметра d). Вводя в M базис Г–Ц, мы можем снова определить операторы S_{AB} формулами Г–Ц, как и в случае класса I (соответствие между операторами Σ_{ij} и S_{AB} удобно выбрать несколько иным). Однако теперь в зависимости от выбора параметра d операторы S_{AB} будут определены в той или иной области Граева. Можно так выбрать параметр d и представление для матриц S_{AB}, что уравнения (2.10) $(c\varkappa \to i\varkappa)$ сужают пространство $\mathcal{L}\{\Psi_\alpha(t,\boldsymbol{x})\}$ к двум подпространствам, в которых реализуются неприводимые унитарные представления класса III группы $P(1,n)$. Детальный анализ уравнений (2.10) для этого класса будет проведен в другой работе.

4. *P*-, *T*-, *C*-свойства уравнении (2.10)

В этом разделе изучим свойства уравнений (2.10) относительно пространственно-временных отражений. Через $P_k^{(1)}$ обозначим оператор пространственной инверсии x_k-й компоненты вектора $\boldsymbol{x}$, определяемый соотношениями

$$P_k^{(1)} \Psi(t, x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = r_k^{(1)} \Psi(t, x_1, \ldots, -x_k, \ldots, x_n), \tag{4.1}$$

$$\begin{gathered} \left[P_k^{(1)}, p_\mu\right]_- = \left[P_k^{(1)}, J_{\mu\nu}\right]_- = 0, \qquad (\mu, \nu \neq k), \\ \left[P_k^{(1)}, p_k\right]_+ = \left[P_k^{(1)}, J_{k\mu}\right]_+ = 0, \qquad \left(P_k^{(1)}\right)^2 \sim 1. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Кроме оператора $P_k^{(1)}$, можно ввести другой оператор пространственной инверсии $P_k^{(2)}$, определяемый соотношениями

$$P_k^{(2)} \Psi(t, x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = r_k^{(2)} \Psi^*(t, x_1, \ldots, -x_k, \ldots, x_n), \tag{4.3}$$

$$\begin{gathered} \left[P_k^{(2)}, p_\mu\right]_+ = \left[P_k^{(2)}, J_{\mu\nu}\right]_+ = 0, \qquad (\mu, \nu \neq k), \\ \left[P_k^{(2)}, p_k\right]_- = \left[P_k^{(2)}, J_{k\mu}\right]_- = 0, \qquad \left(P_k^{(2)}\right)^2 \sim 1. \end{gathered} \tag{4.4}$$

При инверсии времени ($t \to -t$) волновая функция $\Psi(t, \boldsymbol{x})$ также может преобразовываться двумя неэквивалентными способами:

$$T^{(1)}\Psi(t, \boldsymbol{x}) = r_0^{(1)}\Psi(-t, \boldsymbol{x}), \tag{4.5}$$

$$\begin{gathered} \left[T^{(1)}, p_0\right]_+ = \left[T^{(1)}, J_{0k}\right]_+ = 0, \\ \left[T^{(1)}, p_k\right]_- = \left[T^{(1)}, J_{kl}\right]_- = 0, \qquad \left(T^{(1)}\right)^2 \sim 1; \end{gathered} \tag{4.6}$$

и

$$T^{(2)}\Psi(t, \boldsymbol{x}) = r_0^{(2)}\Psi^*(-t, \boldsymbol{x}), \tag{4.7}$$

$$\begin{gathered} \left[T^{(2)}, p_0\right]_- = \left[T^{(2)}, J_{0k}\right]_- = 0, \\ \left[T^{(2)}, p_k\right]_+ = \left[T^{(2)}, J_{kl}\right]_+ = 0, \qquad \left(T^{(2)}\right)^2 \sim 1. \end{gathered} \tag{4.8}$$

Оператор зарядового сопряжения C эквивалентен произведению операторов $P_k^{(1)}P_k^{(2)}$ или $T^{(1)}T^{(2)}$. Через R будем обозначать любой из операторов $P_k^{(1)}$, $P_k^{(2)}$, $T^{(1)}$, $T^{(2)}$.

Уравнения (2.10) будут R-инвариантны, если существуют такие матрицы $r_k^{(1)}$, $r_k^{(2)}$, $r_0^{(1)}$, $r_0^{(2)}$, что соотношения (4.2), (4.4), (4.6) и (4.8) удовлетворяются, если в них сделать замену

$$p_\mu \to \mathcal{P}_\mu = \frac{1}{id}\left(S_{\mu\nu}p^\nu + i\varkappa S_{\mu\, n+1}\right). \tag{4.9}$$

1. Рассмотрим свойства уравнений (2.10) относительно $P_k^{(1)}$-преобразования. Соотношения (4.2) при замене (4.9) будут удовлетворяться, если существует такая матрица $r_k^{(1)}$, что

$$\left[r_k^{(1)}, S_{\mu\, n+1}\right]_- = 0 \quad (\mu \neq k), \qquad \left[r_k^{(1)}, S_{k\, n+1}\right]_+ = 0. \tag{4.10}$$

Ввиду того, что P-, T-, C-свойства уравнений (2.10) зависят от того, четное или нечетное число n, то мы далее отдельно рассматриваем случаи групп $P(1, n = 2l+1)$ и $P(1, n = 2l)$.

Для того чтобы найти матрицу $r_k^{(1)}$, удовлетворяющую соотношениям (4.10), введем следующую систему матриц $\rho_\mu = (\rho_0, \rho_k)$:

$$\rho_0 = Ae^{i\pi S_{0\, n+1}}, \qquad A = e^{-i\pi\mu_0}, \qquad \rho_k = Ae^{\pi S_{k\, n+1}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.11}$$

где матрицы S_{AB}, как и раньше, генераторы неприводимого представления группы $SO(2, n)$.

Используя известную формулу

$$e^{-b}Ke^{B} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[B, K]_n, \tag{4.12}$$

где $[B, K]_n = [B, [B, K]_{n-1}]_-$, $[B, K]_0 = K$, можно доказать следующие свойства матриц ρ_μ:

$$[\rho_\mu, S_{\mu\, n+1}]_- = [\rho_\mu, S_{\sigma\rho}]_- = 0 \qquad (\sigma, \rho \neq \mu), \tag{4.13}$$

$$[\rho_\mu, S_{\sigma\rho}]_+ = 0 \qquad (\sigma = \mu \quad \text{или} \quad \rho = \mu), \tag{4.14}$$

$$[\rho_\mu, S_{\sigma\, n+1}]_+ = 0 \qquad (\sigma \neq \mu), \tag{4.15}$$

$$[\rho_\mu, \rho_\nu]_+ = 0 \qquad (\text{для попуцелых } \mu_0), \tag{4.16}$$

$$[\rho_\mu, \rho_\nu]_- = 0 \qquad (\text{для целых } \mu_0), \tag{4.17}$$

$$\rho_\mu^2 = 1, \qquad \rho_\mu^{-1} = \rho_\mu. \tag{4.18}$$

Матрица $r_k^{(1)}$ со свойствами (4.10) может быть построена из матриц ρ_μ таким способом:

$$r_k^{(1)} = \rho_0\rho_1 \ldots \rho_{k-1}\rho_{k+1} \ldots \rho_n. \tag{4.19}$$

Квадрат этой матрицы $\left(r_k^{(1)}\right)^2 = 1$ (или -1). Это означает, что оператор $\left(P_k^{(1)}\right)^2$ эквивалентен (с точностью до знака) единичному оператору.

Итак, мы пришли к заключению, что уравнение (2.10), инвариантное относительно группы $P(1, n = 2l+1)$, $P_k^{(1)}$-инвариантно. Очевидно, что (2.10) будет также инвариантно относительно преобразования $\boldsymbol{x} \to -\boldsymbol{x}$. Оператор инверсии для такого преобразования имеет вид

$$P^{(1)} = \prod_{k=1}^{n} P_k^{(1)}.$$

В дальнейшем мы будем изучать свойства инвариантности уравнений (2.10) относительно оператора $P_n^{(1)}$, поскольку оператор $P_k^{(1)}$, $(k \neq n)$ может быть представлен как произведение операторов $P_n^{(1)}$ и $e^{i\pi J_{kn}}$. Относительно последнего оператора уравнения (2.10), очевидно, инвариантны.

Рассмотрим теперь случай группы $P(1, n = 2l)$. Для этого случая справедливо следующее

Утверждение 3. *Уравнения (2.10), инвариантные относительно $P(1, n = 2l)$, не инвариантны относительно оператора $P_n^{(1)}$.*

Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что матрицы

$$S'_{AB} = P_n^{(1)} S_{AB} \left(P_n^{(1)}\right)^{-1} = r_n^{(1)} S_{AB} \left(r_n^{(1)}\right)^{-1} \tag{4.20}$$

реализуют представление алгебры $SO(2,n)$, которое неэквивалентно представлению $SO(2,n)$, задаваемое матрицами S_{AB}. Матрицы S'_{AB} с учетом соотношения (4.20) могут быть выражены через матрицы S_{AB} так:

$$S'_{An} = S_{An}, \qquad S'_{AB} = S_{AB} \quad (A, B, \neq n). \tag{4.21}$$

Если представление $SO(2, n = 2l)$, порождаемое матрицами S_{AB}, задается числами $(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{l-1}, \mu_l)$, то представление $SO(2, n = 2l)$, порождаемое матрицами S'_{AB}, задается числами $(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{l-1}, -\mu_l)$. Это факт следует из структуры матрицы $S_{n\,n+1}$. Действительно, в базисе Г–Ц ее можно представить в виде (см. [5])

$$S_{n\,n+1} = \pm(B - B') + D, \tag{4.22}$$

где B, B' — треугольные матрицы с нулями по главной диагонали, D — диагональная матрица. Замена $D \to -D$ в (4.22) влечет за собой замену $\mu_l \to -\mu_l$ (справедливо и обратное утверждение). Поскольку представления $SO(2,n)$, задаваемые числами $(\mu_0, \ldots, \mu_l)$ и $(\mu_0, \ldots, \mu_{l-1}, -\mu_l)$, не эквивалентны, то этим самым и доказано утверждение 3.

Таким образом, уравнения (2.10) в случае группы $P(1, n = 2l)$ $P_n^{(1)}$-неинвариантны. Очевидно, что уравнения (2.10) будут инвариантны относительно оператора $P_n^{(1)}$, если матрицы S_{AB} являются генераторами приводимого представления группы $SO(2,n)$ вида

$$D(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{l-1}, \mu_l) \oplus D(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{l-1}, -\mu_l). \tag{4.23}$$

В этом случае на решениях уравнений (2.10) реализуется следующая прямая сумма

$$\begin{aligned} &D^+(\varkappa; \mu_1, \ldots, \mu_l) \oplus D^-(\varkappa; \mu_1, \ldots, -\mu_l) \oplus \\ &\quad \oplus D^-(\varkappa; \mu_1, \ldots, \mu_l) \oplus D^-(\varkappa; \mu_1, \ldots, -\mu_l) \end{aligned} \tag{4.24}$$

неприводимых представлений группы $P(1, n = 2l)$.

Матричная часть оператора $P_n^{(1)}$ (матрица $r_n^{(1)}$) в случае $n = 2l$ не может быть выражена через матрицы S_{AB}, поскольку такая матрица должна перевести вектор из пространства, где задано представление $D(\mu_0, \ldots, \mu_l)$ в вектор, принадлежащий пространству, где реализуется представление $D(\mu_0, \ldots, -\mu_l)$. Такую матрицу можно найти среди матриц, порождающих представление группы $SO(2, n+1) \supset SO(2,n)$. Это утверждение очевидно, поскольку всегда найдется такое представление группы $SO(2, n+1)$, которое раскладывается в прямую сумму, содержащую представление (4.23) группы $SO(2,n)$.

2. Перейдем теперь к изучению свойств уравнений (2.10) относительно операций $T^{(1)}$, $P_k^{(2)}$, $T^{(2)}$. Свойства этих уравнений относительно оператора $T^{(1)}$ легко устанавливаются, если заметить, что уравнения (2.10) инвариантны относительно $T^{(1)} P_k^{(1)}$-операции. Из этого замечания следует, что

а) в случае $n = 2l + 1$ уравнения (2.10) $T^{(1)}$-инвариантны, если S_{AB} — генераторы неприводимого представления группы $SO(2,n)$. Матрица $r_0^{(1)}$ имеет вид

$$r_0^{(1)} = \prod_{k=1}^{n} \rho_k; \tag{4.25}$$

б) в случае $n = 2l$ уравнения (2.10) $T^{(1)}$-инвариантны, если S_{AB} — генераторы прямой суммы (4.23) представлений группы $SO(2,n)$.

3. Свойства уравнений (2.10) относительно оператора $T^{(2)}$ могут быть изучены точно так же, как и свойства их относительно операторов $P_k^{(1)}$ и $T^{(1)}$. При этом следует только учесть, что всегда можно выбрать матрицы

$$S_{0\,n+1}, \quad S_{1\,n+1}, \quad S_{3\,n+1}, \quad \ldots \tag{4.26}$$

действительными, а матрицы

$$S_{2\,n+1}, \quad S_{4\,n+1}, \quad S_{6\,n+1}, \quad \ldots \tag{4.27}$$

чисто мнимыми.

Чтобы уравнения (2.10) были $T^{(2)}$-инвариантны, матрица $r_0^{(2)}$ должна удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned}
&\left[r_0^{(2)}, S_{0\,n+1}\right]_- = 0, \\
&\left[r_0^{(2)}, S_{\beta\,n+1}\right]_- = 0 \qquad (\beta = 2, 4, 6, \ldots), \\
&\left[r_0^{(2)}, S_{\alpha\,n+1}\right]_+ = 0 \qquad (\alpha = 1, 3, 5, \ldots).
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Проведя анализ соотношений (4.28), приходим к следующему результату: *если матрицы S_{AB} реализуют неприводимое представление алгебры $SO(2,n)$, то уравнения (2.10) $T^{(2)}$-инвариантны за исключением случая группы $P(1,n = 4l+2)$; матрица $r_0^{(2)}$ имеет вид*

$$\begin{aligned}
&r_0^{(2)} = \prod_\alpha \rho_\alpha \qquad \textit{для группы} \quad P(1, n = 4l+3); \\
&r_0^{(2)} = \rho_0 \prod_\beta \rho_\beta \qquad \textit{для группы} \quad P(1, n = 4l+1); \\
&r_0^{(2)} = \prod_\alpha \rho_\alpha \qquad \textit{для группы} \quad P(1, n = 4l).
\end{aligned} \tag{4.29}$$

В случае группы $P(1, n = 4l+2)$ уравнения (2.10) инвариантны относительно оператора $P_k^{(1)} T^{(2)}$. Это означает, что свойства этих уравнении относительно операторов $P_k^{(1)}$ и $T^{(2)}$ совпадают, т.е. уравнения (2.10) инвариантны относительно $T^{(2)}$, если матрицы S_{AB} – генераторы представления (4.23).

Свойства уравнений (2.10) относительно операторов $P_k^{(2)}$ и C легко устанавливаются, поскольку

$$P_k^{(2)} \sim P_k^{(1)} T^{(1)} T^{(2)}, \tag{4.30}$$

$$C \sim T^{(1)} T^{(2)}. \tag{4.31}$$

В таблице (где “нет” означает отсутствие R-инвариантности уравнений (2.10), “да” означает, что уравнения (2.10) R-инвариантны) сведены все свойства уравнений (2.10) относительно операторов P, T, C.

В том частном случае, когда уравнения (2.10) сводятся к уравнению Дирака, приведенные в таблице результаты совпадают с результатами, установленными одним из авторов [6] для уравнения Дирака, инвариантного относительно группы $P(1,n)$. Следует отметить, что R-свойства уравнений (2.10), когда $\varkappa = 0$, могут быть изучены так же, как и в случае $\varkappa \neq 0$. Мы здесь не приводим анализ этого случая, скажем только, что R-свойства такого уравнения совпадают со свойствами уравнений Дирака для $\varkappa = 0$ [6].

Операции	Эквивалентные операции	$n=2l$		$n=2l+1$	
		$l=2r$	$l=2r+1$	$l=2r$	$l=2r+1$
$P_k^{(1)}$	$CP_k^{(2)}$	нет	нет	да	да
$P_k^{(2)}$	$P_k^{(1)}C$	да	нет	да	да
$T^{(1)}$		нет	нет	да	да
$T^{(2)}$	$T^{(1)}C$	да	нет	да	да
C	$T^{(1)}T^{(2)}\sim P_k^{(1)}P_k^{(2)}$	нет	да	да	да
$T^{(1)}P_k^{(1)}$	$T^{(2)}P_k^{(2)}$	да	да	да	да
$T^{(2)}P_k^{(1)}$	$T^{(1)}P_k^{(1)}C$	нет	да	да	да
$CP_k^{(1)}$	$P_k^{(2)}$	да	нет	да	да
$CT^{(1)}$	$T^{(2)}$	да	нет	да	да
$CT^{(2)}$	$T^{(1)}$	нет	нет	да	да
$CT^{(1)}P_k^{(1)}$	$T^{(1)}P_k^{(2)}\sim T^{(2)}P_k^{(1)}$	нет	да	да	да
$CT^{(2)}P_k^{(1)}$	$T^{(1)}P_k^{(1)}\sim T^{(2)}P_k^{(2)}$	да	да	да	да

1. Фущич В.И., *ТМФ*, 1970, **4**, 360; Preprint ITF–70–4, Kiev, 1970.
2. Novozhilov Yu.M., Terentjev I.A., *J. Math. Phys.*, 1968, **9**, 1517.
3. Степановский Ю.П., *Укр. физ. ж.*, 1964, **9**, 1165.
4. Bakri M.M., *J. Math. Phys.*, 1969, **10**, 289.
5. Гельфанд И.М., Цетлин М.Л., *ДАН СССР*, 1960, **71**, 1017.
6. Fushchych W.I., Preprint ITF–69–17, Kiev, 1969.