О релятивистских уравнениях движения без “лишних” компонент

В.И. ФУЩИЧ, А.Л. ГРИЩЕНКО, А.Г. НИКИТИН

On the basis of a definite representation (2.1) for the generators of the proper Poincaré group all the operator functions H (up to unitary equivalence) which the equation (1.1) is invariant under the total Poincaré group (including space-time reflections) are described. For the case of arbitrary spin, the unitary operator connecting the representation (2.1) with the canonical Foldy–Shirokov representation is found. The explicit forms of the coordinate, velocity and spin operators are obtained in the representation (2.1) for arbitrary spin s.

Исходя из определенного представления для генераторов собственной группы Пуанкаре (2.1) описаны все (с точностью до унитарной эквивалентности) операторные функции H, при которых уравнение (1.1) инвариантно относительно полной группы Пуанкаре (включающей пространственно-временные отражения). Найден унитарный оператор для произвольного спина, связывающий представление (2.1) с каноническим представлением Фолди–Широкова. Получены явные виды операторов координаты, скорости и спина в представлении (2.1) для произвольного спина s.

1. Введение

За последнее время появился ряд работ, посвященных задаче нахождения релятивистски-инвариантных уравнений, описывающих свободное движение частицы (и античастицы) с произвольным спином s, волновые функции которых имеют только $2(2s+1)$ компонент. Такая задача может быть сведена к задаче об описании всех тех операторных функций H (гамильтонианов частиц с произвольным спином s), зависящих от операторов импульса и спина частиц, для которых уравнение типа Шредингера

$$i\frac{\partial\Psi(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = H\Psi(t,\boldsymbol{x}) \tag{1.1}$$

инвариантно относительно полной группы Пуанкаре $\widetilde{P}(1,3)$ (включающей пространственно-временные отражения). Другими словами, это означает, что оператор H в (1.1) должен быть таким, чтобы на множестве решений $\{\Psi(t,\boldsymbol{x})\}$ уравнения (1.1) реализовалось неприводимое представление группы $\widetilde{P}(1,3)$.

Вышеприведенная задача решена в [1] и [2, 3] исходя из специфического представления для генераторов собственной группы Пуанкаре $P(1,3)$. Особенностью этого представления является то, что оно связано с каноническим представлением Фолди–Широкова не унитарным (за исключением случая $s = 1/2$), а изометрическим оператором. Это обстоятельство может привести к трудностям, связанным с физической интерпретацией динамических переменных, найденных в [1–5], при введении взаимодействия в уравнение движения вида (1.1).

Теоретическая и математическая физика, 1971, **8**, № 2, С. 192–205.

В настоящей работе исходя из определенного представления для генераторов группы Пуанкаре $\widetilde{P}(1,3)$ (отличного от представления, используемого в [1–3]), которое связано с каноническим представлением Фолди–Широкова унитарным оператором для всех спинов s, решена задача (1.1), т.е. описаны все операторы H (с точностью до унитарной эквивалентности), для которых уравнение (1.1) инвариантно относительно полной группы Пуанкаре $\widetilde{P}(1,3)$.

2. Постановка задачи

Будем исходить из следующего представления для генераторов P_μ, $J_{\mu\nu}$ группы $P(1,3)$:

$$
\begin{aligned}
&P_0 \equiv H, \qquad P_k \equiv p_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad k = 1,2,3,\\
&J_{kl} = x_k p_l - x_l p_k + S_{kl}, \\
&J_{0k} = tp_k - \frac{1}{2}[x_k, H]_+, \qquad [x_k, H]_+ \equiv x_k H + H x_k,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

где H — неизвестная операторная функция, S_{kl} — матрицы размерности $2(2s+1)\times 2(2s+1)$, реализующие прямую сумму двух неприводимых представлений $D(s)$ алгебры $SO(3)$. Операторы P_μ, $J_{\mu\nu}$ эрмитовы относительно скалярного произведения

$$
(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x\ \Psi_1^\dagger(t, \boldsymbol{x})\Psi_2(t, \boldsymbol{x}),
$$

$\dagger$ — операция эрмитова сопряжения.

Представление (2.1) отличается от соответствующего представления в [1]. Только в случае, когда $s = 1/2$, представление (2.1) совпадает с представлением [1]. Такое различие в исходных положениях приводит к результатам, совершенно отличным от результатов работ [1–3].

Операторы пространственного P и временных $T^{(1)}$, $T^{(2)}$ отражений определим обычным образом

$$
\begin{aligned}
&P\Psi(t, \boldsymbol{x}) = r\Psi(t, -\boldsymbol{x}), \qquad P^2 \sim 1,\\
&T^{(1)}\Psi(t, \boldsymbol{x}) = \tau^{(1)}\Psi^*(-t, \boldsymbol{x}), \qquad \left(T^{(1)}\right)^2 \sim 1,\\
&T^{(2)}\Psi(t, \boldsymbol{x}) = \tau^{(2)}\Psi^*(-t, \boldsymbol{x}), \qquad \left(T^{(2)}\right)^2 \sim 1,
\end{aligned}
$$

где матрицу r, не умаляя общности, можно выбрать так:

$$
r = I \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{или} \qquad r = \sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},
$$

1 — $(2s+1)\times(2s+1)$-единичная матрица. Матрицы $\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$ можно выбрать, например, в виде $2(2s+1)\times 2(2s+1)$-матриц Паули σ_1 и σ_2. Для нас в дальнейшем явный вид матриц $\tau^{(1)}$ и $\tau^{(2)}$ несуществен, поэтому мы его не будем детализировать. Оператор зарядового сопряжения эквивалентен ($\sim$) произведению операторов $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$, поэтому мы его не рассматриваем.

Операторы P, $T^{(1)}$, $T^{(2)}$ и генераторы P_μ, $J_{\mu\nu}$ удовлетворяют соотношениям

$$
\begin{aligned}
&[P, H]_- = 0, \qquad [P, P_k]_+ = 0, \qquad [P, J_{kl}]_+ = 0, \qquad [P, J_{0k}]_- = 0,\\
&\left[T^{(1)}, H\right]_- = \left[T^{(1)}, J_{0k}\right]_- = 0, \qquad \left[T^{(1)}, P_k\right]_+ = \left[T^{(1)}, J_{kl}\right]_+ = 0,\\
&\left[T^{(2)}, H\right]_+ = \left[T^{(2)}, J_{0k}\right]_+ = 0, \qquad \left[T^{(2)}, P_k\right]_- = \left[T^{(2)}, J_{kl}\right]_- = 0.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

На множестве решений $\{\Psi(t,\boldsymbol{x})\}$ уравнения (1.1) должно реализоваться неприводимое представление группы $\widetilde{P}(1,3)$, которое, как известно, характеризуется массой m и спином s. Это означает, что

$$H^2 = p^2 + m^2. \tag{2.3}$$

Условие кратности единичному оператору квадрата вектора Паули–Любанского на $\{\Psi(t,\boldsymbol{x}\}$ достигается выбором матриц S_{kl} в виде

$$S_{kl} = \begin{pmatrix} s_n & 0 \\ 0 & s_n \end{pmatrix} = S_n, \qquad k,l,n \text{ — цикл (1,2,3)},$$

где s_n — $(2s+1)\times(2s+1)$-мерные матрицы, реализующие неприводимое представление алгебры $SO(3)$, удовлетворяющие соотношениям

$$[s_k, s_l]_- = i\varepsilon_{kln}s_n.$$

Поскольку уравнение (1.1) по предположению инвариантно относительно группы $\widetilde{P}(1,3)$, то оператор H должен быть таким, чтобы удовлетворялись следующие соотношения [4, 5]:

$$[H,P_k]_- = [H,J_{kl}]_- = 0, \qquad [H,J_{0k}]_- = ip_k, \qquad [p_n,J_{0k}]_- = i\delta_{nk}H,$$

$$[J_{kl},J_{0n}]_- = i\delta_{kn}J_{0l} - i\delta_{nl}J_{0k}, \tag{2.4}$$

$$[J_{0k},J_{0n}]_- = -iJ_{kn}, \tag{2.5}$$

$$[P,H]_- = [T^{(1)},H]_- = 0, \qquad [T^{(2)},H]_+ = 0. \tag{2.6}$$

Таким образом, задача о нахождении операторной функции H, при которой уравнение (1.1) будет инвариантно относительно группы $\widetilde{P}(1,3)$, сводится к решению системы операторных соотношений (2.4)–(2.6) при условии (2.3).

3. Решение системы (2.4)–(2.6)

Для решения соотношений (2.4)–(2.6) используем разложение операторов, входящих в (2.4)–(2.6), по полной системе операторов ортогонального проектирования, что позволяет свести нашу задачу к решению функциональных уравнений.

1. Рассмотрим следующую систему операторов проектирования:

$$\Lambda_{s_3} = \prod_{\substack{s'_3 \neq -s \\ s'_3 \neq s_3}}^{s} \frac{S_p - s'_3}{s_3 - s'_3}, \qquad -s \leq s_3 \leq s, \tag{3.1}$$

где $S_p = S_k p_k/p$, $p = |\boldsymbol{p}|$. Нетрудно убедиться (более подробно об операторах проектирования см. [2]), что совокупность операторов Λ_{s_3}, действительно является совокупностью операторов ортогонального проектирования на подпространства, являющиеся собственными подпространствами оператора S_p с собственными значениями s_3 (спиральность частицы), т.е.

$$\Lambda_{s_3}\Lambda_{s'_3} = \delta_{s_3 s'_3}\Lambda_{s'_3}, \qquad \sum_{s_3=-s}^{s} \Lambda_{s_3} = I,$$

$$S_p^n = \sum_{s_3=-s}^{s} (s_3)^n \Lambda_{s_3}, \qquad n = 0,1,\ldots,2s.$$

Иногда удобно пользоваться не системой операторов Λ_{s_3}, а системой операторов B_{s_3}, C_{s_3}, определенных ниже:

$$B_{s_3} = \Lambda_{s_3} + \Lambda_{-s_3}, \qquad C_{s_3} = \Lambda_{s_3} - \Lambda_{-s_3}, \qquad 1/2 \le s_3 \le s,$$
$$B_0 \equiv \Lambda_0, \qquad \sum_{s_3 \ge 0} B_{s_3} = I.$$

2. Условия (2.6) будут удовлетворяться, если H имеет вид

$$H_s = \sum_{s_3=-s}^{s} (\sigma_1 g_{s_3}(p) + \sigma_3 f_{s_3}(p))\Lambda_{s_3}, \tag{3.2}$$

где неизвестные функции g_{s_3}, f_{s_3} (зависящие только от p) должны иметь следующие свойства:

если $r = I$, то

$$g_{-s_3} = g_{s_3}, \qquad f_{-s_3} = f_{s_3}, \qquad 0 \le s_3 \le s; \tag{3.3}$$

если $r = \sigma_3$, то имеются два случая:

$$g_{-s_3} = -g_{s_3}, \qquad f_{-s_3} = f_{s_3}, \qquad g_0 = 0, \qquad f_0 = \pm E, \qquad 1/2 \le s_3 \le s, \tag{3.4}$$

$$g_{-s_3} = -g_{s_3}, \qquad f_{-s_3} = -f_{s_3}, \qquad g_0 = f_0 = 0, \qquad 1/2 \le s_3 \le s. \tag{3.5}$$

Следует отметить, что соотношения (2.6) будут удовлетворяться также, если в (3.2) сделать замены

$$\sigma_3 \to \sigma_2 \qquad \text{или} \qquad \sigma_1 \to \sigma_2 \qquad \text{или} \qquad \sigma_1 \leftrightarrows \sigma_3.$$

Все операторы H_s, получающиеся при такой замене, унитарно эквивалентны (3.2), поэтому мы их не будем рассматривать в дальнейшем.

Условие (2.3) накладывает на функции g_{s_3}, f_{s_3} дополнительное ограничение

$$f_{s_3}^2 + g_{s_3}^2 = E^2 = p^2 + m^2, \qquad -s \le s_3 \le s. \tag{3.6}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что соотношения (2.4) с оператором H_s в форме (3.2) удовлетворяются, если имеет место (3.6). Таким образом, осталось рассмотреть соотношение (2.5), которое совместно с (3.3)–(3.5) и определяет окончательную структуру оператора H_s, т.е. явный вид коэффициентных функций g_{s_3}, f_{s_3} в (3.2).

Соотношения (2.5) с учетом представления (2.1) можно записать в виде

$$\frac{1}{4}\,[[x_k, H_s]_-, [x_l, H_s]_-]_- = -iS_n, \qquad k, l, n \text{ — цикл } (1,2,3). \tag{3.7}$$

Умножая (3.7) на p_n, суммируя по n $(n = 1, 2, 3)$ и используя структуру оператора J_{kl}, $k \ne l$ (см. (2.1)), получаем

$$\boldsymbol{S}[\boldsymbol{x}, H_s]_-\, H_s = 3ipS_p = 3ip \sum_{s_3=-s} s_3\Lambda_{s_3}. \tag{3.8}$$

Подставляя (3.2) в (3.8), используя при этом (3.6) и коммутационные соотношения (Д.1), получаем уравнения для коэффициентных функций

$$\sum_{s_3=-s}^{s}\left(g_{s_3}g_{s_3'}+f_{s_3}f_{s_3'}\right)\left[-s_3'a_{s_3s_3'}+d_{s_3s_3'}\left(s(s+1)-(s_3')^2\right)\right]=2p^2s_3',\quad -s+1\le s_3'\le s-1, \tag{3.9}$$

$$\sum_{s_3=-s}^{s}(g_{s_3}g_s+f_{s_3}f_s)d_{s_3s}=2p^2, \tag{3.10}$$

$$\sum_{s_3=-s}^{s}(g_{s_3}g_{-s}+f_{s_3}f_{-s})d_{s_3-s}=-2p^2. \tag{3.11}$$

Учитывая численные значения коэффициентов $d_{s_3s_3'}$, приведенных в дополнении, а также (3.6), (3.10), (3.11), получаем формулу

$$f_{\pm s}f_{\pm(s-1)}+g_{\pm s}g_{\pm(s-1)}=m^2-p^2. \tag{3.12}$$

Записывая уравнение (3.9) для $s_3'=s-1$, $s-2$, $s-3$ и т.д. и используя при этом формулы типа (3.12) для $s_3=s$, $s-1$, $s-2$ и т.д. по индукции получаем следующую рекуррентную формулу:

$$f_{s_3}f_{s_3-1}+g_{s_3}g_{s_3-1}=m^2-p^2,\qquad -s+1\le s_3\le s. \tag{3.13}$$

Из (3.13) совместно с (3.6) следует, что для каждого конкретного s_3 имеют место формулы

$$f_{s_3}=\frac{m^2-p^2}{E^2}f_{s_3-1}+\frac{2mp}{E^2}g_{s_3-1},\quad g_{s_3}=\frac{m^2-p^2}{E^2}g_{s_3-1}-\frac{2mp}{E^2}f_{s_3-1},\quad -s+1\le s_3\le s; \tag{3.14}$$

$$f_{s_3}=\frac{m^2-p^2}{E^2}f_{s_3-1}-\frac{2mp}{E^2}g_{s_3-1},\quad g_{s_3}=\frac{m^2-p^2}{E^2}g_{s_3-1}+\frac{2mp}{E^2}f_{s_3-1},\quad -s+1\le s_3\le s; \tag{3.15}$$

Итак, рекуррентные формулы (3.14), (3.15) совместно с условиями (3.3)–(3.5) дают возможность найти все коэффициентные функции f_{s_3}, g_{s_3} оператора H_s в (3.2), если известна хотя бы одна функция из набора f_{s_3}, $-s\le s_3\le s$ (или g_{s_3}). Следовательно, система соотношений (2.4)–(2.6) будет удовлетворяться, если H_s имеет вид (3.2), а f_{s_3}, g_{s_3} удовлетворяют условиям (3.14), (3.15), (3.3)–(3.5).

Этим самым описаны все возможные операторные функции H_s, при которых уравнение (1.1) будет инвариантно относительно полной группы Пуанкаре $\widetilde{P}(1,3)$.

Замечание 1. Формулы (3.13)–(3.15) справедливы и в том случае, когда $m=0$.

Замечание 2. Класс операторов H_s с функциями f_{s_3}, g_{s_3}, удовлетворяющими условиям (3.5), описывает частицы с нулевой массой ($m=0$) полуцелым спином s, поскольку условия (3.6) и (3.13) удовлетворяются только в этом случае. При этом формулы (3.14) и (3.15) совпадают и определяют f_{s_3}, g_{s_3} с точностью до произвольной функции.

Замечание 3. Класс операторов H_s с функциями f_{s_3}, g_{s_3}, удовлетворяющими (3.3), описывает частицы с целым спином, так как условия (3.6) и (3.13) совместны только для целых s. При этом формулы (3.14), (3.15) определяют H_s с точностью до произвольной функции.

Замечание 4. Класс операторов H_s с функциями f_{s_3}, g_{s_3}, удовлетворяющими условиям (3.4), описывает частицы как целого, так и полуцелого спина. В этом случае коэффициентные функции f_{s_3}, g_{s_3} определяются по формулам (3.14) и (3.15) однозначно как для целых, так и полуцелых спинов, поскольку

$$g_0 = 0, \qquad f_0 = \pm E \qquad \text{для целых} \quad s, \tag{3.16}$$

$$g_{1/2} = \pm p, \qquad f_{1/2} = \pm m \qquad \text{для полуцелых} \quad s. \tag{3.17}$$

Последнее соотношение вытекает из условий (3.6) и (3.13).

Все сказанное в замечаниях 2, 3, 4 получено на основе исследования совместности условий (3.3)–(3.6) и (3.13) для $s_3 = 0, 1/2$.

Оператор (3.2) полезно записать в виде такого рекуррентного соотношения:

$$H_s = H_{s-1} = D(s), \tag{3.18}$$

где

$$D(s) = \sigma_1(g_s\Lambda_s + g_{-s}\Lambda_{-s}) + \sigma_3(f_s\Lambda_s + f_{-s}\Lambda_{-s}).$$

Это соотношение дает возможность по гамильтониану для спина $s-1$ найти гамильтониан для спина s (и наоборот). Конечно, оператор H_{s-1} должен быть определен в том же самом пространстве (размерности $2(2s+1)$ по спиновым индексам), что и оператор H_s, хотя на самом деле он задан в пространстве размерности $2(2s-1)$. Оператор H_{s-1} в пространстве размерности $2(2s+1)$ имеет тот же вид, что и в пространстве размерности $2(2s-1)$, за исключением того, что матрицы S_k имеют уже размерность $2(2s+1) \times 2(2s+1)$. Из (3.18) видно, что гамильтониан для сколь угодно высокого спина полностью определяется гамильтонианом для нижайших спинов $s = 1/2$, $s = 1$.

Формула (3.18) может оказаться полезной при введении взаимодействия в уравнение (1.1) для $s > 1/2$.

4. Примеры операторов H_s

В этом разделе по вышеизложенной методике будут найдены наиболее простые операторы H_s $(m \neq 0)$, коэффициентные функции которых удовлетворяют условиям (3.4). Кроме того, для $m = 0$ будут найдены все возможные (в рамках представления (2.1)) операторы H_s, удовлетворяющие соотношениям (2.4)–(2.6).

1. Рекуррентные формулы (3.14), (3.15) равноправны, поэтому их можно употреблять в любом порядке, причем различный порядок чередования этих формул дает различные виды операторов H_s. Это обстоятельство приводит к тому, что число возможных операторов H_s с увеличением спина s возрастает.

Прежде чем переходить к конкретным вычислениям операторов H_s, отметим, что формулы (3.14) и (3.15) справедливы как для $s_3 \geq 0$, так и для $s_3 < 0$. Однако для конкретных вычислений удобно использовать их только для $s_3 > 0$. Коэффициентные функции f_{s_3}, g_{s_3}, для $s_3 < 0$ находятся тогда по (3.4).

Согласно сказанному в разделе 3 для определения функций f_{s_3}, g_{s_3} по формулам (3.14), (3.15) достаточно знать какую-либо одну функцию из набора f_{s_3}, $-s \leq s_3 \leq s$ (или g_{s_3}).

Рассмотрим случай полуцелого спина, когда (см. (3.17))

$$f_{1/2} = m, \qquad g_{1/2} = p.$$

Для нахождения функций $f_{1/2}$, $g_{1/2}$ можно, вообще говоря, воспользоваться как формулой (3.14), так и (3.15). Воспользовавшись ради конкретности формулой (3.14), получаем $f_{3/2} = m$, $g_{3/2} = -p$. Согласно условию (3.4) имеем $f_{-3/2} = m$, $g_{-3/2} = p$.

Для нахождения $f_{5/2}$, $g_{5/2}$ можно также воспользоваться как формулой (3.14), так и (3.15). Используя формулу (3.15), находим $f_{5/2} = m$, $g_{5/2} = p$. Согласно условию (3.4) имеем $f_{-5/2} = m$, $g_{-5/2} = -p$.

Продолжая этот процесс вычисления функций f_{s_3}, g_{s_3} для $s_3 = 7/2$, $s_3 = 9/2$, $s_3 = 11/2$ и т.д., т.е. поочередно используя формулы (3.14) для $s_3 = 7/2$, (3.15) для $s_3 = 9/2$, (3.14) для $s_3 = 11/2$ и т.д., получаем

$$H_s = \sigma_3 m + \sigma_1 p \sum_{s_3 \geq 1/2}^{s} (-1)^{s_3 - \frac{1}{2}} C_{s_3}. \tag{4.1}$$

Если исходные функции имеют вид $f_{1/2} = m$, $g_{1/2} = -p$ (см. (3.17)), то для вычисления $f_{3/2}$, $g_{3/2}$ применим (3.15), а для $f_{5/2}$, $g_{5/2}$ применим (3.14), для $f_{7/2}$, $g_{7/2}$ снова применим (3.15) и т.д. (чередуя формулы (3.14) и (3.15) для $s_3 = 9/2$, $s_3 = 11/2$ и т.д.). Эти вычисления приводят к

$$H_s = \sigma_3 m - \sigma_1 p \sum_{s_3 \geq 1/2}^{s} (-1)^{s_3 - \frac{1}{2}} C_{s_3}. \tag{4.2}$$

Если исходные функции имеют вид $f_{1/2} = -m$, $g_{1/2} = \pm p$ (см. (3.17)), то аналогичные вычисления приводят к таким операторам:

$$H_s = -\sigma_3 m \pm \sigma_1 p \sum_{s_3 \geq 1/2}^{s} (-1)^{s_3 - \frac{1}{2}} C_{s_3}. \tag{4.3}$$

Подобным же способом вычисляются коэффициентные функции f_{s_3}, g_{s_3} для целых спинов. Если $f_0 = E$, $g_0 = 0$ (см. (3.16)), то гамильтониан H_s имеет вид

$$H_s = \sigma_3 \left(E - \frac{2p^2}{E} \sum_{n=0}^{N} B_{2n+1} \right) + \sigma_1 \frac{2mp}{E} \sum_{n=0}^{N} C_{2n+1}, \tag{4.4}$$

где B_{2n+1}, C_{2n+1} — операторы, определенные в разделе 3,

$$N = \begin{cases} \dfrac{s-1}{2}, & \text{если } s \text{ нечетное}, \\ \dfrac{s}{2} - 1, & \text{если } s \text{ четное}. \end{cases} \tag{4.5}$$

Если взять $f_0 = -E$, $g_0 = 0$, то точно таким же способом получим оператор H_s отличающийся от (4.4) только знаком.

Замечание 1. Оператор H_s в (4.1) для $s = 1/2$ совпадает с гамильтонианом Дирака. Оператор H_s в (4.4) для $s = 1$ совпадает с гамильтонианом Йордана–Мукунды [7], полученным совершенно другим методом.

Замечание 2. Операторы H_s, имеющие вид (4.1)–(4.4), получены при определенном правиле использования (чередования) формул (3.14), (3.15). Если эти формулы использовать в ином порядке, то мы будем получать более сложные выражения для операторов H_s, которые трудно записать в компактном виде для произвольного спина s. Например, если пользоваться формулой (3.15) для вычислений функций f_{s_3}, g_{s_3}, но не использовать при этом (3.14), то для $s = 3/2$ при тех же $f_{1/2}$, $g_{1/2}$ (см. (3.17)) получаем

$$H_{3/2} = \pm\left\{\sigma_3 m\left(1 - \frac{4p^2}{E^2}B_{3/2}\right) \pm \sigma_1 p\left(C_{1/2} + \frac{3m^2 - p^2}{E^2}C_{3/2}\right)\right\}. \tag{4.6}$$

Если $s = 2$ и $f_0 = E$, то вычисляя f_2, g_2 по формулам (3.15), получаем

$$H_2 = \sigma_3\left(E - \frac{2p^2}{E}B_1 - \frac{8m^2p^2}{E^3}B_2\right) + \sigma_1\frac{2mp}{E}\left(C_1 + 2\frac{m^2 - p^2}{E^2}C_2\right). \tag{4.7}$$

Если $f_0 = -E$, то мы получим H_2, отличающийся от (4.7) только общим знаком.

Итак, операторы H_s, задаваемые формулами (4.1)–(4.7), удовлетворяют соотношениями (2.4)–(2.6), а уравнения (1.1) с такими H_s описывают частицу (и античастицу) с целым и полуцелым спином.

Замечание 3. Из приведенного следует, что явный вид операторов H_s для данного спина s зависит не только от заданных начальных функций (типа $f_{1/2}$, $g_{1/2}$, f_0, g_0), но и от порядка использования формул (3.14), (3.15). Число возможных (допускаемых соотношениями (2.4)–(2.6)) операторов H_s увеличивается с возрастанием спина частицы, что связано с увеличением возможностей использования формул (3.14), (3.15) в различном порядке.

Замечание 4. Несмотря на то, что явные виды гамильтонианов для одного и того же спина s имеют различную структуру, все они унитарно эквивалентны в случае свободной теории. При этом следует подчеркнуть, что с физической точки зрения они неэквивалентны в том смысле, что введение взаимодействия, например, по правилу $p_k \to p_k - eA_k$ приведет к различным результатам. Вопрос о введении взаимодействия в уравнение (1.1) с найденными операторами H_s будет рассмотрен в следующей работе.

2. В том случае, когда масса частицы равна нулю ($m = 0$), формулы (3.14), (3.15) совпадают и принимают вид

$$f_{s_3} = -f_{s_3-1}, \qquad g_{s_3} = -g_{s_3-1}, \qquad -s+1 \le s_3 \le s. \tag{4.8}$$

Если воспользоваться формулами (3.16), (4.8) для $m = 0$, то для целых спинов получаем

$$H_s = \pm\sigma_3 p\sum_{s_3=-s}^{s}(-1)^{s_3}\Lambda_{s_3} = \pm\sigma_3 p\sum_{s_3\ge 0}^{s}(-1)^{s_3}B_{s_3}. \tag{4.9}$$

Для полуцелых спинов условия (3.17) для $m = 0$ и (4.8) приводят к следующему результату:

$$H_s = \pm\sigma_1 p \sum_{s_3=-s}^{s} (-1)^{s_3-\frac{1}{2}} \Lambda_{s_3} = \pm\sigma_1 p \sum_{s_3\geq\frac{1}{2}}^{s} (-1)^{s_3-\frac{1}{2}} C_{s_3}. \tag{4.10}$$

Оператор (4.10) для $m = 1/2$ совпадает с гамильтонианом Чини–Тушека в ультрарелятивистском пределе.

Формулы (4.8) справедливы и в том случае, когда коэффициентные функции f_{s_3}, g_{s_3} удовлетворяют условиям (3.3), (3.5) (для $m = 0$).

Если воспользоваться условием (3.3) и замечанием 2 раздела 3, то из (4.8) получаем

$$H_s = \sum_{s_3\geq 0}^{s} (-1)^{s_3} (\sigma_3 f_0 + \sigma_1 g_0) B_{s_3}, \qquad g_0^2 + f_0^2 = p^2. \tag{4.11}$$

Если воспользоваться условием (3.5) и замеченном 3 раздела 3, то из (4.8) получаем

$$H_s = \sum_{s_3\geq\frac{1}{2}}^{s} (-1)^{s_3-\frac{1}{2}} (\sigma_3 f_{1/2} + \sigma_1 g_{1/2}) C_{s_3}, \qquad f_{1/2}^2 + g_{1/2}^2 = p^2. \tag{4.12}$$

Отметим, что операторы H_s в (4.11), (4.12) определены с точностью до произвольной функции f_0 (или g_0) для целого спина s и $f_{1/2}$ (или $g_{1/2}$ для полуцелого s, поскольку требуется лишь выполнение условия

$$f_{s_3}^2 + g_{s_3}^2 = p^2, \qquad s_3 = 0, 1/2.$$

Волновая функция в уравнении (1.1) имеет $2(2s+1)$ компонент. Известно, что волновая функция частицы (античастицы) с нулевой массой должна иметь только две компоненты, соответствующих значению проекции спина $s_3 = s$ и $s_3 = -s$. Это означает, что на волновую функцию, удовлетворяющую уравнению (1.1) с операторами H_s вида (4.9)–(4.12), следует наложить дополнительные релятивистски-инвариантные условия, выделяющие только две физически реализуемые компоненты. Эти условия имеют вид:

$$\left\{I - \frac{1}{2}\left(B_s \pm \frac{H_s}{p} C_s\right)\right\}\Psi(t,\boldsymbol{x}) = 0, \quad B_{s_3}\Psi(t,\boldsymbol{x}) = 0, \quad 0 \leq s_3 \leq s-1, \tag{4.13}$$

или

$$\left\{I - \frac{1}{2}\left(B_s \pm C_s\right)\right\}\Psi(t,\boldsymbol{x}) = 0, \quad B_{s_3}\Psi(t,\boldsymbol{x}) = 0, \quad 0 \leq s_3 \leq s-1, \tag{4.14}$$

или

$$\left\{I - \frac{1}{2}\left(I \pm \frac{H_s}{p}\right) B_s\right\}\Psi(t,\boldsymbol{x}) = 0, \quad B_{s_3}\Psi(t,\boldsymbol{x}) = 0, \quad 0 \leq s_3 \leq s-1. \tag{4.15}$$

Учитывая (3.1), а также коммутационные соотношения (2.2), приходим к следующему результату:

1) условия (4.13) $T^{(1)}$-, $CP^{(k)}$-инвариантны ($k = 1, 2, 3$), но C-, $T^{(2)}$-неинвариантны;
2) условия (4.14) C-, $T^{(1)}$-, $T^{(2)}$-инвариантны, но $P^{(k)}$-неинвариантны;
3) условия (4.15) $T^{(1)}$-, $P^{(k)}$-инвариантны, но C-, $T^{(2)}$-неинвариантны.

Таким образом, уравнение (1.1) с оператором H_s вида (4.9)–(4.12) и одним из дополнительных условий (4.13)–(4.15) инвариантно относительно собственной группы Пуанкаре $P(1,3)$, но только частично инвариантно относительно $P^{(k)}$-, $T^{(i)}$-, C-преобразований. В формулах (4.13)–(4,15) нужно брать один знак $+$ или $-$.

Для спина $s = 1/2$ уравнение (1.1) с дополнительным условием (4.13) эквивалентно хорошо известному двухкомпонентному уравнению Вейля для нейтрино.

Для спина $s = 1$ уравнение (1.1) с дополнительным условием (4.15) эквивалентно уравнениям Максвелла в вакууме.

5. Переход к каноническому представлению

Генераторы P_μ, $J_{\mu\nu}$ группы $P(1,3)$ в каноническом представлении Фолди–Широкова имеют вид

$$\begin{aligned} &P_0^c = H^c = \sigma_3 E, \qquad P_k^c = p_k, \qquad k = 1, 2, 3, \\ &J_{kl}^c = x_k p_l - x_l p_k + S_{kl}, \qquad J_{0k}^c = tp_k - \frac{1}{2}[x_k, H^c]_+ - \sigma_3 \frac{S_{kr} p_r}{E + m}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

В этом представлении уравнение типа (1.1), инвариантное относительно полной группы Пуанкаре $\widetilde{P}(1,3)$, имеет вид

$$i\frac{\partial \Phi(t, \boldsymbol{x})}{\partial t} = H^c \Phi(t, \boldsymbol{x}), \tag{5.2}$$

где $\Phi(t, \boldsymbol{x})$ — $2(2s+1)$-компонентная волновая функция. Поскольку на множестве решений $\{\Phi(t, \boldsymbol{x})\}$ уравнения (5.2) реализуется неприводимое представление группы $\widetilde{P}(1,3)$, то очевидно, что между волновыми функциями Ψ и Φ должна существовать связь

$$\Phi(t, \boldsymbol{x}) = U \Psi(t, \boldsymbol{x}),$$

где U — некоторый унитарный оператор, который будет определен ниже.

Из сказанного ясно, что задача, которая была нами решена в разделе 3, эквивалентна задаче нахождения (описания) всех тех унитарных операторов U, для которых алгебра (5.1) переходит в алгебру (2.1). Для спина $s = 1/2$, 1 такие операторы были найдены в [6, 7].

В этом разделе описан класс операторов U для произвольного спина и найдены выражения для операторов координаты X_k, $k = 1, 2, 3$, скорости $\dot{X}_k$, $k = 1, 2, 3$, спина Σ_{kl} и знака энергии $\hat{\varepsilon}$.

1. Оператор U будем искать в виде

$$U_s = \sum_{s_3=-s}^{s} (a_{s_3} + i\sigma_2 b_{s_3}) \Lambda_{s_3}, \tag{5.3}$$

где $a_{s_3}(p)$, $b_{s_3}(p)$ — действительные функции от p. Из условия унитарности $U_s U_s^\dagger = I$ следует, что

$$a_{s_3}^2 + b_{s_3}^2 = 1, \qquad -s \le s_3 \le s. \tag{5.4}$$

Генераторы (5.1) связаны с генераторами (2.1) соотношениями

$$J_{kl} = U_s^\dagger J_{kl}^c U_s = J_{kl}^c, \qquad P_k = P_k^c, \qquad H_s = U_s^\dagger H^c U_s, \tag{5.5}$$

$$J_{0k} = U_s^\dagger J_{0k}^c U_s \qquad \text{или} \qquad J_{0k}^c = U_s J_{0k} U_s^\dagger. \tag{5.6}$$

Из (5.5), используя явные выражения для H^c и H_s (см. (3.2), (5.1)), получаем

$$f_{s_3} = E\left(a_{s_3}^2 - b_{s_3}^2\right), \tag{5.7}$$

$$g_{s_3} = 2E a_{s_3} b_{s_3}, \qquad -s \le s_3 \le s. \tag{5.8}$$

Используя явный вид операторов J_{0k}, J_{0k}^c (см. (2.1), (5.1)) и соотношение (5.6), получаем

$$\left[[U_s, x_k]_- U_s^\dagger, H^c\right]_+ = 2\sigma_3 \frac{S_{kr} p_r}{E+m}. \tag{5.9}$$

С другой стороны, учитывая (5.3), (5.4), находим

$$\left[[U_s, x_k]_- U_s^\dagger, H^c\right]_+ = 2\sigma_3 E \sum_{s_3, s_3''=-s}^{s} \left(a_{s_3'} a_{s_3} + b_{s_3'} b_{s_3}\right) [\Lambda_{s_3}, x_k]_- \Lambda_{s_3'}. \tag{5.10}$$

Из (5.9) и (5.10) с учетом формул (Д.1), (Д.2) следуют такие соотношения:

$$\sum_{s_3=-s}^{s} (a_{s_3} a_s + b_{s_3} b_s) d_{s_3 s} = \frac{E-m}{E}, \tag{5.11}$$

$$\sum_{s_3=-s}^{s} (a_{s_3} a_{-s} + b_{s_3} b_{-s}) d_{s_3 -s} = \frac{m-E}{E}, \tag{5.12}$$

$$\sum_{s_3=-s}^{s} (a_{s_3} a_{s_3'} + b_{s_3} b_{s_3'}) d_{s_3 s_3'} = \frac{m-E}{E}, \qquad -s+1 \le s_3' \le s. \tag{5.13}$$

Используя численные значения коэффициентов $d_{s_3 s_3'}$ (см. (Д.3)), приводим соотношения (5.11), (5.12) к виду

$$a_{\pm s} a_{\pm(s-1)} + b_{\pm s} b_{\pm(s-1)} = m/E. \tag{5.14}$$

Записывая (5.13) для $s_3' = s-1$, $s-2$, $s-3$, и т.д. и используя при этом формулы типа (5.14) для $s_3 = s$, $s-1$, $s-2$, и т.д., мы по индукции доказываем следующие соотношения (см. доказательство формулы (3.13)):

$$a_{s_3} a_{s_3-1} + b_{s_3} b_{s_3-1} = m/E, \qquad -s+1 \le s_3 \le s. \tag{5.15}$$

Из совместности соотношений (5.4) и (5.15) следуют такие рекуррентные формулы:

$$a_{s_3} = \frac{m}{E} a_{s_3-1} + \frac{p}{E} b_{s_3-1}, \quad b_{s_3} = \frac{m}{E} b_{s_3-1} - \frac{p}{E} a_{s_3-1}, \quad -s+1 \le s_3 \le s; \tag{5.16}$$

$$a_{s_3} = \frac{m}{E} a_{s_3-1} - \frac{p}{E} b_{s_3-1}, \quad b_{s_3} = \frac{m}{E} b_{s_3-1} + \frac{p}{E} a_{s_3-1}, \quad -s+1 \le s_3 \le s. \tag{5.17}$$

Формулы (5.4), (5.16), (5.17) определяют все возможные функции a_{s_3}, b_{s_3}, если известна хотя бы одна функция из набора a_{s_3}, $-s \le s_3 \le s$ (или b_{s_3}). Выбирать эту функцию a_{s_3} (или b_{s_3}), например, для $s_3 = 0, 1/2$, необходимо так, чтобы выполнялись соотношения (3.3)–(3.6), (5.7), (5.8), (5.16), (5.17).

Таким образом, формулы (5.4), (5.7), (5.8), (5.16), (5.17) совместно с условиями (3.3)–(3.5), взятыми для какого-либо одного $|s_3|$, дают решение нашей задачи, т.е. с помощью этих формул описаны все унитарные операторы U_s (см. (5.3)), переводящие алгебру (5.1) в (2.1).

Выбирая, например, исходные функции a_{s_3}, b_{s_3} в виде

$$a_{1/2} = a_{-1/2} = \frac{E+m}{\sqrt{2E(E+m)}}, \qquad b_{1/2} = -b_{-1/2} = \frac{p}{\sqrt{2E(E+m)}}$$

для полуцелых s, и $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ для целых s, по формулам (5.16), (5.17) находим такие операторы U_s:

$$U_s = \frac{E + \sigma_3 H_s}{\sqrt{2E(E+m)}} \qquad \text{для полуцелых } s, \tag{5.18}$$

$$U_s = 1 + \frac{m-E}{E}\sum_{n=0}^{N} B_{2n+1} + i\sigma_2 \frac{p}{E}\sum_{n=0}^{N} C_{2n+1} \qquad \text{для целых } s, \tag{5.19}$$

где число N определено в (4.5).

Оператор (5.18) переводит H^c в оператор (4.1). Оператор (5.19) переводит H^c в оператор (4.4). Для $s = 1/2$ оператор (5.18) совпадает с оператором Фолди–Воутхойзена.

Ради полноты изложения отметим, что если задан оператор H_s в представлении (2.1) (а значит, заданы все f_{s_3}, g_{s_3}), то коэффициентные функции a_{s_3}, b_{s_3} определяются через f_{s_3}, g_{s_3} с помощью формул (5.8) и (5.20), т.е.

$$a_{s_3} = \pm\sqrt{\frac{E+f_{s_3}}{2E}}, \qquad b_{s_3} = \sqrt{\frac{E-f_{s_3}}{2E}}, \qquad -s \le s_3 \le s. \tag{5.20}$$

Формулы (5.20) являются решениями системы (5.4) и (5.7).

Для того чтобы унитарный оператор U_s (см. (5.3)) с коэффициентными функциями (5.20), удовлетворяющими (5.7), (5.8), переводил алгебру (2.1) в (5.1), необходимо еще, чтобы a_{s_3}, b_{s_3} удовлетворяли (5.15) (а следовательно, и (5.16), (5.17)).

2. Операторы координаты X_k, скорости $\dot{X}_k$, спина Σ_{kl}, знака энергии $\hat{\varepsilon}$ в представлении (2.1) имеют следующий вид:

$$X_k = x_k + \frac{S_{kr}p_r}{E(E+m)} + \sigma_2 \left\{ -i\frac{S_{kr}p_r}{p^2} \sum_{s'_3=-s+1}^{s-1} \Lambda_{s'_3} \sum_{s_3=-s}^{s} \left(a_{s_3}b_{s'_3} - a_{s'_3}b_{s_3}\right) a_{s_3 s'_3} + \right.$$

$$+\sum_{s'_3,s_3=-s}^{s}\left(\frac{S_{nl}}{p}-\frac{p_k}{p^2}s'_3\right)\left(a_{s_3}b_{s'_3}-a_{s'_3}b_{s_3}\right)d_{s_3s'_3}\Lambda_{s'_3}\Bigg\}-$$

$$-\sigma_2\frac{p_k}{p}\sum_{s_3=-s}^{s}\left(a_{s_3}\frac{\partial b_{s_3}}{\partial p}-\frac{\partial a_{s_3}}{\partial p}b_{s_3}\right)\Lambda_{s_3},\qquad k,n,l \text{ — цикл (1,2,3);}$$

$$\Sigma_{kn}=S_{kn}+\frac{pp_lS_p-S_{kn}p^2}{E(E+m)}+\sigma_2\frac{S_{lr}p_r}{p}\sum_{s'_3=-s}^{s}\Lambda_{s'_3}\sum_{s_3=-s}^{s}d_{s_3s'_3}\left(a_{s_3}b_{s'_3}-b_{s_3}a_{s'_3}\right)-$$

$$-i\sigma_2\sum_{s'_3=-s+1}^{s-1}\Lambda_{s'_3}\left(\frac{p_l}{p}s'_3-S_{kn}\right)\sum_{s_3=-s}^{s}a_{s_3s'_3}\left(a_{s_3}b_{s'_3}-a_{s'_3}b_{s_3}\right),$$

$$\dot{X}_k=\frac{p_kH_s}{E^2},\qquad \hat{\varepsilon}=\frac{H_s}{E},$$

где $a_{s_3s'_3}$, $d_{s_3s'_3}$ даны в (Д.3), а a_{s_3}, b_{s_3} определяются вышеописанным методом.

Для операторов U_s в (5.18), (5.19) операторы X_k, Σ_{kn} имеют вид

$$X_k=x_k+\frac{S_{kr}p_r}{E(E+m)}-\frac{S_{kr}p_rE-imp_k}{p^2E^2}(\sigma_3H_s-m),$$

$$\Sigma_{kn}=\frac{m}{E}S_{kn}+\frac{pp_lS_p}{E(E+m)}+\frac{1}{E}\left(S_{kn}-\frac{p_l}{p}S_p\right)(\sigma_3H_s-m),$$

k,n,l — цикл $(1,2,3)$, s — полуцелое;

$$X_k=x_k+\frac{S_{kr}p_r}{E(E+m)}+i\sigma_2\frac{S_{kr}p_r}{pE}\sum_{s_3>0}^{s-1}(-1)^{s_3}C_{s_3}-\sigma_2\frac{S_{nl}}{E}B_0-$$

$$-\sigma_2\frac{mp_k}{E^2p}\sum_{n=0}^{N}C_{2n+1}+i\sigma_2(-1)^s\frac{S_{kr}p_r}{Ep}B_s,$$

$$\Sigma_{kn}=\frac{m}{E}S_{kn}+\frac{p_lpS_p}{E(E+m)}-\sigma_2\frac{S_{lr}p_r}{E}B_0+\sigma_2(-1)^s\frac{S_{lr}p_r}{E}B_s-$$

$$-i\sigma_2\frac{p}{E}\left(S_{kn}-\frac{p_l}{p}S_p\right)\sum_{s_3>0}^{s-1}(-1)^{s_3}C_{s_3},$$

k,n,l — цикл $(1,2,3)$, s — целое.

Операторы X_k, $\dot{X}_k$, Σ_{kn}, $\hat{\varepsilon}$ для спина $s=1/2$ совпадают с операторами, полученными в [6].

Дополнение

В дополнении мы приводим без доказательства все те формулы, которые были использованы нами для получения результатов, приведенных в основном тексте.

$$[x_k,\Lambda_{s_3}]_-=\frac{S_{kr}p_r}{p^2}\sum_{s'_3=-s+1}^{s-1}a_{s_3s'_3}\Lambda_{s'_3}+i\sum_{s'_3=-s}^{s}\left(\frac{S_{nl}}{p}-\frac{p_k}{p^2}s'_3\right)d_{s_3s'_3}\Lambda_{s'_3},\qquad (Д.1)$$

$$[S_{kn}, \Lambda_{s_3}]_- = \frac{iS_{lr}p_r}{p} \sum_{s_3'=-s}^{s} d_{s_3 s_3'} \Lambda_{s_3'} - \sum_{s_3'=-s+1}^{s-1} \left(S_{kn} - \frac{p_l}{p} s_3' \right) a_{s_3 s_3'} \Lambda_{s_3'}, \qquad (Д.2)$$

где $a_{s_3' s_3} \neq 0$, если $s_3' = s_3,\ s_3 - 1,\ s_3 + 1$,

$$\begin{aligned} &a_{s_3 s_3} = -1, \qquad a_{s_3-1 s_3} = a_{s_3+1 s_3} = 1/2, \qquad -s+1 \leq s_3 \leq s-1, \\ &d_{s_3' s_3} \neq 0, \qquad \text{если} \qquad s_3' = s_3 - 1,\ s_3 + 1, \qquad -s+1 \leq s_3 \leq s-1, \\ &d_{s_3+1 s_3} = -d_{s_3-1 s_3} = 1/2, \qquad -d_{s-1 s} = -d_{-s-s} = d_{-s+1-s} = d_{ss} = 1. \end{aligned} \qquad (Д.3)$$

$$\left(\frac{S_{kr}p_r}{p^2} \pm i\frac{S_{nl}}{p} \mp i\frac{p_k}{p^2} s_3 \right) \Lambda_{s_3} = 0, \qquad k, n, l \text{ — цикл(1,2,3)}, \quad s_3 = \pm s, \quad (Д.4)$$

$$[S_{nl}, \Lambda_{s_3}]_- = -[x_k p_l - x_l p_k, \Lambda_{s_3}]_-, \qquad [S_{kr}p_r, \Lambda_{s_3}]_- = -p^2 [x_k, \Lambda_{s_3}]_-,$$

$$S_{kr}p_r S_k = -S_k S_{kr} p_r = ipS_p = ip \sum_{s_3=-s}^{s} s_3 \Lambda_{s_3},$$

$$S_{kr}p_r S_{kr'}p_{r'} = p^2 \sum_{s_3=-s} \left[s(s+1) - s_3^2 \right] \Lambda_{s_3}, \qquad S_k S_k = \boldsymbol{S}^s = s(s+1).$$

1. Weaver D.L., Hammer C.L., Good R.H., *Phys. Rev. B*, 1964, **135**, 241.
2. Mathews P.M., *Phys. Rev.*, 1966, **143**, 987.
3. Williams S.A., Draayer J.P., Weber T.A., *Phys. Rev.*, 1966, **152**, 1207.
4. Широков Ю.М., *ДАН СССР*, 1954, **94**, 857; 1955, **99**, 737.
5. Foldy L.L., *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 568.
6. Foldy L.L., Wouthuysen S.A., *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 29.
7. Jordan T.F., Mukunda N., *Phys., Rev.*, 1963, **132**, 1842.