О PTC-неинвариантных лагранжианах

В.И. ФУЩИЧ

With the aid of the energy sign and helicity operators the Poincaré-noninvariant Lagrangians and the equations of motion are constructed, which are not invariant under the PTC-transformation.

С помощью операторов знака энергии и спиральности построены лагранжианы, инвариантные относительно группы Пуанкаре, и уравнения движения, которые неинвариантны относительно PTC-преобразования.

В настоящей заметке приведены несколько примеров пуанкаре-инвариантных лагранжианов, которые неинвариантны относительно $PTC \equiv \Theta$-преобразования. Построение примеров Θ-неинвариантных лагранжианов основано на простом замечании, что при PTC-преобразовании частицы переходят в античастицы с обратной спиральностью. Поэтому, если уравнения движения фиксируют знак спиральности, то они будут PTC-инвариантны. Эта инвариантность не противоречит теореме Паули–Людерса [1], так как построенные лагранжианы нелокальны.

В релятивистской квантовой механике можно ввести два неэквивалентных оператора пространственно-временного отражения

$$\begin{aligned} &\Theta_1\Psi(x) = \theta_1\Psi(-x), \qquad x \equiv (t, \boldsymbol{x}),\\ &\Theta_2\Psi(x) = \theta_2\overset{*}{\Psi}(-x), \end{aligned} \tag{1}$$

где θ_1, θ_2 — некоторые матрицы, размерность которых зависит от числа компонент волновой функции Ψ; * — операция комплексного сопряжения. Так как в теории поля на вектора состояний налагается требование положительности энергии, поэтому далее будем рассматривать только оператор Θ_2.

Генераторы группы Пуанкаре $P(1,3)$ при пространственно-временном отражении преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} &\Theta_2P_0\Theta_2^{-1} = P_0, \qquad \Theta_2P_k\Theta_2^{-1} = P_k,\\ &\Theta_2J_{kl}\Theta_2^{-1} = -J_{kl}, \qquad \Theta_2J_{0k}\Theta_2^{-1} = -J_{0k}, \end{aligned} \tag{2}$$

Хорошо известно [2], что, кроме двух основных инвариантов $P^2 = P_\mu P^\mu$ и W^2, собственная группа $P(1,3)$ имеет два дополнительных инварианта

$$\hat{\varepsilon} = \frac{P_0}{|P_0|} \qquad (\text{для} \quad P^2 \geq 0), \tag{3}$$

$$\hat{h} = \frac{J_{12}P_3 + J_{23}P_1 + J_{31}P_2}{|P_0|} \qquad (\text{для} \quad P^2 = 0,\ P_0 \neq 0). \tag{4}$$

Учитывая (2), легко установить такие соотношения:

$$\Theta_2\hat{\varepsilon}\Theta_2^{-1} = \hat{\varepsilon}, \qquad \Theta_2\hat{h}\Theta_2^{-1} = -\hat{h}. \tag{5}$$

Теоретическая и математическая физика, 1971, **9**, № 1, С. 91–93.

Рассмотрим теперь простейшие квадратичные формы, в которые входят операторы (3) и (4),

$$\overline{\Psi}(1-\hat{\varepsilon})\Psi \qquad \text{или} \qquad \overline{\Psi}(1+\hat{\varepsilon})\Psi, \tag{6}$$

$$\overline{X}(1-\hat{h})X \qquad \text{или} \qquad \overline{X}(1+\hat{h})X, \tag{7}$$

где Ψ и X — волновые функции, описывающие частицы с ненулевой и нулевой массой. Очевидно, что формы (6) и (7) пуанкаре-инвариантны, так как $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{h}$ — инварианты группы $P(1,3)$. Форма (6) инвариантна относительно Θ_2-отражения, а форма (7) неинвариантна относительно Θ_2-отражения.

В квантовой теории поля функции $\Psi(x)$ и $X(x)$ являются ферми-операторами, которые при отражении преобразуются по правилам (см., например, [3])

$$\Psi(x) \overset{\Theta_2}{\to} \Theta_2\Psi(x)\Theta_2^{-1} = -i\widetilde{\gamma}_5\widetilde{\gamma}_0\overline{\Psi}(-x),$$

$$\overline{\Psi}(x) \overset{\Theta_2}{\to} \Theta_2\overline{\Psi}\Theta_2^{-1} = -i\overline{\Psi}\gamma_0\gamma_5.$$

Из сказанного ясно, что лагранжианы, точнее некоторые инвариантные формы из операторов поля вида

$$L_2^{\pm} = g_1\overline{\Psi}(1\pm\hat{\varepsilon})\Psi\overline{X}(1\pm\hat{h})X + g_2\overline{\Psi}(1\pm\hat{\varepsilon})\Psi\overline{X}(1\pm\hat{h})X + \text{э.с.}, \tag{8}$$

$$L_2^{\pm} = g_3\overline{\Psi}\gamma_\mu(1\pm\hat{\varepsilon})\Psi\overline{X}\gamma_\mu(1\pm\hat{h})X + \text{э.с.}, \tag{9}$$

где $\overline{\Psi}$, Ψ — фермионные поля (спин 1/2) с ненулевой массой, $\overline{X}$, X — фермионные поля с нулевой массой, g_1, g_2, g_3 — постоянные величины, неинвариантны относительно Θ_2-преобразования.

Таким образом, используя интегральные операторы (3) и (4), можно построить пуанкаре-инвариантные формы, которые неинвариантны относительно PTC-преобразования.

Операторы $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{h}$ могут быть использованы для нахождения релятивистских уравнений, неинвариантных относительно PTC-преобразования [4, 5]. Так, например, уравнение Дирака для частицы с нулевой массой совместно с релятивистски инвариантным дополнительным условием

$$(1+\hat{h})X = \left(1+\gamma_5\frac{\gamma_0\gamma_k p_k}{\sqrt{p_l^2}}\right)X = 0 \tag{10}$$

или

$$(1-\hat{h})X = \left(1-\gamma_5\frac{\gamma_0\gamma_k p_k}{\sqrt{p_l^2}}\right)X = 0 \tag{11}$$

неинвариантно ни относительно Θ_1-преобразования, ни относительно Θ_2-преобразования.

Очевидно, что в качестве двух других дополнительных условий могут быть использованы такие два уравнения:

$$(1+\hat{h}\hat{\varepsilon})X = (1+\gamma_5)X = 0 \tag{12}$$

или

$$(1-\hat{h}\hat{\varepsilon})X = (1-\gamma_5)X = 0,$$

$$(1+\hat{\varepsilon})X = \left(1+\frac{\gamma_0\gamma_k p_k}{\sqrt{p_l^2}}\right)X = 0$$

или

$$(1-\hat{\varepsilon})X = \left(1-\frac{\gamma_0\gamma_k p_k}{\sqrt{p_l^2}}\right)X = 0. \tag{13}$$

Ив приведенного вытекает такой результат: *для частицы (и античастицы) нулевой массы и произвольного спина существуют три существенно различных (относительно P-, T-, C-преобразований) двухкомпонентных уравнения*.

1. Граверт Г., Людерс Г., Рольник Г., *УФН*, 1960, **71**, № 2, 289.
2. Широков Ю.М., *ЖЭТФ*, 1957, **33**, 1196.
3. Roman P., Theory of Elementary Particles, Amsterdam, 1961.
4. Fushchych W.I., *Nucl. Phys. B*, 1970, **21**, 321.
5. Fushchych W.I., Grishchenko A.L., *Lettere Nuovo Cim.*, 1970, **4**, 927.