О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения

В.И. ФУЩИЧ

The additional (implicit) symmetry of equations invariant under the full Poincaré group is studied. It is shown that relativistic equations are invariant under the homogeneous de Sitter group $O(1,4)$ (or $O(2,3)$) and the matrix group $O(4)$.

Изучена дополнительная (неявная) симметрия уравнений, инвариантных относительно полной группы Пуанкаре. Показано, что релятивистские уравнения инвариантны относительно однородной группы де Ситтера $O(1,4)$ (или $O(2,3)$) и матричной группы $O(4)$.

Хорошо известно, что некоторые уравнения движения как в нерелятивистской, так и в релятивистской механике обладают дополнительной симметрией (инвариантностью). Так, например, уравнение Шредингера для атома водорода неявно инвариантно относительно четырехмерной группы вращений [1]; уравнения Максвелла, Дирака (для нулевой массы) инвариантны относительно конформной группы [2].

В настоящей работе показано, что релятивистские уравнения, описывающие свободное движение частиц и (античастиц) с ненулевой и нулевой массами и с произвольным спином s, инвариантны относительно однородной группы де Ситтера $O(1,4)$ и матричной группы $O(4)$. Найден явный вид операторов, являющихся базисными элементами алгебры Ли группы $O(4)$ и коммутирующих с гамильтонианом Дирака.

1. Дополнительная инвариантность уравнений для частицы с ненулевой массой

1. Для установления дополнительной симметрии уравнений, инвариантных относительно группы $P(1,3)$, удобно исходить из уравнений в канонической форме. Релятивистское уравнение, описывающее свободное движение частицы и античастицы со спином s и массой m, в каноническом представлении имеет вид [3, 4]

$$
\begin{gathered}
i\frac{\partial\Phi(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = \mathcal{H}^\Phi\Phi(t,\boldsymbol{x}), \qquad \mathcal{H}^\Phi = \gamma_0 E_1, \\
\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad E_1 = \sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2+m^2},
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

где Φ — волновая функция частицы, имеющая $2(2s+1)$ компонент; 1 — единичная матрица размерности $(2s+1)\times(2s+1)$. На множестве решений $\{\Phi\}$ уравнения (1.1) реализуется неприводимое представление полной группы Пуанкаре $P(1,3)$ (включающей пространственно-временные отражения). Операторы Казимира группы $P(1,3)$ на множестве $\{\Phi\}$ кратны единичному оператору

$$
W^2 = W_\alpha W^\alpha = m^2 s(s+1), \quad P^2 = P_\alpha P^\alpha = m^2, \quad W_\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}P^\beta J^{\gamma\delta}, \tag{1.2}
$$

Теоретическая и математическая физика, 1971, **7**, № 1, С. 3–12.

где P_α, $J_{\alpha\beta}$ — генераторы группы $P(1,3)$. На множестве $\{\Phi\}$ эти генераторы имеют вид [3, 4]

$$\begin{gathered}P_0=\mathcal{H}^\Phi=\gamma_0E_1, \qquad P_a=p_a=-i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad a=1,2,3 \\ J_{ab}=x_ap_b-x_bp_a+\widetilde{S}_{ab}, \qquad J_{0a}=x_0p_a-\frac{1}{2}\left[x_a,\mathcal{H}^\Phi\right]_+-\gamma_0\frac{\widetilde{S}_{ab}p_b}{E_1+m},\end{gathered} \tag{1.3}$$

$$\widetilde{S}_{ab}=\begin{pmatrix} S_{ab} & 0 \\ 0 & S_{ab}\end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

где S_{ab} — $(2s+1)\times(2s+1)$-матрицы, реализующие неприводимое представление алгебры $O(3)$[1].

Инвариантность уравнения (1.1) относительно преобразований из группы $P(1,3)$ была доказана в [3, 4]. Этот факт является следствием того, что для произвольного $\Phi\in\{\Phi\}$ выполняется условие

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t}-\mathcal{H}^\Phi,\mathcal{E}\right]_-\Phi=0, \tag{1.5}$$

где $\mathcal{E}$ — любой элемент из обертывающей алгебры $\mathcal{E}(1,3)$ группы Пуанкаре $P(1,3)$ (относительно обертывающей алгебры $\mathcal{E}(1,3)$ см. [5]).

Теперь докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Уравнение (1.1) инвариантно относительно однородной группы де Ситтера* $O(1,4)$.

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$R_\mu=\frac{1}{2}(P^\alpha J_{\mu\alpha}+J_{\mu\alpha}P^\alpha), \tag{1.6}$$

принадлежащий обертывающей алгебре $\mathcal{E}(1,3)$. Оператор R_μ удовлетворяет таким коммутационным соотношениям (см., например, [5, 6, 7, 8]):

$$[R_\mu,R_\nu]_-=iP^2J_{\mu\nu}, \tag{1.7}$$

$$[R_\mu,J_{\alpha\beta}]_-=i(g_{\mu\alpha}R_\beta-g_{\mu\beta}R_\alpha), \tag{1.8}$$

$$[R_\alpha,P_\mu]_-=i(g_{\alpha\mu}P^2-P_\alpha P_\mu), \tag{1.9}$$

$$[P_\mu,R^2]_-=2iP^2R_\mu, \qquad R^2\equiv R_\alpha R^\alpha, \tag{1.10}$$

$$[J_{\mu\nu},R^2]_-=0, \qquad [R_\mu,R^2]_-=-iP^2(R^\alpha J_{\mu\alpha}+J_{\mu\alpha}R^\alpha). \tag{1.11}$$

Оператор

$$J_{\mu4}=R_\mu/\sqrt{P^2} \tag{1.12}$$

вместе с операторами $J_{\mu\nu}$ удовлетворяет коммутационным соотношениям алгебры $O(1,4)$, поскольку

$$[J_{\mu4},J_{\nu4}]_-=iJ_{\mu\nu}, \qquad \mu,\nu=0,1,2,3, \tag{1.13}$$

[1]Группы и их алгебры обозначаются одинаковыми символами.

$$[J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}]_- = i(g_{\mu\beta}J_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha}J_{\nu\beta} + g_{\nu\alpha}J_{\mu\beta} - g_{\nu\beta}J_{\mu\alpha}). \tag{1.14}$$

Так как оператор $J_{\mu 4}$ принадлежит алгебре $\mathcal{E}(1,3)$ ($\sqrt{P^2}$ на решениях уравнения (1.1) кратен единичному оператору), то тем самым теорема доказана.

Замечание 1. Оператор R_μ впервые рассматривал Ю.М. Широков [6]. В настоящее время такой оператор часто используется для получения спектра масс элементарных частиц в теоретико-групповом подходе [7].

Замечание 2. Уравнения вида

$$W^2\Psi(t,\boldsymbol{x}) = m^2 s(s+1)\Psi(t,\boldsymbol{x}), \tag{1.15}$$

$$P^2\Psi(t,\boldsymbol{x}) = m^2\Psi(t,\boldsymbol{x}) \tag{1.16}$$

инварианты, как это следует из теоремы [8], относительно группы $O(1,4)$.

2. В случае, когда $P^2 = -\eta^2$ (η — действительный параметр), группа $P(1,3)$ имеет как унитарные, так и неунитарные представления [3], причем все унитарные представления (по спиновым индексам) бесконечномерны, а значит, и уравнения движения, на множестве решений которых реализуется представление $P(1,3)$, будут бесконечнокомпонентны. Как показано в [9], для представлений класса III ($P^2 < 0$) каноническое уравнение “движения” имеет вид

$$\begin{gathered}
-i\frac{\partial\widetilde{\Phi}(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_3} = \widetilde{P}_3\widetilde{\Phi}(t,\boldsymbol{x}), \\
\widetilde{P}_3 = \widetilde{\gamma}_0 E_3, \qquad E_3 = \sqrt{p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 + \eta^2}, \\
\widetilde{\gamma}_0 = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}, \qquad p_0 = -i\frac{\partial}{\partial t},
\end{gathered} \tag{1.17}$$

здесь $\widetilde{\Phi}(t,\boldsymbol{x})$ — функция, преобразующаяся по неприводимому представлению полной группы $\widetilde{P}(1,3)$, $\hat{1}$ — единичный оператор.

На множестве $\{\widetilde{\Phi}\}$ генераторы группы $P(1,3)$ имеют вид [9]

$$\begin{gathered}
P_0 = p_0, \qquad P_a = p_a, \qquad P_3 = \widetilde{P}_3 = \widetilde{\gamma}_0 E_3 \qquad a = 1,2, \\
J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + \widetilde{S}'_{ab}, \qquad b = 1,2, \\
J_{3a} = x_3 p_a - \frac{1}{2}[x_a, \widetilde{P}_3]_+ + \frac{\widetilde{S}'_{ab}p_b + i\widetilde{S}'_{a3}p_0}{E_3 + \eta}, \\
J_{0a} = x_0 p_a - x_a p_0 - i\widetilde{S}'_{3a}, \qquad x_0 = t, \\
J_{30} = x_3 p_0 - \frac{1}{2}[x_0, \widetilde{P}_3]_+ - \widetilde{\gamma}_0\frac{i\widetilde{S}'_{3a}p_a}{E_3 + \eta}, \\
\widetilde{S}'_{ab} = \begin{pmatrix} S'_{ab} & 0 \\ 0 & S'_{ab} \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{S}'_{3a} = \begin{pmatrix} S'_{3a} & 0 \\ 0 & S'_{3a} \end{pmatrix},
\end{gathered} \tag{1.18}$$

где операторы S'_{ab}, iS'_{3a} реализуют неприводимое представление алгебры $O(1,2)$.

Условие типа (1.5) в этом случае имеет вид

$$\left[\widetilde{P}_3 + i\frac{\partial}{\partial x_3}, \mathcal{E}\right]\widetilde{\Phi} = 0. \tag{1.19}$$

Если теперь повторить те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1, то придем к такому утверждению.

Теорема 2. *Уравнение (1.17) инвариантно относительно группы* $O(2,3)$

Замечание 3. Теоремы 1 и 2 очевидным образом обобщаются и на уравнения, инвариантные относительно группы $P(n,l)$ — вращений и трансляций в $(n+l)$-мерном пространстве Минковского.

3. В этом пункте покажем, что уравнение (1.1), помимо инвариантности относительно групп $P(1,3)$ и $O(1,4)$, инвариантно относительно преобразований (по спиновым индексам, которые не связаны с пространственно-временными преобразованиями)

$$A\Phi = \Phi', \tag{1.20}$$

где A — произвольная матрица размерности $2(2s+1)\times 2(2s+1)$, принадлежащая матричной алгебре $O(4)$.

Прежде всего отметим, что, как следует из представления Фолди–Широкова (1.3), на решениях уравнения (1.1) реализуется прямая сумма двух неприводимых представлений алгебры $O(3)$

$$D(s)\oplus D(s). \tag{1.21}$$

Это означает, что на множестве $\{\Phi\}$ можно реализовать прямую сумму двух неприводимых представлений алгебры $O(4)$

$$D(s,0)\oplus D(0,s). \tag{1.22}$$

На множестве $\{\Phi\}$ базисные элементы алгебры $O(4)$ имеют вид

$$\widetilde{S}_{ab} = \begin{pmatrix} S_{ab} & 0 \\ 0 & S_{ab} \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{S}_{4a} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{abc}S_{bc} & 0 \\ 0 & -\varepsilon_{abc}S_{bc} \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

$(a,b,c=1,2,3)$, причем

$$[\widetilde{S}_{kl},\widetilde{S}_{rn}]_- = i(g_{kn}\widetilde{S}_{lr} - g_{rk}\widetilde{S}_{ln} + g_{lr}\widetilde{S}_{kn} - g_{ln}\widetilde{S}_{kr}, \qquad k,r,n,l=1,2,3,4. \tag{1.24}$$

Поскольку матрицы $\widetilde{S}_{ab}$, $\widetilde{S}_{4a}$ коммутируют с гамильтонианом $\mathcal{H}^\Phi$, уравнение (1.1) инвариантно относительно группы $O(4)$. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Уравнение (1.1) инвариантно относительно группы* $O(4)$.

Следует подчеркнуть, что из инвариантности уравнения (1.1) относительно группы $O(4)$ вытекает, что, помимо орбитального момента $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}$ спинового момента $\boldsymbol{S}$, должен сохраняться еще один момент $\boldsymbol{S}'$. Компоненты векторов $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S}'$ определяются через $\widetilde{S}_{kl}$ соотношениями

$$S_a = \frac{1}{2}(\widetilde{S}_{bc}+\widetilde{S}_{4a}), \qquad S'_a = \frac{1}{2}(\widetilde{S}_{bc}-\widetilde{S}_{4a}), \tag{1.25}$$

a,b,c — цикл $(1,2,3)$.

Возникновение еще одного момента $\boldsymbol{S}'$ носит, по-видимому, чисто математический характер, связанный с P-, T-, C-инвариантностью уравнения (1.1). Как будет видно ниже, для уравнения Вейля дополнительный момент $\boldsymbol{S}'$ не возникает, в то время как для уравнения Дирака с нулевой массой (без дополнительного условия) он появляется. Не возникает дополнительный момент (по отношению к спину и изоспину) и для четырехкомпонентного уравнения Дирака в пятимерном подходе, которое, как известно [9], C-неинвариантно.

2. Дополнительная инвариантность уравнений для частицы с нулевой массой ($P^2 = 0$, $W^2 \neq 0$)

Рассмотрим два типа уравнений, описывающих свободное движение частицы с нулевой массой, с “непрерывным” и дискретным спином. В этом случае удобно исходить из следующих уравнений:

$$W_\alpha W^\alpha \Psi(t, \boldsymbol{x}) = \rho^2 \Psi(t, \boldsymbol{x}), \qquad P_\alpha P^\alpha \Psi(t, \boldsymbol{x}) = 0, \tag{2.1}$$

где ρ^2 — параметр, характеризующий неприводимое представление группы $P(1,3)$, который (подобно массе для представлений классов I, III, когда $P^2 \neq 0$) может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Если $\rho^2 = 0$, то уравнения (2.1) описывают свободное движение частицы с нулевой массой и дискретным спином (нейтрино, фотон и т.д.). Можно, конечно, исходить и из других уравнений движения, но поскольку любые другие уравнения, на решениях которых реализуется неприводимое представление $\widetilde{P}(1,3)$, унитарно эквивалентны системе (2.1), то достаточно установить дополнительную инвариантность для уравнений (2.1).

Для уравнений (2.1) имеет место теорема.

Теорема 4. *Уравнения (2.1) для $\rho^2 > 0$ инвариантны относительно однородной группы де Ситтера $O(1,4)$.*

Доказательство. В том случае, когда $P^2 = 0$, оператор R_μ удовлетворяет таким коммутационным соотношениям (см. соотношения (1.7)–(1.11)):

$$[R_\mu, R_\nu]_- = 0, \tag{2.2}$$

$$[R_\mu, J_{\alpha\beta}]_- = i(g_{\mu\alpha} R_\beta - g_{\mu\beta} R_\alpha), \tag{2.3}$$

$$[R_\mu, P_\alpha]_- = i P_\alpha P_\mu, \tag{2.4}$$

$$[R^2, P_\mu]_- = [R^2, J_{\alpha\beta}]_- = [R^2, R_\gamma]_- = 0. \tag{2.5}$$

Из соотношений (2.2) и (2.3) видно, что операторы R_μ и $J_{\alpha\beta}$ — базисные элементы алгебры типа Пуанкаре $R(1,3)$. Оператор W^2 в этом случае совпадает с оператором R^2, который, подобно оператору P^2 в алгебре $P(1,3)$, является оператором Казимира алгебры $R(1,3)$. Вектор типа Паули–Любанского алгебры $R(1,3)$ имеет вид

$$\mathcal{V}_\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} R^\beta J^{\gamma\delta}. \tag{2.6}$$

Оператор $\mathcal{V}^2 = \mathcal{V}_\alpha \mathcal{V}^\alpha$ — второй оператор Казимира алгебры $R(1,3)$. Рассматривая операторы

$$J^R_{\mu 4} = F_\mu / \sqrt{R^2}, \tag{2.7}$$

где

$$F_\mu = \frac{1}{2}(R^\alpha J_{\mu\alpha} + J_{\mu\alpha}R^\alpha), \tag{2.8}$$

и буквально повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, мы завершаем доказательство теоремы 4.

Проводя аналогичные рассуждения для случая $\rho^2 < 0$, приходим к утверждению.

Теорема 5. *Уравнения (2.1) для* $\rho^2 < 0$ *инвариантны относительно группы* $O(2,3)$.

Система уравнений (2.1) в случае $\rho^2 = 0$ инвариантна относительно группы $O(2,4) \supset O(1,4)$. Этот результат следует из теоремы о конформной инвариантности уравнений, описывающих свободное движение частиц с нулевой массой и дискретным спином [2].

2. Тот факт, что при $P^2 = 0$ и $W^2 \neq 0$ операторы R_μ, $J_{\alpha\beta}$ удовлетворяют алгебре типа Пуанкаре $R(1,3)$ (см. (2.3), (2.4)), позволяет рассматривать их как операторы “четырехмерного импульса” в пространстве функций $\{\Phi^R(y_0, y_1, y_2, y_3)\}$, где

$$R_\mu \Phi^R(y_0, y_1, y_2, y_3) = r_\mu \Phi^R(y_0, y_1, y_2, y_3), \tag{2.9}$$

$$r_0 = i\frac{\partial}{\partial y_0}, \qquad r_a = -i\frac{\partial}{\partial y_a}, \qquad a = 1, 2, 3. \tag{2.10}$$

Каноническое уравнение движения (для $\rho^2 > 0$), инвариантное относительно алгебры $R(1,3)$, имеет вид

$$i\frac{\partial \Phi^R(y_0, \boldsymbol{y})}{\partial y_0} = \gamma_0 E^R \Phi^R(y_0, \boldsymbol{y}), \qquad E^R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \rho^2}, \tag{2.11}$$

где $\Phi^R(y_0, \boldsymbol{y})$ — $2(2s+1)$-компонентная волновая функция.

На множестве решений уравнения (2.11) $\{\Phi^R\}$ операторы Казимира алгебры $R(1,3)$ кратны единичным операторам, т.е.

$$R^2\Phi^R = R^\alpha R_\alpha \Phi^R = \rho^2 \Phi^R, \qquad \mathcal{V}^2\Phi^R = \mathcal{V}^\alpha \mathcal{V}_\alpha \Phi^R = \rho^2 s(s+1)\Phi^R. \tag{2.12}$$

Базисные элементы алгебры $R(1,3)$ на $\{\Phi^R\}$ имеют вид (1.3), где следует совершить замену

$$P_\mu \to R_\mu, \qquad \frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial y_0}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_a} \to \frac{\partial}{\partial y_a}, \qquad E_1 \to E^R.$$

Уравнение (2.11), как и (1.1), инвариантно относительно группы де Ситтера $O(1,4)$ и матричной группы $O(4)$.

Таким образом, параметры ρ и s, характеризующие неприводимые представления алгебры $R(1,3)$, в Φ^R-представлении следует интерпретировать как “массу и спин” частицы. Это означает, что представлениям группы Пуанкаре, для которых $P^2 = 0$ и $W^2 \neq 0$, можно придать вполне ясный смысл, если в качестве полного набора коммутирующих операторов выбрать операторы R_μ и одну из компонент $\mathcal{V}_\mu$, например $\mathcal{V}_3$. Важно отметить, что в пространстве представлений группы $P(1,3)$, где операторы R_μ диагональны, операторы P_μ недиагональны.

3. Об инвариантности уравнения Дирака

1. В этом пункте найдем явный вид операторов, являющихся базисными элементами алгебры Ли группы $O(4)$, коммутирующих с гамильтонианом Дирака.

Уравнение Дирака

$$i\frac{\partial\Psi'(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = (\gamma_0\gamma_a p_a + \gamma_0 m)\Psi'(t,\boldsymbol{x}), \qquad a = 1,2,3, \tag{3.1}$$

после преобразования

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\gamma_4), \tag{3.2}$$

принимает вид

$$\begin{gathered} i\frac{\partial\Psi(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = \mathcal{H}\Psi(t,\boldsymbol{x}), \qquad \mathcal{H} = \gamma_0\gamma_k p_k, \qquad k = 1,2,3,4, \\ \Psi = U_1\Psi', \qquad p_4 \equiv m. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Для наших целей будет удобно исходить из уравнения Дирака в форме (3.3), что позволит провести одновременно все рассмотрения для $m > 0$ и $m < 0$.

Уравнение (3.3) после преобразования

$$U\left(p, s = \frac{1}{2}\right) = \exp\left\{\frac{\pi}{4}\frac{\gamma_0\mathcal{H}}{E}\right\} \equiv \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\gamma_0\mathcal{H}}{E}\right), \qquad E = \sqrt{p_k^2} \equiv E_1 \tag{3.4}$$

примет канонический вид

$$i\frac{\partial\Phi(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = \mathcal{H}^{\Phi}\Phi(t,\boldsymbol{x}), \qquad \mathcal{H}^{\Phi} = \gamma_0 E, \tag{3.5}$$

где γ_0 — четырехрядная матрица Дирака (см. (1.1)).

Генераторы группы $P(1,3)$ на множестве $\{\Phi\}$ выглядят так[2]:

$$\begin{gathered} P_0 \equiv \mathcal{H}^{\Phi} = \gamma_0 E, \qquad P_a = p_a, \qquad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + \widetilde{S}_{ab}, \\ J_{0a} = x_0 p_a - \frac{1}{2}[x_a, \mathcal{H}^{\Phi}]_+ - \gamma_0\frac{\widetilde{S}_{ab}p_b + \widetilde{S}_{a4}p_4}{E}, \end{gathered} \tag{3.6}$$

$$\begin{gathered} \widetilde{S}_{kl} = \frac{i}{4}(\gamma_k\gamma_l - \gamma_l\gamma_k), \qquad \widetilde{S}_{0k} = \frac{i}{4}(\gamma_0\gamma_k - \gamma_k\gamma_0), \\ \widetilde{S}_{5k} = -\frac{i}{2}\gamma_k, \qquad \widetilde{S}_{05} = \frac{i}{2}\gamma_0. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Матрицы $\widetilde{S}_{kl}$ — генераторы группы $O(4)$ и, кроме того, коммутируют с гамильтонианом $\mathcal{H}^{\Phi}$ в представлении Φ. Это и означает, что уравнение (3.5) дополнительно инвариантно относительно матричной алгебры $O(4)$. С гамильтонианом $\mathcal{H}^{\Phi}$, очевидно, коммутирует и матрица $\widetilde{S}_{05}$.

Чтобы непосредственно показать, что уравнение (3.3) инвариантно относительно алгебры $O(4)$, достаточно найти операторы типа $\widetilde{S}_{kl}$, которые коммутировали бы с оператором $\mathcal{H}$. Эти операторы нетрудно найти, если воспользоваться унитарным оператором U^{-1}, связывающим представления Φ и Ψ.

[2] Представление (3.6) справедливо не только для спина $s = 1/2$, но и для произвольного спина s.

Можно непосредственно проверить, что операторы

$$S^{\Psi}_{kl} = U^{-1}\widetilde{S}_{kl}U = \widetilde{S}_{kl} + \frac{1}{E}(\widetilde{S}_{5k}p_l - \widetilde{S}_{5l}p_k)\left(1 - \frac{2iS_{5r}p_r}{E}\right),$$
$$S^{\Psi}_{05} = U^{-1}\widetilde{S}_{05}U = \frac{i}{2}\frac{\mathcal{H}}{E} \tag{3.8}$$

коммутируют с оператором $\mathcal{H}$.

Таким образом, уравнение (3.3), а значит, и уравнение (3.1), как для ненулевой, так и для нулевой массы инвариантно относительно алгебры $O(4)$. Этот результат является частным случаем более общего утверждения, доказанного в п. 3, раздела 1.

Следует отметить, что поскольку с γ_0 коммутируют только матрицы $\widetilde{S}_{kl}$ и $\widetilde{S}_{05}$ (матрицы $\gamma_0\widetilde{S}_{rn}$, $\widetilde{S}_{rl}\widetilde{S}_{kn}$ — линейные комбинации $\widetilde{S}_{kl}$ и $\widetilde{S}_{05}$), то алгебра Ли, порожденная ими, является максимальной алгеброй, относительно которой уравнение (3.5) инвариантно.

Дополнительная симметрия уравнения Дирака методами, отличными от наших, исследовалась в работах [10].

Ради полноты изложения приведем явный вид оператора координаты в представлении Ψ

$$X^{\Psi}_a = U^{-1}x_aU = x_a + \frac{1}{E}\left(\widetilde{S}_{a5} + \frac{\widetilde{S}_{5k}p_k}{E^2}p_a + \frac{\widetilde{S}_{ab}p_b + \widetilde{S}_{a4}p_4}{E}\right). \tag{3.9}$$

2. Двухкомпонентное уравнение Вейля

$$i\frac{\partial\chi(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = \sigma_b p_b \chi(t,\boldsymbol{x}), \tag{3.10}$$

как известно, эквивалентно уравнению Дирака для нулевой массы с дополнительным условием, т.е. эквивалентно системе уравнений

$$i\frac{\partial\Psi(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = \gamma_0\gamma_a p_a \Psi(t,\boldsymbol{x}), \qquad a = 1,2,3, \tag{3.11}$$

$$(1 - i\gamma_4)\Psi(t,\boldsymbol{x}) = 0. \tag{3.12}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что дополнительное условие (3.12) неинвариантно относительно операторов $\widetilde{S}^{\Psi}_{kl}$, т.е.

$$[\gamma_4, \widetilde{S}^{\Psi}_{kl}]_- \neq 0.$$

Итак, система уравнений (3.11), (3.12) не обладает дополнительной симметрией относительно группы $O(4)$.

Если над уравнением (3.10) совершить преобразование типа Фолди–Воутхойзена [11], то оно примет канонический вид

$$i\frac{\partial\Phi(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = \sigma_3 E\Phi(t,\boldsymbol{x}), \qquad E = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}. \tag{3.13}$$

Уравнение (3.13) уже явно инвариантно относительно преобразования

$$\Phi \to \sigma_3\Phi, \tag{3.14}$$

следовательно, уравнение Вейля (3.10) дополнительно инвариантно относительно группы $O(2)$.

3. Из предыдущего пункта ясно, что дополнительная инвариантность уравнений движений зависит от компонентности волновой функции. Ниже будет установлена зависимость дополнительной симметрии уравнений от размерности пространства Минковского, в котором они заданы.

Рассмотрим в пятимерном пространстве Минковского два неэквивалентных уравнения типа Дирака, инвариантных относительно неоднородной группы де Ситтера $P(1,4)$:

$$\begin{aligned} &i\frac{\partial\Psi_\pm(t,\boldsymbol{x},x_4)}{\partial t} = (\gamma_0\gamma_k p_k + \gamma_0\varkappa)\Psi_\pm(t,\boldsymbol{x},x_4), \\ &p_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad k = 1,2,3,4, \end{aligned} \tag{3.15}$$

где $\Psi_\pm$ — четырехкомпонентный спинор, $\varkappa$ — постоянная величина. Проводя для уравнений (3.15) такой же анализ, как и для (3.3) (с некоторыми очевидными изменениями), можно показать, что уравнение (3.15) для функции $\Psi_=$ (или Ψ_-) дополнительно инвариантно относительно группы $O(4)$.

Итак, четырехкомпонентное уравнение Дирака в пятимерном подходе, помимо инвариантности относительно групп $P(1,4)$ и $O(1,5)$, инвариантно относительно матричной группы $O(4)$. Из этого результата, в частности, следует, что спиновый и изоспиновый моменты в пятимерной схеме квантовой механики сохраняются. Это и следовало ожидать, поскольку малой группой группы $P(1,4)$ является группа $O(4)$, которая локально изоморфна группе $SU(2)\times SU(2)$.

Особенностью уравнения (3.15) для функции Ψ_+ (или Ψ_-) является то, что оно в отличие от обычного уравнения Дирака неинвариантно относительно C-преобразований (более детально см. [9]). В пятимерном подходе простейшим спинорным P-, T-, C-инвариантным уравнением является восьмикомпонентное уравнение [9]

$$\begin{aligned} &i\frac{\partial\Psi(t,\boldsymbol{x},x_4)}{\partial t} = \left\{\begin{pmatrix} \gamma_0\gamma_k & 0 \\ 0 & \gamma_0\gamma_k \end{pmatrix} p_k + \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & -\gamma_0 \end{pmatrix}\varkappa\right\}\Psi(t,\boldsymbol{x},x_4), \\ &\Psi \equiv \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

являющееся объединением двух уравнений (3.15).

Для этого уравнения справедливо следующее утверждение: уравнение (3.16) инвариантно относительно матричной алгебры $O(6)$. Чтобы доказать это утверждение, следует представить уравнение (3.16) в форме

$$i\frac{\partial\Psi(t,\boldsymbol{x},x_4)}{\partial t} = (\Gamma_0\Gamma_k p_k + \Gamma_0\varkappa)\Psi(t,\boldsymbol{x},x_4), \tag{3.17}$$

где восьмирядные матрицы Γ_0, Γ_k и Γ_5, Γ_6 — базисные элементы восьмимерной алгебры Клиффорда, а потом повторить рассуждения, приведенные в пункте 1.

Из приведенного анализа уравнений (3.3), (3.10), (3.15), (3.16) вытекает, что дополнительная инвариантность уравнений движений, инвариантных относительно неоднородных групп типа $P(1,n)$, зависит как от размерности пространства Минковского, так и от компонентности волновых функций.

Замечание 4. Если в уравнении (3.15) положить $\varkappa = 0$, оно будет описывать частицу и античастицу с переменной массой $\sqrt{p_4^2}$ и фиксированным спином $s = 1/2$ [9]. Уравнение (3.5) (для $\varkappa = 0$) инвариантно относительно группы $O(2,5)$, содержащей в качестве подгруппы конформную группу. Следует отметить, что обычное уравнение Дирака с фиксированной массой неинвариантно даже относительно конформной группы.

Автор выражает благодарность А.Л. Грищенко за проверку некоторых формул настоящей работы.

1. Фок В., *Z. Phys.*, 1936, **98**, 145.
2. Lomont J.S., *Nuovo Cim.*, 1957, **6**, 204;
   Gross L., *J. Math. Phys.*, 1964, **5**, 687.
3. Широков Ю.М., *ДАН СССР*, 1954, **94**, 857; 1954, **99**, 737; *ЖЭТФ*, 1957, **33**, 1196.
4. Foldy L.L., *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 568.
5. Rosen J., Roman P., *J. Math. Phys.*, 1966, **7**, 2072.
6. Широков Ю.М., *ЖЭТФ*, 1951, **21**, 748.
7. Böhm A., *Phys. Rev.*, 1966, **145**, 1212.
8. Sankaranarajananan A., *Nuovo Cim.*, 1965, **38**, 1441.
9. Фущич В.И., *ТМФ*, 1970, **4**, 360.
10. Pauli W., *Nuovo Cim.*, 1957, **6**, 204;
    Sen Gupta N.D., *Nuovo Cim.*, 1965, **36**, 1181;
    Ибрагимов Н.Х., *ДАН СССР*, 1969, **185**, 1226.
11. Fronsdal C., *Phys. Rev.*, 1959, **113**, 1367.