Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе. I

В.И. ФУЩИЧ

The study has been made of the irreducible representations of the total inhomogeneous de Sitter group $\widetilde{P}(1,4)$. The canonical and non-canonical equations of motion invariant under the $\widetilde{P}(1,4)$ group are found. The equation is proposed which makes it possible to obtain the mass spectrum of the particles increasing with spin and isospin, and, as a by-product, the equation of motion for zero-mass particle is obtained, which is the covariant generalization of the Weyl–Hammer–Good equation. The eight-component equation (6.7) is shown to be the simplest P-, C- and T-invariant equation in the five-dimensional approach. Canonical transformations for the free equations of the Dirac type are considered.

Изучены неприводимые представления полной неоднородной группы де Ситтера $\widetilde{P}(1,4)$. Найдены канонические и неканонические уравнения движения, инвариантные относительно группы $\widetilde{P}(1,4)$. Предложено уравнение, с помощью которого можно получить возрастающий спектр масс частиц в зависимости от спина и изоспина и как побочный результат получено уравнение движения для частицы с нулевой массой, являющееся ковариантным обобщением уравнения Вейля–Хаммера–Гуда. Показано, что простейшим P-, T-, C-инвариантным уравнением в пятимерном подходе является восьмикомпонентное уравнение (6.7). Рассмотрены канонические преобразования для уравнений типа Дирака.

За последнее время вопрос о расширении группы Пуанкаре и объединение ее с группами внутренних симметрий в различных направлениях и для различных целей был предметом многих исследований (см. обзор [1]). Следует отметить, что идея расширения группы Пуанкаре тесно связана с довольно старой идеей о расширении четырехмерного пространственно-временного континуума, которая интенсивно обсуждалась в 30-х годах в общей теории относительности в связи с объединением теорий тяготения и электричества. Вопросу построения основ 5-мерной оптики, исходя из пятимерного пространства Минковского, посвящена монография Ю. Румера [2]. Задача о расширении однородной группы Лоренца рассматривалась многими авторами (наиболее полный обзор по этим работам см. в [3]).

В настоящее время стало ясно, что для задач, связанных с нахождением спектра масс частиц на основе вложения групп, необходимо рассматривать вопрос о расширении группы Пуанкаре $P(1,3)$, а не однородной группы Лоренца $O(1,3)$.

Исходя из предположения, что оператор массы должен входить в теорию "на равных правах с оператором импульса" [4], в работах [5, 6, 8] было рассмотрено минимальное в некотором смысле расширение группы Пуанкаре $P(1,3)$. В качестве такого расширения выбрана неоднородная группа де Ситтера $P(1,4) \supset P(1,3)$ в пятимерном пространстве Минковского.

Теоретическая и математическая физика, 1970, **4**, № 3, С. 360–382.

В работах [7, 8] было показано, что уравнения Дирака в пятимерном пространстве Минковского, в отличие от уравнений Дирака в четырехмерном пространстве, не инвариантны относительно PTC-преобразований. Такое существенное различие P-, T-, C-свойств уравнений Дирака в зависимости от размерности пространств и побудило рассмотреть вопрос о дискретных преобразованиях в пятимерном подходе в наиболее общей постановке.

Настоящая работа является продолжением предыдущих наших работ [5, 6, 8, 21] по неоднородной группе де Ситтера $P(1,4)$.

При построении неприводимых представлений полной неоднородной группы де Ситтера $\widetilde{P}(1,4)$ повсюду используются методы и идеи работ Вигнера, Фолди и Широкова [9, 10, 11] по представлениям группы Пуанкаре. Рассмотрения ведутся в такой форме, что почти все основные результаты работы с некоторыми очевидными оговорками обобщаются и на группу $P(1,n)$ — группу вращений и трансляций в $(1+n)$-мерном пространстве Минковского.

В разделе 1 приведены основные сведения о группе $P(1,4)$ и определены операторы дискретных преобразований. В последующих разделах 2–4 найдены явные виды генераторов группы $P(1,4)$, реализующих ее неприводимые представления, и с помощью которых построены генераторы группы $\widetilde{P}(1,4)$. Приведены схемы зацеплений неприводимых представлений группы $P(1,4)$ операторами дискретных преобразований и выписаны канонические уравнения, инвариантные относительно полной группы $\widetilde{P}(1,4)$.

В разделе 5 предложены неканонические уравнения, инвариантные относительно группы $\widetilde{P}(1,4)$, которые приводят к возрастающему спектру масс частиц в зависимости от спина и изоспина. Раздел 6 посвящен теоретико-групповому анализу восьмикомпонентного уравнения, инвариантного относительно $\widetilde{P}(1,4)$. Исходя из этого уравнения, предложено уравнение движения, описывающее систему с произвольным спином и изоспином. В разделе 7 рассмотрено несколько типов канонических преобразований для уравнений типа Дирака (для случаев $P_\mu^2 \geq 0$, и $P_\mu^2 < 0$).

1. Основные определения и инварианты группы $P(1,4)$

Генераторы неоднородной группы де Ситтера P_μ, $J_{\nu\sigma}$ удовлетворяют перестановочным соотношениям[1]

$$\begin{aligned} &[P_\mu, P_\nu] = 0, \qquad [P_\mu, J_{\nu\sigma}]_- = i(g_{\mu\nu}P_\sigma - g_{\mu\sigma}P_\nu), \\ &[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}]_- = i(g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} + g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $g_{00} = 1$, $g_{kl} = -\delta_{kl}$; $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4$; $k, l = 1, 2, 3, 4$.

Можно показать, что группа $P(1,4)$ имеет три основных инварианта [5, 6]:

$$P^2 \equiv P_\mu^2 = P_0^2 - \boldsymbol{P}^2 - P_4^2; \tag{1.2}$$

$$W^2 \equiv \frac{1}{6}\mathcal{V}_{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{2}w_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{2}P_\mu^2 J_{\nu\alpha}^2 - P_\mu P_\nu J_{\mu\sigma} J_{\nu\sigma}, \tag{1.3}$$

$$V = -\frac{1}{4}J_{\mu\nu}w_{\mu\nu} = -\frac{1}{8}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma\alpha}J_{\mu\nu}J_{\rho\sigma}P_\alpha, \tag{1.4}$$

[1] Алгебры и соответствующие им группы обозначаются одинаковыми символами.

где антисимметричный тензор третьего ранга $\mathcal{V}_{\mu\nu\alpha}$ и фундаментальный антисимметричный тензор второго ранга имеют вид

$$\mathcal{V}_{\mu\nu\alpha} \equiv P_\mu J_{\nu\alpha} + P_\nu J_{\alpha\mu} + P_\alpha J_{\mu\nu}, \tag{1.5}$$

$$w_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{6}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta\gamma}\mathcal{V}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta\gamma}P_\alpha J_{\beta\gamma}. \tag{1.6}$$

Между генераторами группы $P(1,4)$ и тензором $w_{\mu\nu}$ можно установить следующие коммутационные соотношения:

$$[P_\mu, w_{\rho\sigma}]_- = 0, \qquad [J_{\mu\nu}, w_{\rho\sigma}]_- = i(g_{\mu\sigma}w_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}w_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}w_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}w_{\mu\rho}), \tag{1.7}$$

$$[w_{\mu\nu}, w_{\rho\sigma}]_- = i(g_{\mu\sigma}\varepsilon_{\nu\rho\alpha\beta\gamma} + g_{\nu\rho}\varepsilon_{\mu\sigma\alpha\beta\gamma} - g_{\mu\rho}\varepsilon_{\nu\sigma\alpha\beta\gamma} - g_{\nu\sigma}\varepsilon_{\mu\rho\alpha\beta\gamma})P_\alpha w_{\beta\gamma}. \tag{1.8}$$

В $(1+n)$-мерном пространстве Минковского определим два оператора пространственного отражения P:

$$P^{(n)}\Psi(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) = r^{(n)}\Psi(x_0, -x_1, -x_2, \ldots, -x_n), \tag{1.9}$$

$$P^{(n-1)}\Psi(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) = r^{(n-1)}\Psi(x_0, -x_1, -x_2, \ldots, -x_{n-1}, x_n), \tag{1.10}$$

причем

$$\begin{gathered} \left[P_0, P^{(n)}\right]_- = 0 = \left[J_{kl}, P^{(n)}\right]_-, \qquad \left[P_k, P^{(n)}\right]_+ = 0 = \left[J_{0k}, P^{(n)}\right]_+, \\ P^{(n)} \cdot P^{(n)} \sim 1, \qquad P^{(n-1)} \cdot P^{(n-1)} \sim 1, \end{gathered} \tag{1.11}$$

$$\begin{gathered} \left[P_0, P^{(n-1)}\right]_- = \left[P_n, P^{(n-1)}\right]_- = \left[J_{0n}, P^{(n-1)}\right]_- = \left[J_{ab}, P^{(n-1)}\right]_- = 0, \\ \left[P_a, P^{(n-1)}\right]_+ = \left[J_{nb}, P^{(n-1)}\right]_+ = \left[J_{0a}, P^{(n-1)}\right]_+ = 0, \end{gathered} \tag{1.12}$$

где индексы a и b принимают значения $a, b = 1, 2, \ldots, n-1$.

Как и в случае группы Пуанкаре $P(1,3)$, можно дать два неэквивалентных определения оператора отражения времени T [10]. Согласно Паули при замене $x_0 \to -x_0$ волновая функция преобразуется по закону

$$T^p\Psi(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \tau^p\Psi(-x_0, x_1, \ldots, x_n), \qquad T^p \cdot T^p \sim 1, \tag{1.13}$$

$$[P_k, T^p]_- = [J_{kl}, T^p]_- = 0, \qquad [P_0, T^p]_+ = [J_{0k}, T^p]_+ = 0. \tag{1.14}$$

Согласно Вигнеру волновая функция при отражении времени преобразуется по закону

$$T^\omega\Psi(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \tau^\omega\Psi(-x_0, x_1, \ldots, x_n), \qquad T^\omega \cdot T^\omega \sim 1, \tag{1.15}$$

$$[P_k, T^\omega]_+ = 0 = [J_{kl}, T^\omega]_+, \qquad [P_0, T^\omega]_- = 0 = [J_{0k}, T^\omega]_-. \tag{1.16}$$

Оператор зарядового сопряжения определяется как

$$C\Psi(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \tau^c\overset{*}{\Psi}(x_0, x_1, \ldots, x_n), \qquad C^2 \sim 1, \tag{1.17}$$

$$[P_\mu, C]_+ = 0 = [J_{\mu\nu}, C]_+. \tag{1.18}$$

Размерность матриц $r^{(n)}$, $r^{(n-1)}$, τ^p, τ^ω и τ^c зависит от размерности по спиновым индексам представления группы $P(1,n)$.

В дальнейшем будем рассматривать только операцию $P^{(n-1)}$, поскольку в пространстве Минковского размерности $(1+2n)$ — отражение всех пространственных осей $P^{(2n)}$ — сводится к повороту, поэтому всякое уравнение, инвариантное относительно группы $P(1,2n)$, будет $P^{(2n)}$-инвариантно.

2. Представления полной группы $\widetilde{P}(1,4)$ для случая $P^2>0$

В том случае, когда инвариант $P^2 \equiv P_\mu^2 = \varkappa^2 > 0$, кроме основных инвариантов (1.3) и (1.4), имеется дополнительный инвариант группы $P(1,4)$ — оператор знака энергии

$$\hat{\mathcal{E}}_1 = \frac{P_0}{|P_0|} = \frac{P_0}{E_1}, \qquad E_1 = \sqrt{p^2 + p_4^2 + \varkappa^2}, \tag{2.1}$$

где $\varkappa$ — постоянная величина, $p_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k}$. Малой группой в этом случае является компактная группа вращений в четырехмерном евклидовом пространстве $O(4)$, которая локально изоморфна группе $SU(2)\otimes SU(2)$. Из этого следует, что группа $P(1,4)$ является нетривиальным объединением группы Пуанкаре и изотонической группы внутренних симметрий. Отметим, что одну из групп $SU(2)$ можно, вообще говоря, связывать, например, с W-спином. В дальнейшем, однако, мы будем связывать ее с изоспином.

В системе "покоя", где все $p_k=0$, инварианты W^2 и V связаны с инвариантами группы $O(4)$ следующими соотношениями:

$$W^2 = 2P_\mu^2(\boldsymbol{S}^2 + \boldsymbol{T}^2), \tag{2.2}$$

$$V = \varepsilon_1\sqrt{P_\mu^2}(\boldsymbol{S}^2 - \boldsymbol{T}^2), \tag{2.3}$$

где операторы $\boldsymbol{S} \equiv (S_1, S_2, S_3)$, $\boldsymbol{T} \equiv (T_1, T_2, T_3)$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} S_a &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}S_{bc} + S_{4a}\right), \\ T_a &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}S_{bc} - S_{4a}\right), \qquad a,b,c = 1,2,3, \end{aligned} \tag{2.4}$$

S_{kl} — генераторы группы $O(4)$.

Все неприводимые представления класса I ($P^2>0$) унитарны, конечномерны и задаются числами s, τ, ε_1. Операторы $\boldsymbol{S}^2$, $\boldsymbol{T}^2$ и $\hat{\mathcal{E}}_1$ для неприводимых представлений $P(1,4)$ кратны единичным операторам

$$\boldsymbol{S}^2 = s(s+1)\cdot 1, \qquad \boldsymbol{T} = \tau(\tau+1)\cdot 1, \qquad \hat{\mathcal{E}}_1 = \varepsilon_1 \cdot 1, \qquad \varepsilon_1 = \pm 1. \tag{2.5}$$

Числа s и τ, принимающие целые и полуцелые положительные значения, отождествляются со спином и изоспином частицы. Неприводимые представления класса I будем обозначать через $D^{\varepsilon_1}(s,\tau,\varkappa)$.

Используя методику работ [9, 10, 11], можно найти канонический вид типа Фолди–Широкова для генераторов P_μ и $J_{\mu\nu}$. Для представления $D^{\varepsilon_1}(s,\tau,\varkappa)$ они имеют вид

$$
\begin{gathered}
P_0=\varepsilon_1 E_1, \qquad P_k=p_k=-i\frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad J_{kl}=x_k p_l - x_l p_k + S_{kl},\\
J_{0k}=x_0 p_k-\frac{\varepsilon_1}{2}(x_k E_1+E_1 x_k)-\varepsilon_1\frac{S_{kl}p_l}{E_1+\varkappa},
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

где операторы S_{kl} реализуют неприводимое представление $D(s,\tau)$ группы $O(4)$. Помимо двух представлений $D^+(s,\tau,\varkappa)$ и $D^-(s,\tau,\varkappa)$, задаваемых формулой (2.6), можно построить (с помощью операторов T^p и $P^{(3)}$) два других представления, неэквивалентных представлениям Фолди–Широкова (2.6), генераторы P_μ и $J_{\mu\nu}$ для этих представлений задаются формулами

$$
\begin{gathered}
P_0=E_1, \qquad P_a=p_a, \qquad P_4=-p_4,\\
J_{ab}=x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \qquad J_{4a}=x_a p_4 - x_4 p_a - S_{4b},\\
J_{0a}=x_0 p_a-\frac{1}{2}(x_a E_1+E_1 x_a)-\frac{S_{ab}p_b+S_{a4}p_4}{E_1+\varkappa},\\
J_{04}=-x_0 p_4+\frac{1}{2}(x_4 E_1+E_1 x_4)+\frac{S_{4b}p_b}{E_1+\varkappa},
\end{gathered}
\tag{2.7}
$$

и

$$
\begin{gathered}
P_0=-E_1, \qquad P_a=p_a, \qquad P_4=-p_4,\\
J_{ab}=x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \qquad J_{4a}=x_a p_4 - x_4 p_a - S_{4b},\\
J_{0a}=-x_0 p_a+\frac{1}{2}(x_a E_1+E_1 x_a)+\frac{S_{ab}p_b+S_{a4}p_4}{E_1+\varkappa},\\
J_{04}=x_0 p_4-\frac{1}{2}(x_4 E_1+E_1 x_4)-\frac{S_{4b}p_b}{E_1+\varkappa}.
\end{gathered}
\tag{2.8}
$$

Представления алгебры $P(1,4)$, задаваемые формулами (2.7) и (2.9), будем обозначать через $D^+(\tau,s)$ и $D^-(\tau,s)$.

Операторы (2.6)–(2.8) эрмитовы в скалярном произведении

$$
(\Phi,\Phi')=\sum_{s_3=-s,\tau_3=-\tau}^{s,\tau}\int d^4x\,\overset{*}{\Phi}(x_0,\boldsymbol{x},x_4,s_3,\tau_3)\Phi'(x_0,\boldsymbol{x},x_4,s_3,\tau_3)
\tag{2.9}
$$

или (в p-представлении)

$$
\begin{gathered}
(\varphi,\varphi')=\sum_{s_3=-s}^{s}\int d^3p\;X(\boldsymbol{p},s_3;\tau_3,s,\varepsilon_1,\varkappa),\\
X\equiv\sum_{\tau_3=-\tau}^{\tau}\int\frac{dp_4}{2E_1}\langle\varphi|\boldsymbol{p},p_4,s_3,\tau_3;s,\tau,\varepsilon_1,\varkappa\rangle\langle\boldsymbol{p},p_4,s_3,\tau_3;s,\tau,\varepsilon_1,\varkappa|\varphi'\rangle.
\end{gathered}
\tag{2.10}
$$

Генераторы группы $P(1,4)$, которые заданы в пространстве, где реализуется прямая сумма четырех неприводимых представлений

$$
D^+(s,\tau,\varkappa)\oplus D^-(s,\tau,\varkappa)\oplus D^+(\tau,s,\varkappa)\oplus D^-(\tau,s,\varkappa),
\tag{2.11}
$$

имеют вид

$$
\begin{gathered}
\widetilde{P}_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_1 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{P}_a = \begin{pmatrix} p_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_a \end{pmatrix}, \\
\widetilde{P}_4 = \begin{pmatrix} p_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_4 \end{pmatrix}, \\
\widetilde{J}_{ab} = \begin{pmatrix} J_{ab} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{ab} \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{J}_{4a} = \begin{pmatrix} J_{4a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{4a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{4a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_{4a} \end{pmatrix}, \\
\widetilde{J}_{0a} = \begin{pmatrix} J_{0a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J_{0a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{0a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_{0a} \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{J}_{04} = \begin{pmatrix} J_{04} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J_{04} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{04} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{04} \end{pmatrix},
\end{gathered}
\tag{2.12}
$$

где операторы $J_{\mu\nu}$ задаются формулой (2.6) при значении $\varepsilon_1 = 1$.

Из определения (1.10) и коммутационных соотношений (1.12) следует, что если вектор $\Psi^{\varepsilon_1}_{s,\tau}(x)$ принадлежит пространству $\{\Psi^{\varepsilon_1}_{s}(x)\}$, где реализуется представление $D^{\varepsilon_1}(s,\tau,\varkappa)$, то вектор $P^{(3)}\Psi^{\varepsilon_1}_{s}(x)$ принадлежит пространству $\{\Psi^{\varepsilon_1}_{s}(x)\}$, т.е. пространству, где реализуется представление $D^{\varepsilon_1}(\tau,s,\varkappa)$. Это означает, что, например, пространство $\{\Psi^{+}_{s,\tau}\}$ неинвариантно относительно оператора $P^{(3)}$.

Из определения (1.13) и соотношений (1.14) следует, что если вектор $\Psi^{+}_{s,\tau}(x) \in \{\Psi^{+}_{s,\tau}\}$, то вектор $T^p\Psi^{+}_{s,\tau}(x) \in \{\Psi^{-}_{s,\tau}\}$. Проведя аналогичные рассуждения для операторов T^ω и C, можно прийти к следующей схеме зацеплений неприводимых представлений группы $P(1,4)$:

$$
\begin{array}{ccc}
D^+(s,\tau,\varkappa) & \overset{P^{(3)}}{\longleftrightarrow} & D^+(\tau,s,\varkappa) \\
T^p \updownarrow C & & C \updownarrow T^p \\
D^-(s,\tau,\varkappa) & \overset{P^{(3)}}{\longleftrightarrow} & D^-(\tau,s,\varkappa).
\end{array}
\tag{2.13}
$$

Итак, из этой схемы вытекает следующий результат: *Неприводимое представление полной неоднородной группы де Ситтера $\widetilde{P}(1,4)$ (для $s \neq \tau$) для класса I реализуется в пространстве, где реализуется прямая сумма (2.11) неприводимых представлений ограниченной группы $P(1,4)$, причем генераторы $\widetilde{P}_\mu$ и $\widetilde{J}_{\mu\nu}$ группы $\widetilde{P}(1,4)$ имеют вид (2.12).*

В том случае, когда $s = \tau$, неприводимое представление группы $\widetilde{P}(1,4)$ реализуется в пространстве, где реализуется прямая сумма двух неприводимых представлений ограниченной группы $P(1,4)$

$$
D^+(s=\tau,\tau) \oplus D^-(s=\tau,\tau,). \tag{2.14}
$$

Зная явный вид генераторов группы $\widetilde{P}(1,4)$ (явный вид дискретных операторов мы здесь не приводим), нетрудно теперь выписать квантовомеханические уравнения, которые полностью инвариантны или частично инвариантны относительно дискретных преобразований.

Уравнение, на решениях которого реализуется неприводимое представление (2.11) группы $\widetilde{P}(1,4)$ имеет вид

$$i\frac{\partial\widetilde{\Phi}(x_0,\boldsymbol{x},x_4)}{\partial x_0}=\widetilde{\mathcal{H}}\widetilde{\Phi}(x,\boldsymbol{x},x_4), \tag{2.15}$$

где волновая функция $\widetilde{\Phi}$ имеет $4(2s+1)(2\tau+1)$ компонент. Компоненты ее нумеруются числами s_3 и τ_3 $(-s\le s_3\le s_3\le s,\ -\tau\le\tau_3\le\tau)$, а оператор $\widetilde{\mathcal{H}}\equiv\widetilde{P}_0$ имеет вид

$$\widetilde{\mathcal{H}}=\widetilde{\beta}E_1,\qquad \widetilde{\beta}=\begin{pmatrix}\hat{1}&0&0&0\\0&-\hat{1}&0&0\\0&0&\hat{1}&0\\0&0&0&-\hat{1}\end{pmatrix},$$

$\hat{1}$ — единичная матрица размерности $(2s{+}1)(2\tau{+}1)$. Каноническое уравнение (2.15) не имеет явно инвариантной формы, но несмотря на это оно инвариантно относительно группы $\widetilde{P}(1,4)$, поскольку выполняется условие

$$\left[i\frac{\partial}{\partial x_0}-\widetilde{\mathcal{H}},\widetilde{Q}\right]_-\widetilde{\Phi}(x_0,\boldsymbol{x},x_4)=0, \tag{2.16}$$

где $\widetilde{\Phi}$ — любое решение уравнения (2.15), а $\widetilde{Q}$ — любой оператор из алгебры $\widetilde{P}(1,4)$. Выполнение условия (2.16) означает, что множество всех решений уравнения (2.15) $\{\widetilde{\Phi}\}$ инвариантно относительно алгебры $\widetilde{P}(1,4)$. Уравнение (2.15) описывает не одну частицу, как соответствующее уравнение в случае группы Пуанкаре $P(1,3)$, а совокупность частиц — изотопический мультиплет частиц.

Приведем еще один пример уравнения, инвариантного относительно группы $P(1,4)$, но которое только частично T-, P-инвариантно. Уравнение, которое $P^{(4)}$-, T^p-, C-инвариантно, но $P^{(3)}$-, $P^{(3)}\cdot T^{\omega}$-неинвариантно, имеет вид

$$i\frac{\partial\Phi(x_0,\boldsymbol{x},x_4)}{\partial x_0}=\mathcal{H}\Phi(x_0,\boldsymbol{x},x_4)=\beta\sqrt{\boldsymbol{p}^2+p_4^2+\varkappa^2}\,\Phi(x_0,\boldsymbol{x},x_4), \tag{2.17}$$

где $\beta=\begin{pmatrix}\hat{1}&0\\0&-\hat{1}\end{pmatrix}$, $\Phi(x_0,\boldsymbol{x},x_4)$ — $2(2s+1)(2\tau+1)$-компонентный вектор, преобразующийся по представлению $D^+(s,\tau)\oplus D^-(s,\tau)$. Генераторы группы $P(1,4)$ для указанного представления совпадают с (2.7), где следует сделать замену

$$\varepsilon_1\to\beta,\qquad S_{kl}\to\begin{pmatrix}S_{kl}&0\\0&S_{kl}\end{pmatrix}.$$

Уравнение на группе $P(1,4)$, которое $P^{(4)}$-, T^{ω}-инвариантно, но $P^{(3)}$-, T^p-, C-неинвариантно, формально совпадает с уравнением (2.17), однако волновая функция Φ преобразуется при этой по представлению $D^+(s,\tau)\oplus D^-(\tau,s,\varkappa)$ (или

$D^+(\tau, s, \varkappa) \oplus D^-(s, \tau, \varkappa)$), а генераторы группы $\widetilde{P}(1,4)$ строятся из операторов (2.6) (при $\varepsilon_1 = +1$) и операторов (2.8). Как будет показано в разделе 6, именно по таким прямым суммам преобразуются волновые функции в уравнении Дирака в случае группы $P(1,4)$.

3. Представления группы $\widetilde{P}(1,4)$ для случая $P^2 = 0$

В том случае, когда инвариант $P^2 = P_0^2 - P_a^2 - P_4^2 = 0$ и не все $P_k = 0$, дополнительным инвариантом группы является также оператор знака энергии

$$\hat{\mathcal{E}}_2 = \frac{P_0}{E_2}, \qquad E_2 = \sqrt{p_a^2 + p_4^2}, \tag{3.1}$$

поскольку спектр оператора P_0 имеет две ветви: $-\infty < p_0 < 0$ и $0 < p_0 < \infty$.

Малой группой в этом случае является группа трансляций и вращений в трехмерном евклидовом пространстве $P(3)$, а это означает, что инвариант W^2 будет иметь непрерывный спектр и ему, по-видимому, трудно придать приемлемый физический смысл. Ограничимся поэтому случаем, когда $W^2 = 0$, а значит и $V = 0$. Для этого случая малой группой является группа, изоморфная группе $O(3)$, поэтому все неприводимые представления $D^{\varepsilon_2}(s)$ группы $P(1,4)$ [5] унитарны, конечномерны и задаются числами $\varepsilon_2 = \pm 1$ и s ($s = 0, 1/2, 1, \ldots$).

Явный вид генераторов $P(1,4)$, который будет получен нами в разделе 7, выглядит как

$$\begin{aligned}
&P_0 = \varepsilon_2 E_2, \qquad P_k = p_k, \qquad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab},\\
&J_{a4} = x_a p_4 - x_4 p_a + e_4 \frac{S_{ab} p_b}{E_2 + |p_4|}, \qquad e_4 = \frac{p_4}{|p_4|},\\
&J_{04} = x_0 p_4 - \frac{\varepsilon_2}{2}[x_4, E_2]_+, \qquad J_{0a} = x_0 p_a - \frac{\varepsilon_2}{2}[x_a, E_2]_+ - \varepsilon_2 \frac{S_{ab} p_b}{E_2 + |p_4|}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

В этом классе при заданном s имеется только два неэквивалентных представления, так же как и для группы $P(1,3)$, *поэтому неприводимое представление полной группы* $\widetilde{P}(1,4)$ *будет реализовываться в пространстве, в котором реализуется представление* $D^+(s) \oplus D^-(s)$ *группы* $P(1,4)$. Явный вид генераторов P_μ и $J_{\mu\nu}$ в этом пространстве совпадает с (3.2), где следует сделать замену

$$\varepsilon_2 \to \beta = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix},$$

$\hat{1}$ — единичная матрица размерности $(2s+1)$. Схема зацеплений неприводимых представлений группы $P(1,4)$ в этом классе выглядит так:

$$D^+(s) \overset{T^p}{\longleftrightarrow} D^-(s).$$

Уравнение, инвариантное относительно группы $\widetilde{P}(1,4)$, имеет вид

$$i\frac{\partial \widetilde{\Phi}(x_0, \boldsymbol{x}, x_4)}{\partial t} = \widetilde{\mathcal{H}}\widetilde{\Phi}(x_0, \boldsymbol{x}, x_4) = \beta\sqrt{p_a^2 + p_4^2}\,\widetilde{\Phi}(x_0, \boldsymbol{x}, x_4), \tag{3.3}$$

где $\widetilde{\Phi}(x_0, \boldsymbol{x}, x_4)$ — $2(2s+1)$-компонентная величина, компоненты которой $\widetilde{\Phi}(x_0, \boldsymbol{x}, x_4, s_3)$ нумеруются индексом s_3 ($-s \le s_3 \le s$).

Уравнение (3.3) описывает симметричным образом частицу и античастицу с фиксированным спином s, но с нефиксированной массой $m = \sqrt{p_4^2}$.

4. Представления группы $\widetilde{P}(1,4)$ для случая $P_\mu^2 < 0$

Рассмотрим в этом разделе представления класса III, т.е. представление группы $P(1,4)$, когда $P_\mu^2 = -\eta^2$, η — действительное число. Особенностью этого класса является то, что, во-первых, оператор знака энергии не является инвариантом группы $P(1,4)$, поскольку спектр оператора P_0 лежит на всей действительной оси $-\infty < p_0 < \infty$, во-вторых, малой группой является некомпактная группа $O(1,3)$ — однородная группа Лоренца, все конечномерные неприводимые представления которой неунитарны.

Дополнительным инвариантом группы $P(1,4)$ в этом классе является оператор "знака импульса". Действительно, оператор P_k^2 является положительным оператором и спектр его лежит на вещественной оси $[\eta^2, \infty)$, поэтому корень квадратный из этого оператора $\sqrt{P_k^2}$ на вещественной оси имеет точки регулярности $(-\eta, \eta)$.

Таким образом, для представлений класса III группы $P(1,4)$ (или: $P(1,n)$) дополнительным инвариантом является оператор[2]

$$\hat{\mathcal{E}}_3 = \operatorname{sign} \sqrt{P_k^2} = \operatorname{sign} \sqrt{P_0^2 + \eta^2}. \tag{4.1}$$

Инварианты W^2 и V в допустимой в этом классе системе отсчета ($p_0 = p_a = 0$) имеют вид

$$W^2 = -P_\mu^2(\boldsymbol{N}^2 - \boldsymbol{L}^2) = \eta^2(\boldsymbol{N}^2 - \boldsymbol{L}^2), \tag{4.2}$$

$$V = \sqrt{-P_\mu^2}\boldsymbol{L}\boldsymbol{N} = \hat{\mathcal{E}}_3\eta\boldsymbol{L}\boldsymbol{N}, \qquad \hat{\mathcal{E}}_3 = \frac{P_4}{|P_4|}, \tag{4.3}$$

где

$$\boldsymbol{L} \equiv (J_{23}, J_{31}, J_{12}), \qquad \boldsymbol{N} \equiv (J_{01}, J_{02}, J_{03}). \tag{4.4}$$

Операторы $\boldsymbol{N}^2 - \boldsymbol{L}^2$ и $\boldsymbol{L}\boldsymbol{N}$ являются, как известно, инвариантами группы $O(1,3)$, все представления которой полностью изучены Гельфандом к Наймарком [12]. Для неприводимых представлений группы

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{N} = il_0l_1 \cdot \hat{1}, \qquad \boldsymbol{N}^2 - \boldsymbol{L}^2 = (1 - l_0^2 - l_1^2) \cdot \hat{1}, \tag{4.5}$$

где l_0 — целое или полуцелое число ($l_0 = 0, 1/2, 1, 2, \ldots$), а l_1 — любое, вообще говоря, комплексное число (более подробно см. [12]).

Таким образом, в пространстве, где реализуется неприводимое представление группы $P(1,4)$,

$$\begin{aligned} &P_\mu^2 = -\eta^2 \cdot \hat{1}, \qquad \hat{\mathcal{E}}_3 = \varepsilon_3 \cdot \hat{1}, \qquad \varepsilon_3 = \pm 1, \\ &W^2 = \eta^2(1 - l_0^2 - l_1^2) \cdot \hat{1}, \qquad V = i\varepsilon_3\eta l_0 l_1 \cdot \hat{1}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Неприводимые представления группы $P(1,4)$ будем обозначать через $D^{\varepsilon_3}(l_0, l_1)$.

---

[2]В качестве дополнительного инварианта группы $P(1,4)$ можно выбрать также оператор $\hat{\mathcal{E}}_3' = \operatorname{sign} \sqrt{-P_\mu^2}$, который эквивалентен (4.1) (см. формулу (4.3)).

Из (4.6) вытекает, что неприводимые представления $D^{\varepsilon_3}(l_0, l_1)$ группы $P(1,4)$, как и группы $O(1,3)$, будут унитарны, если

1) l_1 — чисто мнимое (основная серия),

2) $l_0 = 0$, l_1 — действительное число и $|l_1| \leq 1$ (дополнительная серия).

Замечание. Для связи с неприводимыми представлениями класса I укажем, что неприводимые представления группы $O(1,3)$, как и группы $O(4)$, можно задавать парой чисел (s', τ'). Действительно, если определить операторы типа "спина" и "изоспина"

$$S'_a = \frac{1}{2}(L_a + iN_a), \qquad T'_a = \frac{1}{2}(L_a - iN_a),$$

то операторы $(\boldsymbol{S}')^2$ и $(\boldsymbol{T}')^2$ для неприводимых представлений кратны единичным операторам

$$(\boldsymbol{S}')^2 = s'(s'+1) \cdot \hat{1}, \qquad (\boldsymbol{T}')^2 = \tau'(\tau'+1) \cdot \hat{1}.$$

Числа s' и τ' связаны с числами Гельфанда–Наймарка l_0 и l_1 соотношениями

$$l_0 = s' - \tau', \qquad l_1 = s' + \tau' + 1. \tag{4.7}$$

Явный вид генераторов P_μ и $J_{\mu\nu}$ для класса III, который будет получен в разделе 7, выглядит как

$$\begin{aligned}
&P_4 = \varepsilon_3 E_3, \qquad E_3 = \sqrt{p_0^2 - p_a^2 + \eta^2}, \qquad P_0 = p_0 = i\partial/\partial t, \qquad P_a = p_a,\\
&J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \qquad J_{0a} = x_0 p_a - x_a p_0 - iS_{4a},\\
&J_{4a} = x_4 p_a - \frac{\varepsilon_3}{2}(x_a E_3 + E_3 x_a) + \frac{S_{ab} p_b + iS_{a4} p_0}{E_3 + \eta},\\
&J_{40} = x_4 p_0 - \frac{\varepsilon_3}{2}(x_0 E_3 + E_3 x_0) - \varepsilon_3 \frac{iS_{4a} p_a}{E_3 + \eta},
\end{aligned} \tag{4.8}$$

где операторы S_{ab}, iS_{4a} реализуют неприводимое представление алгебры $O(1,3)$.

Представление (4.8) отличается от соответствующего представления типа Широкова для группы $P(1,4)$ [5] тем, что нами выделен не оператор P_0, а оператор P_4. Такое выделение оператора P_4 (или P_3 в случае группы $P(1,3)$) является удобным, поскольку в классе III, для всех групп типа $P(1,n)$ "энергия частицы" может принимать любые значения от $-\infty$ до ∞, в то время как квадрат "импульса частицы" $p_k^2 \geq \eta^2$.

Зная явный вид генераторов P_μ и $J_{\mu\nu}$ для двух неприводимых представлений группы $P(1,4)$ (4.8), нетрудно построить с помощью операторов $P^{(3)}$ (или T^p), два других неэквивалентных представления. Генераторы группы для этих представлений имеют вид

$$\begin{aligned}
&P'_4 = P_4 = \varepsilon_3 E_3, \qquad P'_0 = P_0 = p_0, \qquad P'_a = P_a = -p_a,\\
&J'_{ab} = J_{ab}, \qquad J'_{4a} = -J_{4a}, \qquad J'_{0a} = -J_{0a}, \qquad J'_{40} = J_{40},
\end{aligned} \tag{4.9}$$

где операторы $J_{\mu\nu}$ задаются формулой (4.8).

Если провести относительно операторов P, T, C точно такие рассуждения, как и в разделе 2, то мы придем к следующему выводу: *в пространстве, где реализуется прямая сумма четырех неприводимых представлений группы* $P(1,4)$

$$D^+(l_0, l_1) \oplus D^-(l_0, l_1) \oplus D^+(-l_0, l_1) \oplus D^-(-l_0, l_1) \tag{4.10}$$

или

$$D^+(l_0,l_1)\oplus D^-(l_0,l_1)\oplus D^+(l_0,-l_1)\oplus D^-(l_0,-l_1), \tag{4.10$'$}$$

реализуется неприводимое представление полной группы $\widetilde{P}(1,4)$.

Схема зацеплений неприводимых представлений группы $P(1,4)$ операторами P, T, C для класса III такая:

$$\begin{array}{ccc} D^+(l_0,l_1) & \overset{T^p,P^{(3)}}{\longleftrightarrow} & D^+(-l_0,l_1) \\ T^\omega \updownarrow & C\swarrow\!\!\!\nearrow & \updownarrow T^\omega \\ D^-(l_0,l_1) & \overset{T^p,P^{(3)}}{\longleftrightarrow} & D^-(l_0,l_1). \end{array} \tag{4.11}$$

Операторы $\widetilde{P}_\mu$, $\widetilde{J}_{\mu\nu}$ в пространстве, где реализуется приводимое представление (4.10) группы $P(1,4)$ имеют вид

$$\widetilde{P}_4=\begin{pmatrix} E_3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -E_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & E_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -E_3\end{pmatrix},\qquad \widetilde{P}_0=\begin{pmatrix} p_0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & p_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -p_0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -p_0\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{P}_a=\begin{pmatrix} p_a & 0 & 0 & 0\\ 0 & p_a & 0 & 0\\ 0 & 0 & p_a & 0\\ 0 & 0 & 0 & p_a\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{J}_{ab}=\begin{pmatrix} J_{ab} & 0 & 0 & 0\\ 0 & J_{ab} & 0 & 0\\ 0 & 0 & J_{ab} & 0\\ 0 & 0 & 0 & J_{ab}\end{pmatrix},\qquad \widetilde{J}_{4a}=\begin{pmatrix} J_{4a} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -J_{4a} & 0 & 0\\ 0 & 0 & J_{4a} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -J_{4a}\end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

$$\widetilde{J}_{0a}=\begin{pmatrix} J_{0a} & 0 & 0 & 0\\ 0 & J_{0a} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -J_{0a} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -J_{0a}\end{pmatrix},\qquad \widetilde{J}_{04}=\begin{pmatrix} J_{04} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -J_{04} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -J_{04} & 0\\ 0 & 0 & 0 & J_{04}\end{pmatrix},$$

где операторы $J_{\mu\nu}$ задаются соотношениями (4.8) (при $\varepsilon_3=+1$).

Для тех представлений, для которых $l_0=0$, $l_1\neq 0$ или $l_1=0$, $l_0\neq 0$ (именно к таким случаям относятся майорановские представления $D(0,1/2)$ и $D(1/2,0)$), неприводимое представление полной группы $\widetilde{P}(1,4)$ реализуется в пространстве, где реализуется прямая сумма двух неприводимых групп

$$D^+(0,l_1)\oplus D^-(0,l_1) \tag{4.13}$$

или

$$D^+(l_0,0)\oplus D^-(-l_0,0). \tag{4.14}$$

Уравнения движения, инвариантные относительно группы $\widetilde{P}(1,4)$, на решениях которого реализуется представление (4.10), существенно отличается (даже по форме) от соответствующих уравнений в I и II классах. Действительно, в классе III каноническое уравнение движения имеет необычный вид

$$-i\frac{\partial\widetilde{\Phi}(x_0,\boldsymbol{x},x_4)}{\partial x_4}=\widetilde{P}_4\widetilde{\Phi}(x_0,\boldsymbol{x},x_4)=\widetilde{\beta}E_3\widetilde{\Phi}(x_0,\boldsymbol{x},x_4), \tag{4.15}$$

где

$$\widetilde{\beta}=\begin{pmatrix}\hat{1}&0&0&0\\0&-\hat{1}&0&0\\0&0&\hat{1}&0\\0&0&0&-\hat{1}\end{pmatrix},$$

а волновая функция $\widetilde{\Phi}(x_0,\boldsymbol{x},x_4)$ преобразуется при преобразованиях из группы $\widetilde{P}(1,4)$ по представлению (4.10) или (4.10$'$). Имея явный вид генераторов (4.12), можно непосредственно проверить, что уравнение (4.15) инвариантно относительно группы $\widetilde{P}(1,4)$, поскольку выполняется условие

$$\left[\widetilde{P}_4+i\frac{\partial}{\partial x_4},\widetilde{Q}\right]_-\widetilde{\Phi}(x_0,\boldsymbol{x},x_4)=0. \tag{4.16}$$

Волновую функцию $\widetilde{\Phi}(x_0,\boldsymbol{x},x_4)$ можно представить как “четырехбалочную” величину

$$\widetilde{\Phi}=\begin{pmatrix}\Phi^{+}_{l_0,l_1}\\ \Phi^{-}_{l_0,l_1}\\ \Phi^{+}_{-l_0,l_1}\\ \Phi^{-}_{-l_0,l_1}\end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

где функция $\Phi^{\varepsilon_3}_{\pm l_0,l_1}(x_0,\boldsymbol{x},x_4)$ принадлежит подпространству пространства $\{\widetilde{\Phi}\}$, на котором реализуется неприводимое представление $D^{\varepsilon_3}(\pm l_0,l_1)$. Функция $\Phi^{\varepsilon_3}_{l_0,l_1}$ имеет конечное или бесконечное число компонент $\Phi^{\varepsilon_3}_{l_0,l_1}(x_0,\boldsymbol{x},x_4,l,l_3)$ в зависимости от того, какие числа l_0, l_1, поскольку числа l и l_3 могут принимать значения [12]

$$l=l_0,l_0+1,l_0+2,\ldots,\qquad -l\le l_3\le l.$$

Если потребовать, чтобы на множестве всех решений $\{\widetilde{\Phi}\}$ уравнения (4.15) реализовалось унитарное представление группы $P(1,4)$, то волновая функция $\widetilde{\Phi}$ будет иметь бесконечное число компонент. Если уравнение (4.15) имеет конечное число компонент, то на множестве $\{\widetilde{\Phi}\}$ реализуется неунитарное представление группы $P(1,4)$.

Уравнение движения, которое инвариантно относительно группы $P(1,4)$, но только частично P-, T-, C-инвариантно, имеет вид

$$-i\frac{\partial\Phi(x_0,\boldsymbol{x},x_4)}{\partial x_4}=\beta E_3\Phi(x_0,\boldsymbol{x},x_4),\qquad \beta=\begin{pmatrix}\hat{1}&0\\0&-\hat{1}\end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Генераторы группы $P(1,4)$ на решениях $\{\Phi\}$ уравнения (4.18) имеют вид (4.8), где произведена замена $\varepsilon_3 \to \beta$. На множестве $\{\Phi\}$ реализуется представление $D^+(l_0,l_1) \oplus D^-(l_0,l_1)$, а это означает (см. схему (4.11)), что уравнение (4.18) T^ω-инвариантно, но $P^{(3)}$-, T^p-, C-неинвариантно. Имея схему зацеплений неприводимых представлений и явный вид генераторов группы $P(1,4)$, можно выписать и другие уравнения движения, которые будут только частично P-, T-, C-инвариантны.

5. Неканонические уравнения движения

В предыдущих разделах уравнения движения на группе $P(1,4)$ были получены с использованием инварианта группы P_μ^2. Так как все инварианты $P(1,4)$ "равноправны", естественно использовать для нахождения уравнения движения, например, инвариант W^2. Аналогичная идея была недавно использована (независимо) несколькими авторами [4, 13, 14] для нахождения уравнений движений, инвариантных относительно группы Пуанкаре $P(1,4)$.

Рассмотрим такое представление группы $P(1,4)$, когда "орбитальная" и "спин-изоспиновая" части операторов $J_{\mu\nu}$ разделены, т.е. представление типа Баргмана–Вигнера,

$$P_0 = p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad P_k = p_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k},$$
$$J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3,4, \tag{5.1}$$

где операторы $S_{\mu\nu}$ являются генераторами однородной группы де Ситтера $O(1,4)$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[S_{\mu\nu}, S_{\alpha\beta}] = i(g_{\mu\beta}S_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha}S_{\nu\beta} + g_{\nu\alpha}S_{\mu\beta} - g_{\nu\beta}S_{\mu\alpha}). \tag{5.2}$$

Особенностью представления (5.1) является то, что в таком представлении фундаментальный тензор $w_{\mu\nu}$ имеет очень простую структуру

$$w_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta\gamma}P^\alpha S^{\beta\gamma}. \tag{5.3}$$

Инвариант W^2 имеет вид

$$W^2 = \frac{1}{2}\left\{p_\mu^2 S_{\alpha\beta}^2 - p_\mu p_\nu\left(S^{\mu\sigma}S^{\nu\sigma} + S^{\nu\sigma}S^{\mu\sigma}\right)\right\}. \tag{5.4}$$

Из (5.4) ясно, что уравнение

$$\left\{S_{\alpha\beta}^2 p_\mu^2 - \left(S^{\mu\sigma}S^{\nu\sigma} + S^{\nu\sigma}S^{\mu\sigma}\right)p_\mu p_\nu - f\left(p_\mu^2, V\right)\right\}\Psi(t,\boldsymbol{x},x_4) = 0, \tag{5.5}$$

где $f\left(p_\mu^2, V\right)$ — некоторая функция от инвариантов P_μ^2, V инвариантно относительно группы $P(1,4)$ (или относительно группы $P(1,n)$, если $S_{\mu\nu}$ — генераторы группы $O(1,n)$). Поскольку представления группы $O(1,4)$ изучены [15], то явный вид матриц $S_{\mu\nu}$, по существу, известный. В зависимости от их явного вида на решениях уравнения (5.5) могут реализоваться как представления, для которых $p_\mu^2 \geq 0$, так и $p_\mu^2 < 0$.

На решениях уравнения (5,5), вообще говоря, реализуется приводимое представление группы $\widetilde{P}(1,4)$, поскольку мы не накладываем условия

$$p_\mu^2\Psi(t,\boldsymbol{x},x_4)=\begin{cases}\varkappa^2\Psi & \text{для класса I},\\ 0\Psi & \text{для класса II},\\ -\eta^2\Psi & \text{для класса III}.\end{cases}\tag{5.6}$$

Уравнение (5.5) имеет нетривиальные решения, если

$$\det\left\{S_{\alpha\beta}^2p_\mu^2-(S^{\mu\sigma}S^{\nu\sigma}+S^{\nu\sigma}S^{\mu\sigma})\,p_\mu p_\nu-f\left(p_\mu^2,V\right)\right\}=0.\tag{5.7}$$

Исходя из уравнения (5.5) можно получить спектр “масс” (точнее спектр энергий), который будет зависеть не только от спина, как это имеет место для уравнений типа Намбу [4, 14, 16], но и от изоспина. Действительно, в системе отсчета, где $p_k=0$, уравнение (5.5) для $f\left(p_\mu^2,V\right)=2dp_\mu^4$ имеет вид

$$P_0^2\left\{\boldsymbol{S}^2+\boldsymbol{T}^2-d\cdot P_0^2\right\}\Psi_0=0,\tag{5.8}$$

где d — постоянная величина. Это уравнение имеет нетривиальные решения лишь тогда, когда оператор P_0^2 имеет следующие собственные значения:

$$E_1^2=0,\tag{5.9}$$

$$E^{12}=2d^{-1}\{s(s+1)+\tau(\tau+1)\}.\tag{5.9$'$}$$

Ясно, что возрастающая ветвь (5.9$'$) (в зависимости от s и τ) является максимальной в рамках уравнения (5.5). Если в уравнении (5.5) положить $f\left(P_\mu^2,V\right)=\text{const}$, то получим убывающий спектр.

Таким образом, на основании уравнения (5.5) в рамках группы $P(1,4)$ отличие от уравнений типа Гельфанда–Яглома можно получать спектр масс, возрастающий со спином и изоспином.

Замечание. Используя псевдовектор Паули–Любанского w_μ, можно прийти к уравнению, ковариантному относительно группы Пуанкаре $P(1,3)$. Рассмотрим следующую ковариантную систему уравнений:

$$w_\mu\Psi_\pm(t,\boldsymbol{x})=sp_\mu\Psi_\pm(t,\boldsymbol{x}),\tag{5.10}$$

где вектор Паули–Любанского w_μ имеет вид

$$w_\mu=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}P^\nu S^{\alpha\beta},\qquad \mu,\nu,\alpha=0,1,2,3,\quad s=1/2,1,3/2,\ldots.\tag{5.11}$$

В трехмерной записи уравнение (5.12) имеет вид

$$(\boldsymbol{S}\boldsymbol{p})\Psi_\pm(t,\boldsymbol{x})=\pm sp_0\Psi_\pm(t,\boldsymbol{x})=\pm is\frac{\partial\Psi_\pm(t,\boldsymbol{x})}{\partial t},\tag{5.12}$$

$$\{p_0\boldsymbol{S}-i(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{S})\}\Psi_\pm(t,\boldsymbol{x})=\pm s\boldsymbol{p}\Psi(t,\boldsymbol{x}),\tag{5.13}$$

где волновая функция Ψ_+ (или Ψ_-) имеет $(2s+1)$ компонент, а $\boldsymbol{S}\equiv(S_{23},S_{31},S_{12})$.

Так как на решениях уравнения (5.10)

$$w_\mu^2\Psi(t,\boldsymbol{x})=0,\qquad p_\mu^2\Psi(t,\boldsymbol{x})=0,\tag{5.14}$$

то уравнение (5.10) описывает частицу (уравнение для Ψ_+) или античастицу (уравнение для Ψ_-) с массой, равной нулю, и с произвольным спином s. Это уравнение является ковариантным обобщением явно нековариантного, но релятивистски инвариантного уравнения Вейля–Хаммера–Гуда [17, 13].

6. P-, T-, C-свойства уравнений типа Дирака.

1. Простейшими уравнениями, которые явно инвариантны относительно группы $P(1,4)$, являются уравнения Дирака. Для наших целей удобно представить уравнения Дирака, имея в виду дальнейшее их обобщение, в такой форме

$$i\frac{\partial\Psi_+(t,\boldsymbol{x},x_4)}{\partial t} = \mathcal{H}_+\Psi_+(t,\boldsymbol{x},x_4), \tag{6.1}$$

$$i\frac{\partial\Psi_-(t,\boldsymbol{x},x_4)}{\partial t} = \mathcal{H}_-\Psi_-(t,\boldsymbol{x},x_4), \tag{6.1$'$}$$

$$\mathcal{H}_\pm = \lambda(S_{0k}p_k \pm S_{05}\varkappa), \qquad k=1,2,3,4,$$

где Ψ_+ (и Ψ_-) — четырехкомпонентный спинор,

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu), \qquad S_{\mu5} = \frac{i}{2}\gamma_\mu, \qquad \lambda = -2i. \tag{6.2}$$

Если четырехрядные матрицы γ_k выбрать антиэрмитовыми, а матрицу γ_0 – эрмитовой, то

$$\overset{\dagger}{S}_{kl} = S_{kl}, \qquad \overset{\dagger}{S}_{0k} = -S_{0k}, \qquad \overset{\dagger}{S}_{05} = -S_{05}, \qquad \overset{\dagger}{S}_{k5} = S_{k5}, \tag{6.3}$$

Из приведенной формы записи уравнений Дирака следует важное для дальнейшего предложение: на множестве решений уравнений (6.1) (или (6.1$'$)) реализуется представление группы $O(1,5)$.

Замечание 1. Приведенное предложение является частным случаем более общего результата: если матрицы L_μ в уравнениях типа Баба–Гельфанда–Яглома, инвариантных относительно группы $O(1,n)$, такие, что

$$[L_\mu, L_\nu]_- = iS_{\mu\nu},$$

то алгебра, состоящая из генераторов группы $O(1,n)$ и матриц L_μ, изоморфна алгебре $O(1,n+1) \supset O(1,n)$. Это замечание было отмечено автором в [18], а также в только что вышедшем препринте Мэтьюза [18], в котором рассматривается вопрос о CPT-инвариантности уравнений движений.

Замечание 2. Любое уравнение, которое инвариантно относительно алгебры $P(1,n)$, инвариантно также относительно алгебры $O(1,n+1)$ для случая $P^2 > 0$ или — $O(2,n)$ для случая $P^2 < 0$. Этот результат является следствием того, что множество решений уравнений (2.15) или (4.15), как это нетрудно видеть из условий (2.16) или (4.16), инвариантно относительно обертывающей алгебры, а значит инвариантно относительно оператора типа центра инерции [22]

$$Y_\mu^\pm = \frac{1}{2\sqrt{\pm P^2}}\left(P^\alpha J_{\mu\alpha} + J_{\mu\alpha}P^\alpha\right).$$

Операторы $J_{\mu\nu}$ и $Y_\mu^\pm$, как известно [22, 23], образуют алгебру $O(1,n+1)$ для случая $P^2 > 0$ или $O(2,n)$ для случая $P^2 < 0$. Если $P^2 = 0$, уравнения движения также инвариантны относительно алгебры $O(1,n+1)$ (или $O(2,n)$). Доказательство этого факта несколько сложнее, чем в предыдущих случаях, поэтому мы его здесь не приводим.

В отличие от уравнений Дирака на группе Пуанкаре $P(1,3)$ уравнения (6.1) и (6.1$'$) неэквивалентны. Этот факт станет очевидным, если заметить, что на множествах $\{\Psi_+\}$ и $\{\Psi_-\}$ реализуются следующие неэквивалентные представления группы $P(1,4)$:

$$D^+(s=1/2, \tau=0) \oplus D^-(s=0, \tau=1/2) \tag{6.4}$$

и

$$D^-(s=0, \tau=1/2) \oplus D^-(s=1/2, \tau=0). \tag{6.5}$$

Можно непосредственно проверить, что уравнения (6.1), (6.1$'$) инвариантны только относительно вигнеровского отражения времени

$$T^\omega \Psi(t, \boldsymbol{x}, x_4) = \tau^\omega \overset{*}{\Psi}(-t, \boldsymbol{x}, x_4), \tag{6.6}$$

где матрица $\tau^\omega = i\gamma_1\gamma_3$. Уравнения (6.1), (6.1$'$) инвариантны относительно операций $P^{(3)}$, T^p и C, поскольку не существует четырехрядных матриц $r^{(3)}$, τ^p и τ^c, которые бы удовлетворяли соотношениям (1.12), (1.14) и (1.18) (более подробно см. [8]). Ясно, что этот результат следует также из наших общих рассмотрений. Действительно, из схемы (2.13) следует, что если на решениях уравнения движения реализуется представление

$$D^+(s, \tau) \oplus D^-(\tau, s)$$

группы $P(1,4)$, то такое уравнение T^ω-инвариантно, но $P^{(3)}$-, T^p-, C-неинвариантно.

Рассмотрим теперь “прямую сумму” двух уравнений (6.1) и (6.1$'$), т.е. уравнение

$$i\frac{\partial \Psi(t, \boldsymbol{x}, x_4)}{\partial t} = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma_0\gamma_k & 0 \\ 0 & \gamma_0\gamma_k \end{pmatrix} p_k + \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & -\gamma_0 \end{pmatrix} \varkappa \right\} \Psi(t, \boldsymbol{x}, x_4), \tag{6.7}$$

где восьмикомпонентный спинор имеет вид

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \Psi_+(t, \boldsymbol{x}, x_4) \\ \Psi_-(t, \boldsymbol{x}, x_4) \end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться [8], что восьмикомпонентное уравнение (6.7) инвариантно относительно $P^{(3)}$-, T^p- и C-операций. Это также следует из схемы (2.13), поскольку на множестве $\{\Psi\}$ реализуется неприводимое представление группы

$$D^+(1/2, 0) \oplus D^-(0, 1/2) \oplus D^+(0, 1/2) \oplus D^-(1/2, 0). \tag{6.8}$$

Таким образом, простейшим линейным уравнением, инвариантным относительно полной неоднородной группы де Ситтера $\widetilde{P}(1,4)$, является восьмикомпонентное уравнение (6.7).

Пользуясь методом теории слияния де Бройля [20] и исходя из уравнения (6.7), можно найти все уравнения движения, которые описывают систему с произвольным спином и изоспином [21].

Запишем уравнение (6.7) в следующей форме:

$$i\frac{\partial\Psi(t,\boldsymbol{x},x_4)}{\partial t} = H\Psi(t,\boldsymbol{x},x_4) = \lambda\left(\widetilde{S}_{0k}p_k + \widetilde{S}_{05}\varkappa\right)\Psi(t,\boldsymbol{x},x_4), \tag{6.9}$$

где

$$\widetilde{S}_{0k} = \begin{pmatrix} S_{0k} & 0 \\ 0 & S_{0k} \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{S}_{0n+1} = \begin{pmatrix} S_{05} & 0 \\ 0 & -S_{05} \end{pmatrix}. \tag{6.10}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что операторы

$$\begin{gathered} P_0 \equiv H \equiv \lambda\left(\widetilde{S}_{0k}p_k + \widetilde{S}_{05}\varkappa\right), \qquad P_k = p_k, \\ J_{kl} = x_k p_l - x_l p_k + \widetilde{S}_{kl}, \qquad J_{0k} = x_0 p_k - \frac{1}{2}(x_k P_0 + P_0 x_k), \end{gathered} \tag{6.11}$$

$$\widetilde{S}_{kl} = \begin{pmatrix} S_{kl} & 0 \\ 0 & S_{kl} \end{pmatrix}, \tag{6.12}$$

заданные на множестве решений $\{\Psi\}$ уравнения (6.9), удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры $P(1,4)$ (1.1), если

$$[P_0, J_{0k}]_-\,\Psi = ip_k\Psi. \tag{6.13}$$

Если вычислить коммутатор $[P_0, J_{0k}]$, то получим, что на множестве $\{\Psi\}$ имеет место условие

$$p_k\Psi(t,\boldsymbol{x},x_4) = \lambda\left(\widetilde{S}_{k0}p_0 + \widetilde{S}_{kl}p^l + \widetilde{S}_{k5}\varkappa\right)\Psi(t,\boldsymbol{x},x_4). \tag{6.14}$$

Уравнения (6.9) и (6.14) можно записать в виде одной явно ковариантной системы уравнений

$$p_\mu\Psi(t,\boldsymbol{x},x_4) = \lambda\left(\widetilde{S}_{\mu\nu}p^\nu + \varkappa\widetilde{S}_{5\mu}\right)\Psi(t,\boldsymbol{x},x_4). \tag{6.15}$$

Множество всех решений $\{\Psi\}$ уравнения (6.15) инвариантно относительно алгебры $P(1,4)$, поскольку выполняется условие типа (2.16), т.е.

$$\left[\left\{p_\mu - \lambda\left(\widetilde{S}_{\mu\nu}p^\nu + \varkappa\widetilde{S}_{5\mu}\right)\right\}, \widetilde{Q}\right]_- \Psi(t,\boldsymbol{x},x_4) = 0. \tag{6.16}$$

Особенность приведенных рассуждений для уравнения (6.9) состоит в том, что все они справедливы независимо от явного вида матриц $S_{\mu\nu}$ и $S_{\mu 5}$ (например, вида (6.2)), т.е. для того чтобы операторы (6.11) реализовали на множестве решений уравнения (6.15) представление алгебры $P(1,4)$, необходимо лишь, чтобы эти матрицы реализовали (неприводимое или приводимое) представление алгебры $O(1,5)$. Этот факт позволяет нам сделать следующий вывод: *уравнение (6.15) (где уже λ — некоторая величина, зависящая от выбора неприводимого представления алгебры $O(1,5)$) является явно ковариантным уравнением движения относительно неоднородной группы де Ситтера, если матрицы $\widetilde{S}_{\mu\nu}$ и $\widetilde{S}_{5\mu}$ реализуют представление алгебры $O(1,5)$, причем эти матрицы строятся из матриц $S_{\mu\nu}$ и $S_{\mu 5}$, которые реализуют неприводимое представление алгебры $O(1,5)$, по формулам (6.10) и (6.12).*

Другой вывод уравнения (6.15) и его детальный теоретико-групповой анализ будет приведен во второй части настоящей работы.

Замечание 3. В том случае, когда в системе уравнений (6.15) положить $\varkappa = 0$, то система распадается на две тождественные системы вида

$$p_\mu \Psi(t, \boldsymbol{x}, x_4) = \lambda S_{\mu\nu} p^\nu \Psi(t, \boldsymbol{x}, x_4). \tag{6.17}$$

Уравнение (6.17) было предложено и детально исследовано Бакри [19] исходя из совершенно других положений. Как следует из наших рассмотрений, уравнение (6.17) является, по существу, обобщением уравнения Дирака (6.1) с $\varkappa = 0$; иными словами, это другой способ "извлечения квадратного корня" из уравнения

$$p_\mu^2 \Psi = \left(p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - p_4^2\right) \Psi,$$

который для частицы со спином 1/2 приводит также к уравнению Дирака.

2. До сих пор мы рассматривали уравнения типа Дирака, на решениях которых реализуются представления группы $P(1,4)$, принадлежащие классам I и II ($P^2 = \varkappa^2 > 0$ и $P^2 = 0$). Рассмотрим теперь кратко уравнения Дирака в пятимерном подходе, на решениях которых реализуются представления класса III ($P^2 = -\eta^2 < 0$).

Уравнения Дирака в этом классе выглядят так:

$$i\frac{\partial \Psi_\pm(t, \boldsymbol{x}, x_4)}{\partial t} = \lambda(S_{0k} p_k \pm i S_{05} \eta) \Psi_\pm(t, \boldsymbol{x}, x_4), \tag{6.18}$$

т.е. уравнения (6.18) получаются из уравнений (6.1) и (6.1$'$) заменой $\varkappa \to i\eta$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что уравнения (6.18) C-инвариантны, но $P^{(3)}$-, T^p-, T^ω-неинвариантны. Этот результат также следует из схемы зацеплений (4.11), если учесть, что на множествах $\{\Psi_+\}$ и $\{\Psi_-\}$ реализуются конечномерные неунитарные представления

$$D^+\left(l_0 = \frac{1}{2}, l_1 = \frac{3}{2}, \eta\right) \oplus D^-\left(l_0 = -\frac{1}{2}, l_1 = \frac{3}{2}, \eta\right) \tag{6.19}$$

и

$$D^+\left(l_0 = -\frac{1}{2}, l_1 = \frac{3}{2}, \eta\right) \oplus D^-\left(l_0 = \frac{1}{2}, l_1 = \frac{3}{2}, \eta\right) \tag{6.20}$$

группы $P(1,4)$.

В третьем классе аналогично, как и в первом классе, простейшим P-, T-, C-инвариантным уравнением является также восьмикомпонентное уравнение

$$i\frac{\partial \Psi(t, \boldsymbol{x}, x_4)}{\partial t} = \mathcal{H}(\eta) \Psi(t, \boldsymbol{x}, x_4), \tag{6.21}$$

где

$$\mathcal{H}(\eta) = \lambda\left(\widetilde{S}_{0k} p_k + i\widetilde{S}_{05}\eta\right). \tag{6.22}$$

Если для уравнения (6.21) буквально повторить все те рассуждения, которые были приведены для уравнения (6.9), то мы придем к уравнению типа (6.15)

$$p_\mu \Psi(t, \boldsymbol{x}, x_4) = \lambda\left(\widetilde{S}_{\mu\nu} p^\nu + i\eta \widetilde{S}_{5\mu}\right) \Psi(t, \boldsymbol{x}, x_4). \tag{6.23}$$

На решениях уравнения (6.23) $\{\Psi\}$ реализуется унитарное представление группы $P(1,4)$ только в том случае, если на $\{\Psi\}$ реализуется унитарное, а значит бесконечномерное, представление группы $O(1,3)$ (см. раздел 4). Это означает, что уравнение (6.23) будет иметь в этом случае бесконечное число компонент.

7. Канонические преобразования уравнения типа Дирака

1. Рассмотрим в этом разделе канонические преобразования только над четырехкомпонентным уравнением Дирака.

Унитарные, а значит канонические, преобразования Фолди–Воутхойзена–Тани (FW) и Мендловича–Чини–Тушека (M) можно естественно и просто обобщить и на уравнения Дирака, которые инвариантны относительно группы $P(1,n)$, если воспользоваться записью его в форме (6.1). Действительно, унитарные операторы типа FW и M имеют соответственно вид

$$U^{FW} = \exp\left\{\frac{iS_{n+1k}p_k}{p}\operatorname{arctg}\frac{p}{\varkappa}\right\}, \tag{7.1}$$

$$U^{M} = \exp\left\{\frac{-iS_{n+1k}p_k}{p}\operatorname{arctg}\frac{\varkappa}{p}\right\}, \tag{7.2}$$

где $p = \sqrt{p_k^2}$, S_{n+1k} — матрицы, которые вместе с матрицами S_{kl}, $S_{0\mu}$, S_{n+10} реализуют неприводимое представление алгебры $O(1,n+1)$.

Если сделать преобразование (7.1) над уравнением (6.1), то мы придем к уравнению типа (2.17), т.е.

$$i\frac{\partial\Phi(t,\boldsymbol{x},x_4)}{\partial t} = \mathcal{H}^{FW}\Phi(t,\boldsymbol{x},x_4) = \beta\sqrt{p^2+p_4^2+\varkappa^2}\,\Phi(t,\boldsymbol{x},x_4), \tag{7.3}$$

где

$$\Phi = U^{FW}\Psi, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}, \tag{7.4}$$

$\hat{1}$ — двухрядная единичная матрица. Генераторы группы $P(1,4)$ на $\{\Phi\}$ имеют вид (2.6), где $\varepsilon \to \beta$.

С помощью преобразования U^M можно найти представление группы $P(1,4)$, которое пригодно для перехода к пределу, когда $\varkappa \to 0$. Для наших целей, однако, это преобразование неудобно с точки зрения обобщения его на уравнения, описывающие частицы с произвольным спином и изоспином. Поэтому, далее, мы рассмотрим следующие унитарные преобразования:

$$U' = \exp\left\{i\frac{\pi}{2}S_{54}e_4\right\}, \qquad e_4 = \frac{p_4}{|p_4|}, \qquad |p_4| \neq 0, \tag{7.5}$$

$$U'' = \exp\left\{i\frac{S_{5a}p_a}{\sqrt{p_b^2}}\right\}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{p_b^2}}{|p_4|}, \qquad a,b = 1,2,3. \tag{7.6}$$

В том частном случае, когда

$$S_{54} = -\frac{i}{2}\gamma_4, \qquad S_{5a} = -\frac{i}{2}\gamma_4,$$

преобразования (7.5) и (7.6) имеют вид

$$U' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma_4 e_4), \tag{7.7}$$

$$U'' = \frac{1}{\sqrt{2E_2(E_2 + |p_4|)}}(E_2 + |p_4| + \gamma_a p_a), \qquad E_2 = \sqrt{p_a^2 + p_4^2}. \tag{7.8}$$

Если осуществить последовательно преобразование (7.7) и (7.8) над уравнением Дирака (6.1), то мы придем к уравнению

$$i\frac{\partial \Phi''(t, \boldsymbol{x}, x_4)}{\partial t} = \mathcal{H}''\Phi''(t, \boldsymbol{x}, x_4), \tag{7.9}$$

где

$$\mathcal{H}'' = \lambda(E_2 S_{05} + \varkappa e_4 S_{40}), \qquad \Phi'' = U\Psi, \qquad U \equiv U''U'. \tag{7.10}$$

Генераторы группы $P(1,4)$ на множестве $\{\Phi''\}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&P_0'' = UP_0U^{-1} = \mathcal{H}'',\\
&J_{ab}'' = J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab},\\
&J_{a4}'' = x_a p_4 - x_4 p_a + e_4 \frac{S_{ab}p_b}{E_2 + |p_4|},\\
&J_{0a}'' = x_0 p_a - \frac{1}{2}(x_a \mathcal{H}'' + \mathcal{H}'' x_a) - \gamma_0 \frac{S_{ab}p_b}{E_2 + |p_4|} -\\
&\qquad -\varkappa e_4 \gamma_0 \gamma_4 \left\{ \frac{\gamma_a}{2E_2} + \frac{i\gamma_b p_b p_a}{2E_2^2(E_2 + |p_4|)} + \frac{S_{ab}p_b}{2E_2(E_2 + |p_4|)} \right\},\\
&J_{04}'' = x_0 p_4 - \frac{1}{2}(x_4 \mathcal{H}'' + \mathcal{H}'' x_4) + \frac{i\varkappa}{2E_2}\gamma_0\gamma_4\gamma_b p_b.
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Положив в формулах (7.11) $\varkappa = 0$, приходим к представлению (3.2) для генераторов группы $P(1,4)$ в классе II.

При преобразованиях (7.5), (7.6) пространственные координаты переходят в

$$\begin{aligned}
&x_a'' = Ux_aU^{-1} = x_a + \frac{S_{5a}}{E_2} - \frac{S_{5b}p_b p_a}{E_2^2(E_2 + |p_4|)} + \frac{S_{ab}p_b}{E_2(E_2 + |p_4|)},\\
&x_4'' = Ux_4U^{-1} = x_4 - e_4 \frac{S_{5b}p_b}{E_2^2}.
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Матрицы Дирака $\gamma_\mu'' = U\gamma_\mu U^{-1}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&\gamma_a'' = -\gamma_a\gamma_4 e_4 + \frac{e_4\gamma_4 p_a}{E_2} - e_4 \frac{\gamma_4\gamma_a\gamma_b p_b}{E_2(E_2 + |p_4|)},\\
&\gamma_4'' = \gamma_4\left(\frac{|p_4|}{E_2} - \frac{\gamma_b p_b}{E_2}\right), \qquad \gamma_0'' = -\gamma_0\gamma_4 e_4.
\end{aligned} \tag{7.13}$$

Матрицы $S_{\mu\nu}$, $S_{\mu5}$ после преобразований (7.5) и (7.6) имеют вид

$$
\begin{aligned}
&S''_{ab} = S_{ab} - \frac{1}{E_2}(S_{5b}p_a - S_{5a}p_b) - \frac{1}{E_2(E_2+|p_4|)}(S_{ad}p_dp_b - S_{bd}p_dp_a),\\
&S''_{a4} = \frac{1}{E_4}\left\{p_4S_{a5} + e_4S_{ba}p_b + \frac{e_4p_ap_bS_{b5}}{E_2+|p_4|}\right\},\\
&S''_{a5} = e_4\left\{S_{a4} + \frac{p_aS_{54}}{E_2} - \frac{p_ap_bS_{b4}}{E_2(E_2+|p_4|)}\right\},\\
&S''_{54} = \frac{1}{E_2}\left\{|p_4|S_{54} - p_bS_{b4}\right\}, \qquad S''_{0a} = S_{0a} - \frac{S_{50}}{E_2}p_a - \frac{S_{0b}p_bp_a}{E_2(E_2+|p_4|)},\\
&S''_{04} = \frac{p_4}{E_2}S_{05} - \frac{e_4}{E_2}S_{0b}p_b, \qquad S''_{05} = -e_4S_{04}.
\end{aligned}
\tag{7.13$'$}
$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что преобразования (7.12), (7.13) и (7.13$'$) являются каноническими, т.е.

$$
\begin{aligned}
&[x''_k, x''_l]_- = [x_k, x_l]_- = 0, \qquad [x''_k, p''_l]_- = [x_k, p_l]_- = i\delta_{kl},\\
&\left[\gamma'_\mu, \gamma''_\nu\right]_+ = 2g_{\mu\nu}, \qquad \left[S''_{\mu\nu}, S''_{\alpha\beta}\right]_- = [S_{\mu\nu}, S_{\alpha\beta}]_- .
\end{aligned}
$$

Из приведенного ясно, что преобразование $U = U''U'$ удобно для осуществления предельного перехода $\varkappa \to 0$.

2. Далее рассмотрим канонические преобразования над уравнением Дирака (7.1) в классе III

$$
i\frac{\partial\Psi(t,\boldsymbol{x},x_4)}{\partial t} = (\gamma_0\gamma_kp_k + i\gamma_0\eta)\Psi(t,\boldsymbol{x},x_4). \tag{7.14}
$$

Запишем это уравнение в виде

$$
p_4\Psi(t,\boldsymbol{x},x_4) = P_4\Psi(t,\boldsymbol{x},x_4), \tag{7.15}
$$

где

$$
P_4 = -\gamma_4\gamma_0p_0 + \gamma_4\gamma_ap_a + i\gamma_4\eta.
$$

Уравнение (7.15) после преобразования

$$
\mathcal{V}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i\gamma_0\gamma_4) \tag{7.16}
$$

переходит в

$$
p_4\Psi' = P'_4\Psi', \tag{7.17}
$$

где

$$
P'_4 = -\gamma_4\gamma_0p_0 - i\gamma_0\gamma_ap_a + \gamma_0\eta, \qquad \Psi' = \mathcal{V}'\Psi. \tag{7.18}
$$

Сделаем теперь над уравнением (7.17) преобразование

$$
\mathcal{V}'' = \frac{\eta - i\gamma_ap_a + \gamma_4p_0 + |p_4|}{\{2E_3(E_3+\eta)\}^{1/2}}, \qquad |p_4| = \sqrt{p_0^2 - p_a^2 + \eta^2}. \tag{7.19}
$$

Обратный оператор к $\mathcal{V}''$ имеет вид

$$(\mathcal{V}'')^{-1} = \frac{\eta + i\gamma_a p_a - \gamma_4 p_0 + |p_4|}{\{2E_3(E_3+\eta)\}^{1/2}}. \tag{7.20}$$

Уравнение (7.17) после преобразования (7.19) имеет вид

$$p_4\Phi(t, \boldsymbol{x}, x_4) = P_4''\Phi(t, \boldsymbol{x}, x_4), \tag{7.21}$$

где

$$P_4'' = \gamma_0 E_3, \qquad E_3 = \sqrt{p_0^2 - p_a^2 + \eta^2} \equiv |p_4|, \qquad \Phi = \mathcal{V}\Psi, \qquad \mathcal{V} \equiv \mathcal{V}''\mathcal{V}'. \tag{7.22}$$

Генераторы группы $P(1,4)$ на множестве решений уравнения (7.21) $\{\Phi\}$ выглядят как

$$\begin{aligned}
&P_0'' = p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad P_a'' = p_a, \qquad P_4'' = \gamma_0 E_3,\\
&J_{ab}'' = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \qquad J_{0a}'' = x_0 p_a - x_a p_0 - iS_{4a},\\
&J_{4a}'' = x_4 p_a - \frac{\gamma_0}{2}(x_a E_3 + E_3 x_a) + \gamma_0 \frac{S_{ab}p_b + iS_{a4}p_0}{E_3+\eta},\\
&J_{40}'' = x_4 p_0 - \frac{\gamma_0}{2}(x_0 E_3 + E_3 x_0) - \gamma_0 \frac{iS_{4a}p_a}{E_3+\eta}.
\end{aligned} \tag{7.23}$$

Операторы (7.23), несмотря на то, что их явный вид получен исходя из уравнения Дирака (7.14) и представления

$$D^+\left(l_0 = \frac{1}{2}, l_1 = \frac{3}{2}, \eta\right) \oplus D^-\left(l_0 = -\frac{1}{2}, l_1 = \frac{3}{2}, \eta\right),$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.1) независимо от явного вида матриц S_{ab} и iS_{4a} (например, вида (6.2)). Это означает, что операторы (7.23), где сделана замена $\gamma_0 \to \varepsilon_3$, реализуют неприводимое представление $D^{\varepsilon_3}(\varepsilon_3 l_0, l_1, \eta)$ алгебры $P(1,4)$, если матрицы S_{ab} и iS_{a4} реализуют неприводимое представление алгебры $O(1,3)$.

Приведем в заключение выражения для $x_\mu'' = \mathcal{V}x_\mu\mathcal{V}^{-1}$:

$$\begin{aligned}
&x_0'' = x_0 + \frac{S_{45}}{E_3} + i\frac{S_{4b}p_b E_3 + S_{5b}p_b p_0 + iS_{45}p_0^2}{E_3^2(E_3+\eta)},\\
&x_a'' = x_a + i\frac{S_{a5}}{E_3} - \frac{S_{ab}p_b E_3 + iS_{a4}E_3 p_0 - iS_{5b}p_b p_a + p_0 p_a S_{45}}{E_3^2(E_3+\eta)},\\
&x_4'' = x_4,
\end{aligned} \tag{7.24}$$

где матрицы $S_{\mu\nu}$ и $S_{5\mu}$ имеют вид (6.2).

Автор выражает свою признательность проф. Ю.М. Широкову за ценные советы, а А.Л. Грищенко, Л.П. Сокуру за плодотворные дискуссии и помощь при выполнении настоящей работы.

1. Hegerfeldt G.C., Henning J., *Fort. Phys.*, 1968, **16**, 9.
2. Румер Ю.Б., Исследование по 5-оптике, Физматгиз, 1956.
3. Соколик Г.А., Групповые методы в теории элементарных частиц, Атомиздат, 1965.
4. Фущич В.И., *Укр. физ. ж.*, 1967, **12**, 741; 1968, **13**, 363.
5. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1968, **7**, 79; 1969, **14**, 573.
6. Фущич В.И., Кривский И.Ю., Препринт ИТФ–72, АН УССР, Киев, 1968.
7. Rosen S.P., *J. Math. Phys.*, 1968, **9**, 1593.
8. Фущич В.И., Препринт ИТФ–17, АН УССР, Киев, 1969.
9. Wigner E.P., *Ann. Math.*, 1939, **40**, 149.
10. Foldy L.. *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 568.
11. Широков Ю.М., *ЖЭТФ*, 1957, **33**, 1196; 1958, **34**, 717.
12. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я., Представления группы вращений и группы Лоренца, Физматгиз, 1958.
13. De Vos J.A., Hilgervoord J., *Nucl. Phys. B*, 1967, **1**, 494.
14. Hwa R.C., *Nuovo Cim. A*, 1968, **56**, 107.
15. Newton T.D., *Ann. Math.*, 1950, **51**, 730.
16. Комар А.А., Сладь Л.М., *ТМФ*, 1969, **1**, 50.
17. Hammer C.L., Good R.H., *Phys. Rev.*, 1957, **108**, 882.
18. Фущич В.И., *Укр. физ. ж.*, 1966, **8**, 907.
19. Bakri M.M., *J. Math. Phys.*, 1969, **10**, 289.
20. Bargman V., Wigner E., *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1948, **34**, 211.
21. Фущич В.И., Сокур Л.П., Препринт ИТФ–33, АН УССР, Киев, 1969.
22. Широков Ю.М., *ЖЭТФ*, 1951, **21**, 748.
23. Sankaranarayanan A., *Nuovo Cim.*, 1965, **38**, 1441;
Rosen J., Roman P., *J. Math. Phys.*, 1966, **7**, 2072.