Уравнения типа Кеммера–Дэффина в пятимерном пространстве Минковского

И.Ю. КРИВСКИЙ, Г.Д. РОМАНЕНКО, В.И. ФУЩИЧ

An exhaustive analysis of the Kemmer–Duffin equations in five-dimensional Minkowski space has been made. The concrete realisation of generators of the non-uniform de-Sitter group is found, which is related to 6-, 15- and 20-dimensional square matrices β_μ of Kemmer–Duffin–Petiau algebra in five-dimensional space. An effective method is proposed for the realisations of all representations of Kemmer–Duffin–Petiau algebra in spaces of arbitrary dimension.

Проведен полный анализ уравнений типа Кеммера–Дэффина в 5-мерном пространстве Минковского. Найдена конкретная реализация для инфинитезимальных операторов неоднородной группы де Ситтера $P(1,4)$, связанная с 6-, 15- и 20-мерными матрицами β_μ алгебры Кеммера–Дэффина–Петье в 5-мерном пространстве. Предложен эффективный способ реализации всех представлений алгебры Кеммера–Дэффина–Петье в пространствах произвольной размерности.

1. Введение

Идея использования пространств размерностью, большей чем четыре, для описания элементарных частиц и их динамической классификации рассматривалась впервые де Бройлем [1]. Одна из конкретных реализаций этой идеи была предложена Пайсом [2] и в дальнейшем рассматривалась и обобщалась многими авторами в самых различных аспектах (обзор этих работ см. в [3]). В этих работах изучалось объединение однородной группы Лоренца $O(1,3)$ с группами "внутренних" симметрий. Более последовательное решение этого вопроса, однако, требует нетривиального объединения неоднородной группы Лоренца (группы Пуанкаре $P(1,3)$) с группами внутренних симметрий. Ожидается, что именно на этом пути удастся получить спектр масс и другие характеристики элементарных частиц [4].

В работах [5, 6] предложен один из возможных способов нетривиального объединения группы Пуанкаре $P(1,3)$ с группами внутренних симметрий, основанный на минимальном расширении группы $P(1,3)$. Основные предпосылки предложенного подхода состоят в следующем:

А. Оператор (квадрата) массы определяется как независимая динамическая переменная:

$$M^2 \equiv \varkappa^2 + P_4^2, \tag{1}$$

где $\varkappa$ — некоторый фиксированный параметр, а P_4 — оператор типа компонент 3-импульса $\boldsymbol{P}$, коммутирующий со всеми генераторами алгебры[1] $P(1,3)$ группы Пуанкаре.

Б. Соотношения между энергией P_0, 3-импульсом $\boldsymbol{P}$ и массой M физической системы оставляется прежним: (здесь всюду $\hbar = c = 1$):

$$P_0^2 = \boldsymbol{P}^2 + M^2 \equiv P_k^2 + \varkappa^2, \qquad k = 1,2,3,4. \tag{2}$$

Теоретическая и математическая физика, 1969, **1**, № 2, С. 242–250.

[1]Алгебры и соответствующие им группы обозначаются здесь одинаковыми символами.

В. Пространства $p \equiv (p_0, p_1, \ldots, p_4)$ и $x \equiv (x_0, x_1, \ldots, x_4)$ принимаются плоскими и взаимно-сопряженными. Из пунктов А, Б, В вытекает тогда, что группой обобщенной релятивистской симметрии является неоднородная группа де Ситтера $P(1,4)$ — группа смещений и вращений в пятимерном пространстве Минковского.

В настоящей работе приведен анализ уравнений типа Кеммера–Дэффина в 5-мерном пространстве Минковского и найдена конкретная реализация представлений для генераторов алгебры $P(1,4)$, определенных на решениях этих уравнений. Кроме того, приведен способ эффективной реализации представлений алгебры Кеммера–Дэффина–Петье (КДП) в пространствах произвольной размерности.

2. Алгебры Кеммера–Дэффина–Петье

Рассмотрим конкретную реализацию матриц β_μ алгебры КДП в 5-мерном пространстве, определяемой соотношениями

$$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\lambda + \beta_\lambda\beta_\nu\beta_\mu = \delta_{\mu\nu}\beta_\lambda + \delta_{\lambda\nu}\beta_\mu, \qquad \mu, \nu, \lambda = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{3}$$

Непосредственным подсчетом числа линейно независимых элементов алгебры (3) можно доказать (по аналогии со случаем алгебры КДП в 4-мерном пространстве), что это число равно $1^2 + 6^2 + 15^2 + 20^2 = 662$. Отсюда ясно, что алгебра КДП в 5-мерном пространстве имеет три неприводимых представления размерностями 6, 15 и 20.

Как известно (см., например, [7]), реализацию неприводимых представлений алгебры КДП в 4-мерном пространстве можно эффективно осуществить с помощью процедуры линеаризации уравнений Клейна–Гордона для скаляра и вектора в 4-мерном пространстве. Ниже показано, что реализацию неприводимых представлений алгебры КДП (3) можно эффективно осуществить с помощью процедуры линеаризации уравнений Клейна–Гордона

$$(\partial_\mu^2 - \varkappa^2)A^{(m)}(x) = 0, \qquad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_5), \quad m = 0, 1, 2 \tag{4}$$

для скаляра $A^{(0)} \equiv A_0$, вектора $A^{(1)} \equiv A_\mu$ и тензора $A^{(2)} \equiv A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$.

Уравнения (4) эквивалентны следующей системе линейных уравнений:

$$A_0 + \partial_\mu F_\mu = 0, \qquad F_\mu + \partial_\mu A_0 = 0, \tag{5}$$

$$A_\mu + \partial_\alpha F_{\alpha\mu} = 0, \qquad F_{\mu\nu} + \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = 0, \tag{5.а}$$

$$A_{\mu\nu} + \partial_\alpha F_{\alpha\mu\nu} = 0, \qquad F_{\mu\nu\alpha} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} - \partial_\nu F_{\mu\alpha} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} = 0. \tag{5.б}$$

Конечно, системы (5.а) и (5.б) эквивалентны соответствующим уравнениям (4) при дополнительных условиях типа Лоренца

$$\partial_\mu A_\mu = 0, \qquad \partial_\mu A_{\mu\nu} = 0. \tag{6}$$

Для получения конкретной реализации представлений алгебры (3) достаточно записать уравнения (5) в форме Баба

$$(\beta_\mu\partial_\mu + \varkappa)\Phi = 0, \tag{7}$$

где Φ — вектор-функция, компоненты которой строятся из соответствующих компонент величин A и F. Размерности матриц β_μ для систем (5), (5.а) и (5.б), определяемые числом уравнений в них, суть

$$N_5^m \equiv C_5^m + C_5^{m+1} = 6, 15, 20, \qquad (m = 0, 1, 2). \tag{8}$$

Тот или иной явный вид матриц β_μ зависит от сопоставления компонент вектор-функции Φ соответствующим компонентам A и F. Можно, однако, написать некоторый общий явный вид матриц β_μ, не связанный с определенным сопоставлением $\Phi = (A, F)$. Для этого достаточно пронумеровать строки и столбцы матриц β_μ компонентами величин A и F, входящих в уравнение (5). Такой общий явный вид, приведенный в табл. 1–3 в дополнении, достаточен для проведения любых операций с матрицами β_μ.

Реализация всех неприводимых представлений матриц β_μ, $\mu = 1, 2, \ldots, n$, алгебры КДП в случае пространств произвольной размерности n, когда число линейно независимых элементов алгебры равно

$$1 + \sum_{m=0}^{E(a)} \left(C_n^m + C_n^{m+1}\right)^2, \qquad a \equiv \frac{n+1}{2},$$

где $E(a)$ — целая часть a, эффективно осуществляется (см. дополнение) с помощью процедуры линеаризации уравнений (4) для кососимметрических тензоров рангов $m \le E(a)$.

3. Представления группы $P(1,4)$

Эрмитовы матрицы

$$S_{\mu\nu} \equiv -i(\beta_\mu\beta_\nu - \beta_\nu\beta_\mu) \tag{9}$$

удовлетворяют соотношениям

$$i[S_{\mu\nu}, S_{\rho\sigma}] = \delta_{\mu\sigma}S_{\nu\rho} + \delta_{\nu\rho}S_{\mu\sigma} - \delta_{\mu\rho}S_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\sigma}S_{\mu\rho}, \tag{10}$$

т.е. реализуют $N = 6$-, 15-, и 20-мерные представления группы — группы вращений в 5-мерном эвклидовом пространстве. Поскольку далее

$$i[\beta_\mu, S_{\nu\alpha}] = \delta_{\mu\nu}\beta_\alpha - \delta_{\mu\alpha}\beta_\nu \tag{11}$$

(кстати, это условие инвариантности уравнения (7) относительно группы $O(1,4)$), матрицы $(S_{\mu\nu}, S_{\alpha 6})$, где $S_{6\alpha} \equiv \beta_\alpha$ реализуют N-мерные представления группы $O(6)$. Подбирая соответствующие матрицы из $(S_{\mu\nu}, S_{\alpha 6})$ с множителями $\pm i$, мы получим реализацию $N = 6$-, 15-, 20-мерных представлений групп типа[2] $O(m, n+1)$, $m + n \le 5$.

Отметим, что обычно даже в случае релятивистских уравнений, инвариантных относительно группы Пуанкаре $P(1,3)$, исследуют вопрос о реализации на решениях этих уравнений представлений однородной группы Лоренца $O(1,3)$. Однако, как подчеркивалось в [9, 10], для адекватной физической интерпретации необходимо ставить и решать вопрос о реализации этими уравнениями представлений именно группы $P(1,3)$, а не $O(1,3)$.

[2]Метод построения представлений групп типа $O(m, n+1)$ из представлений групп $O(m,n)$ и уравнений типа Баба, инвариантных относительно $O(m,n)$ был предложен в [8].

Ниже выясняется вопрос, какие представления группы $P(1,4)$ как группы обобщенной релятивистской симметрии (а не группы $O(1,4)$) реализуются на множестве решений уравнений (7) с 6×6-, 15×15- и 20×20-матрицами β_μ. Для решения этого вопроса следует [6] найти явный вид генераторов P_μ, $J_{\mu\nu}$ алгебры $P(1,4)$, связанный с уравнением (7) тем, что P_0 совпадает с гамильтонианом этого уравнения, и значения инвариантов алгебры $P(1,4)$, соответствующие данному явному виду P_μ, $J_{\mu\nu}$, а также возможные значения полного набора коммутирующих операторов.

Используя методику [11], можно показать, что уравнение (7) эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned} &i\partial_0\Phi = H\Phi, \qquad H \equiv \alpha_k p_k + \beta_5\varkappa, \qquad \alpha_k \equiv S_{5k}, \\ &\partial_0 \equiv i\partial_5, \qquad p_k \equiv -i\partial_k, \qquad k=1,2,3,4. \end{aligned} \tag{12}$$

Генераторы P_μ, $J_{\mu\nu}$ алгебры $P(1,4)$ в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned} &P_0 = H = \alpha_k p_k + \beta_5\varkappa, \qquad P_k = p_k = -i\partial_k, \\ &J_{kr} = x_{[k}p_{r]} + S_{kr}, \qquad J_{0k} = x_0 p_k - \frac{1}{2}(x_k P_0 + P_0 x_k). \end{aligned} \tag{13}$$

При этом имеется в виду, что операторы (13) удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры $P(1,4)$ лишь на существенных (essential) [12] компонентах $\Phi' = \beta_5^2\Phi$.

Оператор, соответствующий инварианту P^2, имеет здесь вид

$$P^2 \equiv P_0^2 - P_k^2 = \beta_5^2\varkappa^2, \tag{14}$$

где

$$\beta_5^2 = \begin{pmatrix} 1^l & \\ & 0^{N-l} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

а $l = 2,4,12$ — размерность единичной матрицы для случаев $N = 6,15,20$, соответственно. Из (14) видно, что инвариант — знак энергии $\varepsilon = \beta_5$. Другие два инварианта алгебры $P(1,4)$ — операторы квадратов спина $\boldsymbol{S}$ и изоспина $\boldsymbol{T}$ (см. (5), (6) в (5) и (2.18) в [6]), а также входящие в полный набор операторы S_3 и T_3, где

$$S_a \equiv \frac{1}{2}(S_{bc} + S_{4a}), \qquad T_a \equiv \frac{1}{2}(S_{bc} - S_{4a}), \tag{16}$$

$(a,b,c) = \mathrm{cycl}(1,2,3)$ вычислены в дополнении. Как видно из (14), представления (11) относятся к представлениям класса I ($P^2 > 0$), где малой групой группы $P(1,4)$ является группа $O(4)$ ($\boldsymbol{S}^2$ и $\boldsymbol{T}^2$ — ее инварианты).

Из явного вида диагональных операторов P^2, ε, $\boldsymbol{S}^2$, $\boldsymbol{T}^2$, S_3^2 и T_3^2 (см. дополнение) видно, что множество решений уравнения (7) реализует следующие представления $D^\pm(s,t)$ группы $P(1,4)$ (и, конечно, представления $D(s,t)$ группы $O(4)$):

$$D^+(0,0) \oplus D^-(0,0) \oplus D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \tag{17}$$

$$D^+\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \oplus D^-\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \oplus D(1,0) \oplus D(0,1) \oplus D(0,0), \tag{17.a}$$

$$D^+(0,1) \oplus D^+(1,0) \oplus D^-(0,1) \oplus D^-(1,0) \oplus 2D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \tag{17.б}$$

для $N = 6, 15, 20$, соответственно. Указанные представления $D^{\pm}(s,t)$ алгебры $P(1,4)$ реализуются на существенных компонентах Φ', и только эти компоненты имеют физический смысл.

Из (17) видно, что существенные компоненты Φ' уравнения Кеммера–Дэффина (7) в 5-мерном пространстве Минковского симметричным образом описывают мультиплеты: для $N = 6$ — спиносинглет-изосинглет (частицу типа η-мезон), для $N = 15$ — спинодублет-изодублет (частицу типа нуклон-антинуклон (N, N)) и для $N = 20$ — спинотриплет-изосинглет и спиносинглет-изотриплет (частицы типа (π, ω)-мезоны). Таким образом, уравнения (7) являются примерами уравнений, в которых спин-изоспиновые переменные нетривиально объединены, т.е. примерами уравнений, на основе которых осуществлено динамическое объединение группы Пуанкаре $P(1,3)$ и группы "внутренней" симметрии $SU(2)$. Заметим, кстати, что уравнение для нуклона как спиподублет-изодублета было выписано еще Пайсом [2]. Это уравнение, однако, построено на основе более широкой, чем $P(1,4)$, группы, поэтому полный набор, от которого зависит волновая функция этого уравнения, содержит больше шести независимых переменных.

$P(1,4)$-инвариантное выделение существенных компонент Φ' уравнения (7) производится с помощью преобразования типа Фолди–Вотхойзена:

$$U = \exp\left(-i\frac{\beta_k p_k}{p} \operatorname{arctg} \frac{p}{\varkappa}\right), \qquad p \equiv \sqrt{p_k^2}. \tag{18}$$

Для этих компонент уравнение принимает вид

$$i\partial_0 \widetilde{\Phi}' = \beta_5^{(l)} \sqrt{p_k^2 + \varkappa^2}\,\widetilde{\Phi}', \qquad \widetilde{\Phi}' \equiv U\Phi'. \tag{19}$$

Генераторы (13) при этом преобразовании принимают квазидиагональный вид, причем "ящики", относящиеся к уравнению (19), выглядят так:

$$\begin{aligned} &P_0 = \beta_5^{(l)} \sqrt{p_k^2 + \varkappa^2}, \qquad p_k = -i\partial_k, \\ &J_{kr} = x_{[k}p_{r]} + S_{kr}^{(l)}, \qquad J_{0k} = x_0 p_k - \frac{1}{2}(x_k P_0 + P_0 x_k) - \frac{S_{kr}p_r}{P_0 + \varkappa}. \end{aligned} \tag{20}$$

Эти представления являются конкретизацией канонических представлений типа Фолди–Широкова в схеме $P(1,4)$ (см. (2.19) в [6]) в том смысле, что здесь спин-изоспиновые матрицы S_{kl} задаются явно через матрицы β_μ алгебры КДП, входящие в (7).

Укажем теперь, какие представления $P(1,3) \subset P(1,4)$ реализуются на решениях уравнения (7). Эти представления $P(1,3)$ можно реализовать на решениях уравнения (7), не зависящих от x_4. Для таких решений уравнение (7) является "объединением" соответствующих уравнений Кеммера—Дэффина в схеме $P(1,3)$, которые получаются из уравнения (7), если положить $p_4 = -i\partial_4 = 0$. Генераторы алгебры $P(1,3)$, связанные с этими уравнениями, суть генераторы P_0, P_a, J_{ab}, J_{0a}; $a, b = 1, 2, 3$ из (13). Из явного вида инвариантов $P^2 \equiv P_0^2 - P_a^2$; $\varepsilon = \beta_5$; $\boldsymbol{S}^2 \equiv \frac{1}{2}S_{ab}^2$ и $S_3^2 = S_{12}^2$ алгебры $P(1,3)$ видно, что эти уравнения реализуют представления

$$D^+(0) \oplus D^-(0) \oplus D(1) \oplus D(0), \tag{21}$$

$$D^+(0) \oplus D^-(0) \oplus D^+(1) \oplus 2D(1) \oplus D(0), \tag{21.а}$$

$$2[D^+(1) \oplus D^-(1) \oplus D(1) \oplus D(0)] \tag{21.б}$$

для $N = 6, 15, 20$, соответственно. Фактически это означает, что уравнения (7) при $p_4 = 0$ распадаются на независимые 5-мерные и 10-мерные уравнения Кеммера–Дэффина с соответствующими неприводимыми 5×5- и 10×10-матрицами β_1, β_2, β_3, β_5.

Формулы (21), однако, нельзя вполне последовательно интерпретировать (как это предлагалось в [13]) как тот факт, что уравнения (7) в схеме $P(1,4)$ описывают физические объекты, получаемые "слиянием" частиц со спином 0 и 1 (для $N = 15$), 1 и 1 (для $N = 20$). Это связано с тем, что в квантовой схеме, основанной на группе $P(1,4)$, шесть величин (а не четыре, как в случае $P(1,3)$) образуют полный набор, например $\boldsymbol{p}$, p_4, S_3, T_3 (или любой другой, но, конечно, содержащий именно шесть величин). Поэтому уравнения (7), инвариантные относительно группы $P(1,4)$, описывают не физические объекты, получаемые слиянием частиц, а физические объекты, характеризуемые шестью квантовыми числами. В работах [5, 6] была предложена непротиворечивая физическая интерпретация всех величин этого набора: $\boldsymbol{p}$ — 3-импульс, p_4 — массовая переменная, S_3, T_3 — проекции спина и изоспина частицы, описываемой уравнением (7).

Квантовополевой лагранжев формализм, основанный на $P(1,4)$-инвариантных уравнениях (7), строится в полной аналогии с обычным лагранжевым формализмом в схеме $P(1,3)$. В заключение заметим, что приведенный в дополнении явный вид матриц β_μ, $\mu \le n$ для произвольного n позволяет аналогичным образом эффективно провести анализ соответствующих представлений групп $P(1,n-1)$, реализуемых на решениях уравнений типа (7) в n-мерных пространствах Минковского.

Дополнение

В табл. 1–6 схематически записаны матричные элементы матриц β_μ, $\mu = 1, 2, \ldots, n$, алгебр КДП (3) в пространствах произвольных размерностей, получаемых процедурой линеаризации уравнений Клейна–Гордона (4) для кососимметрических тензоров $A^{(m)} \equiv A^{(m)}(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, m-го ранга, т.е. матриц β_μ, получаемых при записи уравнений (5) в форме Баба (7).

Таблица 1

N_n^0	n	β_μ
2	1	1,0
3	2	2,0
4	3	3,0
5	4	4,0
6	5	5,0
7	6	6,0
	$\vdots$	

Таблица 2

N_n^1	n	Ненулевые элементы матриц β_μ, $\mu \le n$					
—	1	12,2	13,3	14,4	15,5	16,6	…
3*	2	21,1	23,3	24,4	25,5	26,6	…
6	3	31,1	32,2	34,4	35,5	36,6	…
10	4	41,1	42,2	43,3	45,5	46,6	…
15	5	51,1	52,2	53,3	54,4	59,6	…
21	6	61,1	62,2	63,3	64,4	65,5	…
	$\vdots$						

Таблица 3

N_n^2	n	Ненулевые элементы матриц β_μ, $\mu \le n$								
—	1	123,23	124,24	134,34	125,25	135,35	145,45	126,26	136,36	...
—	2	213,13	214,14	234,34	215,15	235,35	245,45	216,16	236,36	...
4*	3	312,12	314,14	324,24	315,15	325,25	345,45	316,16	326,26	...
10*	4	412,12	413,13	423,23	415,15	425,25	435,35	416,16	426,26	...
20	5	512,12	513,13	523,23	514,14	524,24	534,34	516,16	526,26	...
35	6	612,12	613,13	623,23	614,14	624,24	634,34	615,15	625,25	...
	$\vdots$									

Таблица 4

$A_{\mu\nu}$	12	13	23	14	24	34	15	25	35	45
№	1	4	2	5	3	6	$7'$	$8'$	$9'$	$10'$
$F_{\mu\nu\alpha}$	123	124	134	234	125	135	235	145	245	345
№	10	9	8	7	$6'$	$3'$	$5'$	$2'$	$4'$	$1'$

Таблица 5

β_1		β_2		β_3		β_4		β_5	
2,10	10,2	$-4,10$	$-10,4$	1,10	10,1	1,9	9,1	$1,6'$	$6',1$
3,9	9,3	$-5,9$	$-9,5$	$-5,8$	$-8,5$	4,8	8,4	$2,5'$	$5',2$
6,8	8,6	6,7	7,6	$-3,7$	$-7,3$	2,7	7,2	$3,4'$	$4',3$
$2',10'$	$10',2'$	$4',10'$	$10',4'$	$1',10'$	$10',1'$	$-1',9'$	$-9',1'$	$4,3'$	$3',4$
$3',9'$	$9',3'$	$5',9'$	$9',5'$	$-5',8'$	$-8',5'$	$-4',8'$	$-8',4'$	$5,2'$	$2',5$
$6',8'$	$8',6'$	$-6',7'$	$-7',6'$	$-3',7'$	$-7',3'$	$-2',7'$	$-7',2'$	$6,1'$	$1',6$

Таблица 6

iS_{12}		iS_{13}		iS_{23}		iS_{14}		iS_{24}		iS_{34}	
$4,2$	$-2,4$	$-1,2$	$2,1$	$1,4$	$-4,1$	$-1,3$	$3,1$	$1,5$	$-5,1$	$4,5$	$-5,4$
$5,3$	$-3,5$	$5,6$	$-6,5$	$3,6$	$-6,3$	$-4,6$	$6,4$	$-2,6$	$6,2$	$2,3$	$-3,2$
$-7,8$	$8,7$	$7,9$	$-9,7$	$-8,9$	$9,8$	$-7,10$	$10,7$	$8,10$	$-10,8$	$-9,10$	$10,9$

В первой колонке указаны размерности $N_n^m = C_n^m + C_n^{m+1}$ матриц β_μ при данных n и m. Звездочкой отмечены размерности представлений, повторяющих представления в таблицах $m \le E[(n+1)/2]$. Во второй колонке приведены размерность пространства n и индексы $\mu \le n$ матриц β_μ. Конкретные значения этих элементов зависят от сопоставления $\Phi = (A, F)$. При этом, например, символ “$325, 25$” в табл. 3 означает, что

$$(\beta_3)_{pq} = (\beta_3)_{qp} = -1, \qquad \text{если} \quad A_{25} = \Phi_p, \quad F_{325} = \Phi_q,$$
$$p, q \in (1, 2, \ldots, N_5^2 = 20).$$

Правило написания таблиц элементов матриц β_μ, получаемых процедурой линеаризации уравнений (4) для кососиммстрических тензоров ранга $m \ge 3$, ясны из табл. 1–3.

$$\boldsymbol{S}^2 = \begin{pmatrix} 0^3 &&&&& \\ & 2\cdot 1^3 &&&& \\ && \frac{3}{4}\cdot 1^4 &&& \\ &&& 0^3 && \\ &&&& 2\cdot 1^3 & \\ &&&&& \frac{3}{4}\cdot 1^4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{T}^2 = \begin{pmatrix} 2\cdot 1^3 &&&&& \\ & 0^3 &&&& \\ && \frac{3}{4}\cdot 1^4 &&& \\ &&& 2\cdot 1^3 && \\ &&&& 0^3 & \\ &&&&& \frac{3}{4}\cdot 1^4 \end{pmatrix},$$

$$S_3^2 = \begin{pmatrix} 0^3 &&&&& \\ & \begin{smallmatrix} 1 && \\ & 1 & \\ && 0 \end{smallmatrix} &&&& \\ && \frac{1}{4}\cdot 1^4 &&& \\ &&& 0^3 && \\ &&&& \begin{smallmatrix} 1 && \\ & 1 & \\ && 0 \end{smallmatrix} & \\ &&&&& \frac{1}{4}\cdot 1^4 \end{pmatrix}, \quad T_3^2 = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 0 && \\ & 1 & \\ && 1 \end{smallmatrix} &&&&& \\ & 0^3 &&&& \\ && \frac{1}{4}\cdot 1^4 &&& \\ &&& \begin{smallmatrix} 0 && \\ & 1 & \\ && 1 \end{smallmatrix} && \\ &&&& 0^3 & \\ &&&&& \frac{1}{4}\cdot 1^4 \end{pmatrix},$$

$$\beta_5 = \begin{pmatrix} 1^3 &&&&& \\ & -1^3 &&&& \\ && 0^4 &&& \\ &&& 1^3 && \\ &&&& -1^3 & \\ &&&&& 0^4 \end{pmatrix},$$

Для иллюстрации ниже приводятся некоторые необходимые вычисления только с 20×20-матрицами β_μ, $\mu\le 5$. В данном случае целесообразно пронумеровать компоненты величин $A_{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu\alpha}$ как указано в табл. 4. При такой нумерации матрицы β_α имеют вид, схематически приведенный в табл. 5, где выписаны все ненулевые элементы, равные ± 1.

Матрицы S_{kl} $(k,l=1,2,3,4)$, определяемые по (9), имеют вид

$$S_{kl} = \begin{pmatrix} S_{kl}^{(10)} & \\ & S_{kl}^{(10)} \end{pmatrix}, \qquad S_{kl}^{(10)} = \begin{pmatrix} S_{kl}^{(6)} & \\ & S_{kl}^{(4)} \end{pmatrix}.$$

В табл. 6 приведены элементы $S_{kl}^{(10)}$ только верхнего “ящика”, поскольку нижний реализует те же самые представления группы $O(4)$, что и верхний. Квадраты спин-изоспиновых матриц, определенных по (16), диагонализуются матрицей

$$V = V^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1,1 & 2,2 & 3,3 & 1,6 & 2,5 & 3,4 & 7,7 & 8,8 \\ -4,4 & -5,5 & -6,6 & -6,1 & 5,2 & 4,3 & 9,9 & 10,10 \end{pmatrix},$$

где выписаны только ненулевые элементы верхнего ящика, причем, например, $(V)_{44} = -1/\sqrt{2}$. Диагональные $\boldsymbol{S}^2$, $\boldsymbol{T}^2$, S_3^2, T_3^2 и β_5 имеют вид, представленный выше на схеме.

1. de Brodlie L., Introduction to the Vigier theory of elementary particles, Amsterdam, 1963.
2. Pais A., *Physica*, 1953, **19**, 869.
3. Соколик Г.А., Групповые методы в теории элементарных частиц, Атомиздат, 1965.
4. Hegerfeldt G.C., Henning J., *Fortschr. Phys.*, 1968, **16**, № 9.
5. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1968, **7**, 79.
6. Фущич В.И., Кривский И.Ю., О волновых уравнениях в 5-пространстве Минковского, Препринт ИТФ–68–72, Киев, 1968.
7. Roman P., Theory of elementary particles, Amsterdam, I960.
8. Фущич В.И., *Укр. физ. ж.*, 1966, № 8, 907.
9. Foldy L., *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 568.
10. Широков Ю.М., *ЖЭТФ*, 1957, **33**, 861, 1196.
11. Case K.M., *Phys. Rev.*, 1955, **100**, 1513.
12. Garrido L.N., Oliver L., *Nuovo Gim. A*, 1967, **52**, 588.
13. Бедрицкий А.И., *ЖЭТФ*, 1968, **55**, 1367.