Про динамічну алгебру осцилятора в просторі з індефінітною метрикою

І.І. КОСТИРКО, В.І. ФУЩИЧ

Dynamic algebra $U(2n+1)$ of an indefinite harmonic oscillator is found.

Останнім часом широко обговорюється питання про вкладення алгебр симетрії P (алгебр прихованої симетрії атома водню O_4, n-вимірного гармонічного осцилятора $\overline{U}_n$, алгебри Пуанкаре і т. д.) у більш широку алгебру G. При цьому потрібно вкласти, наприклад, алгебру Пуанкаре P в G так, щоб спектр оператора маси (в нерелятивістському випадку оператор енергії), визначений у просторі, де задане незвідне представлення алгебри G (динамічна алгебра), збігався з експериментально спостережуваним спектром мас елементарних частинок (в нерелятивістському випадку з рівнями енергії). Ясно, що задача про знаходження динамічної алгебри, наприклад, гармонічного осцилятора еквівалентна розв'язку стаціонарної квантово-механічної задачі про спектр енергії осцилятора.

Добре відомо, що для опису процесів розпаду в рамках нерелятивістської квантової механіки доводиться мати справу або з неермітовими гамільтоніанами в гільбертовому просторі, або з ермітовими, але заданими уже в індефінітному просторі. В останньому випадку гамільтоніан може мати як дійсні, так і комплексні власні значення. У зв'язку з цим природно дослідити питання про вкладення алгебри симетрії гармонічного осцилятора P в G, гамільтоніан якого заданий в індефінітному просторі. Аналогічна задача для гармонічного осцилятора, коли гамільтоніан заданий в гільбертовому просторі, досліджена в [1–3].

У цій замітці знайдена динамічна алгебра n-вимірного гармонічного осцилятора, гамільтоніан якого заданий в лінійному векторному просторі з індефінітною метрикою.

Гамільтоніан такого осцилятора має вигляд [4]

$$H=\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^+b_i+b_i^+a_i\right), \tag{1}$$

де оператори a_i^+, b_i^+ спряженні до a_i і b_i відповідно і задовольняють комутаційні співвідношення

$$[a_i,b_j^+]_-=\delta_{ij}, \qquad [b_i,a_j^+]_-=\delta_{ij}. \tag{2}$$

Неважко перевірити, що H комутує з такими операторами (без врахування їхніх лінійних комбінацій):

$$\begin{aligned}
&A_i^j=\frac{1}{2}\{b_i,a_j^+\}_+, \qquad B_i^j=\frac{1}{2}\{a_i,b_j^+\}_+,\\
&E_i^j=\frac{1}{2}\{a_i,a_j^+\}_+, \qquad F_i^j=\frac{1}{2}\{b_i,b_j^+\}_+, \qquad i,j=1,2,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{3}$$

Український фізичний журнал, 1969, **14**, № 7, С. 1113–1115.

Якщо знайти всі можливі комутатори між операторами A_i^j, B_i^j, E_i^j, F_i^j, то можна переконатись, що сукупність операторів (3) та їхні лінійні комбінації утворюють алгебру Лі $\overline{U}(2n)$ розмірності $4n^2$, яка з точністю до умови унімодулярності збігається з A_l $(l = 2n - 1)$ у відповідності з класифікацією Картана. Таким чином, алгеброю симетрії гамільтоніана (1) є $\overline{U}(2n)$.

Далі побудуємо динамічну алгебру G. Для цього розглянемо оператори

$$\begin{aligned} &A_i^0 = g(H)b_i, \qquad A_0^j = d(H)a_j^+, \\ &B_i^0 = g(H)a_i, \qquad B_0^j = d(H)b_j^+, \\ &C_0^0 = C(H) \end{aligned} \tag{4}$$

де $g(H)$, $d(H)$, $C(H)$ задовольняють умови

$$\begin{aligned} &g(H)d(H+1) - d(H)g(H-1) = -1, \\ &g(H)d(H+1) + d(H)g(H-1) = 2C(H), \\ &C(H) - C(H-1) = C(H+1) - C(H) = -1. \end{aligned} \tag{5}$$

Обчислюючи комутатори між операторами (3) і (5) і між собою, можна показати, що сукупність операторів (3) і (4) та їхні лінійні комбінації утворюють $[4n(n+1)+1]$-вимірну алгебру Лі $U(2n+1)$.

Оскільки у просторі станів осцилятора не існує інваріантних підпросторів відносно операторів (4) і оскільки в алгебру $\overline{U}(2n+1)$ входять оператори народження і знищення, то в цьому просторі (індефінітному) реалізується незвідне представлення алгебри $\overline{U}(2n+1)$, генераторами якого є оператори (3) і (4), а простір станів оператора H є одним незвідним представленням динамічної алгебри $G = \overline{U}(2n+1)$.

Спробуємо побудувати ще інші динамічні алгебри для гамільтоніана (1), які відповідають іншим класам алгебр класифікації Картана. Для цього розглянемо оператори

$$\begin{aligned} &E_{kl}^0 = f(H)a_k a_l, \qquad F_{kl}^0 = f(H)b_k b_l, \\ &E_0^{kl} = h(H)a_k^+ a_l^+, \qquad F_0^{kl} = h(H)b_k^+ b_l^+, \\ &A_0^{kl} = h(H)a_k^+ b_l^+, \qquad B_{kl}^0 = f(H)a_k b_l, \end{aligned} \tag{6}$$

де $f(H)$ і $h(H)$ задовольняють умову

$$f(H)h(H+2) = h(H)f(H-2) = 1. \tag{7}$$

Неважко переконатись, що сукупність операторів (3) і (6) є генератором алгебри $\overline{S}p(4n)$.

Незважаючи на те, що алгебра $\overline{S}p(4n)$ містить алгебру симетрії гамільтоніана (1), вона не є динамічною алгеброю, оскільки структура генераторів (6) така, що весь спектр оператора (1) можна одержати не з одного, а принаймні з двох представлень цієї алгебри.

Таким чином, задача про спектр енергії гармонічного і ангармонічного осциляторів може бути розв'язана методом вкладення скінченновимірної алгебри Лі, що відповідає групі наявної симетрії в більш широку, але скінченновимірну алгебру Лі. Це твердження не залежить від того, де заданий гамільтоніан (в гільбертовому чи векторному просторі з індефінітною метрикою). Той факт, що динамічна алгебра для квантовомеханічних задач завжди виявляється скінченновимірною (а не нескінченновимірною) пов'язаний, мабуть, тільки з тим, що у квантовій механіці маємо справу із скінченним числом ступенів свободи.

1. Barut A.O., *Phys. Rev. B*, 1965, **139**, 1433.
2. Санников С.С., *УФЖ*, 1967, **12**, 335.
3. Mwa R.C., Nuyts J., *Phys. Rev.*, 1967, **145**, 1188.
4. Nagy K.L., State vector spaces with indefinite metric in quantum theory, Groningen, P. Nordhoff, 1966.