Уравнения Баргмана–Вигнера на неоднородной группе де Ситтера

В.И. ФУЩИЧ, Л.П. СОКУР

In the paper the equations of the Bargman–Wigner type invariant under the inhomogeneous de Sitter group $P(1,4)$ (the rotation and translation group in the five-dimensional plane Minkovski space) are constructed. A detaled group-theoretical analysis of these equations is carried out. The explicit form of the generators of the group $P(1,4)$ is derived for the case when the basic invariants of this group $P^2 = W = V = 0$. The question of the invariance of the Bargman–Wigner equations under the P-, T-, C-transformation is considered.

Report presented at the 3d Conference on Axiomatical Field Theory and Theory of Elementary Particles (Institute for Theoretical Physics, Kiev, Ukrainian SSR, April 1969).

В работе построены уравнения типа Баргмана–Вигнера, инвариантные относительно неоднородной группы де Ситтера (группы вращений и трансляций в пятимерном плоском пространстве Минковского) $P(1,4)$. Проведен детальный теоретико-групповой анализ этих уравнений. Найден явный вид генераторов группы $P(1,4)$ в том случае, когда основные инварианты этой группы $P^2 = W = V = 0$. Рассмотрен вопрос об инвариантности уравнений Баргмана–Вигнера относительно T-, P-, C-преобразований.

Работа была доложена на 3-ем Рабочем совещании по аксиоматической теории поля и теории элементарных частиц, состоявшемся в ИТФ АН УССР в апреле 1969 г.

Введение

Идея использования пространств размерности выше, чем четыре, интенсивно обсуждалась в физике довольно давно в связи с объединением теории тяготения и электричества, а также в связи с построением волновой оптики в пятимерном пространстве (обзор этих работ см. [1]). В настоящее время эта идея вновь широко обсуждается в результате объединения группы Пуанкаре $P(1,3)$ с группами "внутренних симметрий" [2]. Полагают, что на этом пути удастся получить спектр масс и другие характеристики элементарных частиц. Расширение четырехмерного пространственно-временного континуума может оказаться также плодотворным для описания нестабильных систем (резонансов) [3]. В связи с этим представляет интерес детально рассмотреть одно из таких расширений.

В настоящей работе обсуждается минимальное расширение четырехмерного пространства — 5-мерное пространство Минковского, в котором в качестве группы симметрии выбирается группа вращений и трансляций. Таким образом, группой симметрии в 5-мерном плоском пространстве Минковского является неоднородная группа де Ситтера, которую обозначим через $P(1,4)$. Ясно, что группа $P(1,4)$ содержит в качестве подгруппы группу Пуанкаре $P(1,3)$, поэтому теория, построенная на основе группы $P(1,4)$, будет определенным обобщением релятивистской квантовой механики. Для построения основ квантовой механики, основывающейся на группе $P(1,4)$, в качестве первого шага необходимо написать уравнения

Препринт ИТФ–69-33, Киев, 1969, № 33, 38 с.

движения “частицы” (системы относительно $P(1,3)$), инвариантные относительно группы $P(1,4)$. Все уравнения типа Шредингера–Фолди на группе $P(1,4)$ описаны в работе [4].

В § 1, 2 данной работы построены уравнения типа Баргмана–Вигнера, инвариантные относительно группы $P(1,4)$ в том случае, когда один из инвариантов группы $P(1,4)$ $P^2 = P_\mu^2 > 0$. Рассмотрены детально два примера таких уравнений, описывающих нуклон и систему типа (K^*, Σ).

В § 3 найдены уравнения типа Баргмана–Вигнера для случая $P^2 = P_\mu^2 = 0$, т.е. построены уравнения, описывающие свободное движение частицы с нефиксированной массой, но с фиксированным спином. Найден явный вид генераторов группы $P(1,4)$ в этом случае.

В § 4 изучены свойства уравнений Дирака относительно пространственного и временного отражений, а также операции зарядового сопряжения.

В § 5, положив в основу восьмикомпонентное уравнение Дирака, получены уравнения типа Баргмана–Вигнера, которые инвариантны относительно C-, P-, T-преобразований. Детально рассмотрено одно из таких уравнений.

§ 1. Уравнения типа Баргмана-Вигнера (случай $P^2 = \varkappa^2 > 0$)

1. Генераторы группы $P(1,4)$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} &[P_\mu, P_\nu] = 0, \qquad [P_\mu, J_{\nu\sigma}] = i\left(g_{\mu\nu}P_\sigma - g_{\mu\sigma}P_\nu\right), \\ &[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i\left(g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}\right), \\ &g_{00} = 1, \qquad g_{kl} = -\delta_{kl}; \qquad \mu = 0, 1, \ldots, 4; \qquad k, l = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Операторы Казимира для этой группы строятся из генераторов P_μ, $J_{\mu\nu}$ и имеют вид [3]:

$$P^2 = P_0^2 - \vec{P}^{\,2} - P_4^2 \equiv P_\mu^2, \tag{1.2}$$

$$V = \frac{1}{4} J_{\mu\nu} w_{\mu\nu}, \tag{1.3}$$

$$W = \frac{1}{6} v_{\mu\nu\sigma}^2 = \frac{1}{2} w_{\mu\nu}^2, \tag{1.4}$$

$$\varepsilon = \frac{P_0}{|P_0|}, \tag{1.5}$$

где

$$v_{\mu\nu\sigma} = P_\mu J_{\nu\sigma} + P_\nu J_{\sigma\mu} + P_\sigma J_{\mu\nu}, \tag{1.6}$$

$$w_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho\eta} P_\sigma J_{\rho\eta} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho\eta} v_{\sigma\rho\eta}, \tag{1.7}$$

$\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho\eta}$ — единичный полностью антисимметричный псевдотензор пятого ранга.

Малой группой в классе I ($P^2 > 0$) группы $P(1,4)$ является группа $O(4)$, генераторы которой будут обозначатся как S_{kl}:

$$S_{kl} = J_{kl}\Big|_{P_k = 0}, \tag{1.8}$$

$$[S_{kl}, S_{ij}] = i\left(\delta_{ki}S_{lj} + \delta_{lj}S_{ki} - \delta_{kj}S_{li} - \delta_{li}S_{kj}\right). \tag{1.9}$$

Группа $O(4)$ локально изоморфна группе $O_S(3)\otimes O_T(3)$, откуда следует, что группа $P(1,4)$ является нетривиальным объединением группы Пуанкаре и изотопической группы внутренних симметрий, поскольку, в свою очередь, группа $O(3)$ локально изоморфна группе $SU(2)$. Отметим, что группу $O_T(3)$ можно, вообще говоря, связывать с W-спином [5]. В дальнейшем, однако, с группой $O_T(3)$ мы будем связывать изоспин, а не W-спин.

В системе отсчета $P_k = 0$, инварианты V и W связаны с инвариантами группы $O(4)$ следующими соотношениями:

$$V = \varepsilon\varkappa\left(\vec{S}^{\,2} - \vec{T}^{\,2}\right), \tag{1.10}$$

$$W = 2\varkappa\left(\vec{S}^{\,2} + \vec{T}^{\,2}\right), \tag{1.11}$$

где операторы $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$ и $\vec{T} = (T_1, T_2, T_3)$ определены соотношениями

$$\begin{aligned} S_a &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\epsilon_{abc}S_{bc} + S_{4a}\right), \\ T_a &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\epsilon_{abc}S_{bc} - S_{4a}\right), \qquad (a,b,c = 1,2,3). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Все неприводимые представления класса I унитарны, конечномерны и задаются числами s, t и ε (знак энергии). Операторы $\vec{S}^{\,2}$, $\vec{T}^{\,2}$ и ε для неприводимых представлений $P(1,4)$ кратны единичным операторам

$$\vec{S}^{\,2} = s(s+1)1, \qquad \vec{T}^{\,2} = t(t+1)1, \qquad \varepsilon = \varepsilon\cdot 1, \qquad \varepsilon = \pm 1. \tag{1.13}$$

Числа s и t (могут принимать только целые и полуцелые положительные значения) отождествляются со спином и изоспином частицы соответственно. Неприводимое представление класса I будем обозначать в дальнейшем через $D^{(\varepsilon)}(s,t)$.

2. В пятимерной схеме, как и в четырехмерной, имеется два уравнения Дирака:

$$p^\mu\gamma_\mu\Psi^+(t,x) = \varkappa\Psi^+(t,x), \tag{1.14}$$

$$p^\mu\gamma_\mu\Psi^-(t,x) = -\varkappa\Psi^-(t,x), \qquad x \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4), \tag{1.15}$$

или

$$H^+\Psi^+(t,x) = i\frac{\partial\Psi(t,x)}{\partial t}, \tag{1.14$'$}$$

$$H^-\Psi^-(t,x) = i\frac{\partial\Psi(t,x)}{\partial t}, \tag{1.15$'$}$$

$$H^\pm \equiv \gamma_0\gamma_k p_k \pm \gamma_0\varkappa = \alpha_k p_k \pm \beta\varkappa,$$

где γ_μ — пять четырехрядных матриц, которые удовлетворяют соотношениям

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = 2g_{\mu\nu}, \qquad \gamma_0 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4, \tag{1.16}$$

γ_0 — эрмитова; γ_k — антиэрмитова.

Характерной особенностью пятимерной схемы (в отличие от четырехмерной) является неэквивалентность между собой уравнений (1.14) и (1.15), т.е. не существует матрицы A, которая бы устанавливала однозначное соответствие между уравнениями (1.14) и (1.15). Эта особенность приводит к тому, что уравнение (1.14) или (1.15), как будет показано, PTC-неинвариантно. Таким образом, в схеме $P(1,4)$ существует два различных уравнения Дирака.

На решениях уравнений (1.14) и (1.15) реализуется следующие представления группы $P(1,4)$:

$$\begin{aligned} &P_0^{\pm} \equiv H^{\pm} = \gamma_0\gamma_k p_k \pm \gamma_0\varkappa, \qquad P_k = p_k, \\ &J_{kl} = x_k p_l - x_l p_k + S_{kl}, \qquad S_{kl} = \frac{i}{4}[\gamma_k, \gamma_l]_-, \\ &J_{0k} = x_0 p_l - \frac{1}{2}[x_k, H^{\pm}]_+. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Можно выбрать такое представление γ_μ-матриц, когда операторы S_a и T_a принимают вид:

$$S_a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_a \end{pmatrix}, \tag{1.18}$$

где σ_a — матрицы Паули.

Исходя из (1.18), нетрудно найти явный вид операторов $\vec{S}^2$ и $\vec{T}^2$ и доказать, что уравнения (1.14) и (1.15) реализуют представления

$$D^{(+)}\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus D^{(-)}\left(0, \frac{1}{2}\right) \tag{1.19}$$

и

$$D^{(+)}\left(0, \frac{1}{2}\right) \oplus D^{(-)}\left(\frac{1}{2}, 0\right) \tag{1.20}$$

группы $P(1,4)$ соответственно.

Найдем, далее, уравнение, описывающее свободное движение частицы произвольного спина и изоспина s и t. Если непосредственно использовать методику Баргмана–Вигнера [6], применительно к уравнению (1.14) или (1.15), то, как будет ясно из дальнейшего, мы не сможем получить уравнений для произвольных s и t. Поэтому необходимо несколько изменить метод Баргмана–Вигнера (Б–В), применительно к схеме $P(1,4)$.

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &p^\mu \overset{(m)}{\gamma_\mu} \Psi = \varkappa\Psi, \\ &p^\mu \overset{(n)}{\gamma_\mu} \Psi = -\varkappa\Psi, \end{aligned} \tag{1.21}$$

которую удобно привести к шредингеровской форме

$$\begin{aligned} &p_0\Psi = \overset{(m)}{H}\Psi = \left(\overset{(m)}{\gamma_0}\overset{(m)}{\gamma_k} p_k + \overset{(m)}{\gamma_0}\varkappa\right)\Psi, \\ &p_0\Psi = \overset{(n)}{H}\Psi = \left(\overset{(n)}{\gamma_0}\overset{(n)}{\gamma_k} p_k - \overset{(n)}{\gamma_0}\varkappa\right)\Psi, \end{aligned} \tag{1.21$'$}$$

где $m = 1, 2, \ldots, M$; $n = M+1, M+2, \ldots, M+N$; M и N — два целых числа.

Матрицы $\overset{(i)}{\gamma}_\mu$ $(i = 1, 2, \ldots, M+N)$ определяются как

$$\overset{(i)}{\gamma}_\mu = 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes \gamma_\mu \otimes \cdots \otimes 1, \tag{1.22}$$

где кронекеровское произведение (1.22) содержит $M+N$ сомножителей, причем γ_μ входят в это произведение в качестве i-го сомножителя. Все остальные сомножители (1.22) являются единичными матрицами размерности (4×4).

Из инвариантности уравнений (1.21) относительно преобразований из группы $P(1,4)$ следует, что если $\{\Psi\}$ — пространство, решений этой системы уравнений, тогда на $\{\Psi\}$ реализуется некоторое представление группы $P(1,4)$. По отношению к малой группе $O(4)$, элемент $\Psi \in \{\Psi\}$ является некоторым мультиспинором, компоненты которого $\Psi(t, x; \xi_1, \ldots, \xi_m, \ldots, \xi_M, \xi_{M+1}, \ldots, \xi_{M+N})$ определяются значениями $M+N$ дискретный переменных ξ_i $(\xi_i = 1, 2, 3, 4)$. Хотя операторы $p^\mu \overset{(i)}{\gamma}_\mu$ определены на каждом элементе из прямого произведения

$$\prod_{m=1}^{M} \otimes \{\Psi^+\}_m \cdot \prod_{n=M+1}^{M+N} \otimes \{\Psi^-\}_n \equiv \{F\}, \tag{1.23}$$

где Ψ^+ и Ψ^- — решения уравнений (1.14) и (1.15) с компонентами $\Psi^+(t, x; \xi_m)$ и $\Psi^-(t, x; \xi_n)$, соответственно, решением уравнений (1,21) будет не каждый элемент из пространства (1.23).

Действительно, из вида уравнений (1,21) легко убеждаемся, что если $\Psi \in \{\Psi\}$, тогда все Ψ принадлежат одинаковым собственным значениям P^2:

$$P^2 \Psi = \varkappa^2 \Psi. \tag{1.24}$$

Таким образом, $\{\Psi\} \subset \{F\}$, но $\{\Psi\} \neq \{F\}$, поскольку известно, что F разлагается в интегральную сумму инвариантных относительно $P(1,4)$ подпространств. Как будет видно из дальнейшего, на элементы $\{\Psi\}$ налагаются, помимо (1.24), еще дополнительные условия (см. (1.37)).

Генераторы группы $P(1,4)$, действующего в пространстве $\{\Psi\}$, можно определить, учитывая (1.17), (1.23) и условие (1.24), следующим образом:

$$\begin{aligned} &P_0 = H = \frac{1}{2}\,[\widetilde{\gamma}_0, \widetilde{\gamma}_k]_- \cdot p_k + \varkappa \widetilde{\gamma}_0, \qquad P_k = p_k, \\ &J_{kl} = (x_k p_l - x_l p_k) + \widetilde{S}_{kl}, \qquad J_{0k} = x_0 p_k - \frac{1}{2}(H x_k + x_k H), \end{aligned} \tag{1.25}$$

где

$$\widetilde{\gamma}_\mu = \sum_{m=1}^{M} \overset{(m)}{\gamma}_\mu - \sum_{n=M+1}^{M+N} \overset{(n)}{\gamma}_\mu, \tag{1.26}$$

$$\widetilde{S}_{kl} = \sum_{i=1}^{M+N} \overset{(i)}{S}_{kl} = \frac{i}{4}\,[\widetilde{\gamma}_k, \widetilde{\gamma}_l]_- \,. \tag{1.27}$$

В выражении (1.27) (и везде в дальнейшем) верхний индекс (i) имеет тот же самый смысл, что и в формуле (1.22), т.е.

$$\overset{(i)}{S}_{kl} \equiv 1 \otimes \cdots 1 \otimes S_{kl} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1,$$

в $\overset{(i)}{S}_{kl}$ входит всего $M+N$ сомножителей, а единственный, отличный от 1 сомножитель S_{kl} ($S_{kl} \equiv \frac{i}{4}[\gamma_k, \gamma_l]_-$), стоит на i-ом месте.

Упорядоченное множество дискретных переменных $\{\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_{M+N}\}$, которыми нумеруются компоненты вектора Ψ, разобьем на два подмножества

$$\{\xi_1, \ldots, \xi_m, \ldots, \xi_M\} \equiv \{m\}, \qquad \{\xi_{M+1}, \ldots, \xi_n, \ldots, \xi_{M+N}\} \equiv \{n\}$$

и заметим, что система (1.21), а также генераторы (1.25) инвариантны относительно перестановок переменных ξ внутри каждого из упорядоченных подмножеств $\{m\}$ и $\{n\}$. Поэтому можно считать, что решение уравнений (1.21) обладает некоторой симметрией относительно операций перестановок

$$\xi_m \leftrightarrow \xi_{m'}, \qquad \xi_m, \xi_{m'} \in \{m\} \tag{1.28$'$}$$

и относительно

$$\xi_n \leftrightarrow \xi_{n'}, \qquad \xi_n, \xi_{n'} \in \{n\}. \tag{1.28$''$}$$

Будем находить только те решения уравнений (1.21), которые обладают полной симметрией относительно операции (1.28$'$) и операции (1.28$''$). Докажем, что в этом случае, пространство решений $\{\Psi\}$ реализует представление

$$D^{(+)}\left(\frac{M}{2}, \frac{N}{2}\right) \otimes D^{(-)}\left(\frac{N}{2}, \frac{M}{2}\right) \tag{1.29}$$

группы $P(1,4)$.

Для этой цели, осуществим над уравнениями (1.21) преобразование Фолди–Войтхойзена–Перси [7, 8]

$$\Psi \to \Phi = U\Psi, \tag{1.30}$$

$$U = \prod_{m=1}^{M} \overset{(m)}{U}{}^{+} \prod_{n=M+1}^{M+N} \overset{(n)}{U}{}^{-}, \tag{1.31}$$

где операторы $\overset{(m)}{U}{}^{+}$, $\overset{(n)}{U}{}^{-}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} &\overset{(m)}{U}{}^{+} = [2\omega(\omega+\varkappa)]^{-1/2}\left(\omega + \varkappa + \overset{(m)}{\gamma}_k p_k\right), \\ &\overset{(n)}{U}{}^{-} = [2\omega(\omega+\varkappa)]^{-1/2}\left(\omega + \varkappa - \overset{(n)}{\gamma}_k p_k\right), \qquad \omega = \sqrt{p_k^2 + \varkappa^2}. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Как видно из определения матрицы $\overset{(i)}{\gamma}_\mu$ (1.22), эти матрицы удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} &\left[\overset{(i)}{\gamma}_\mu, \overset{(i')}{\gamma}_\nu\right]_- = 0, \qquad \text{если} \quad i \neq i', \\ &\left[\overset{(i)}{\gamma}_\mu, \overset{(i)}{\gamma}_\nu\right]_+ = 2g_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{1.33}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned}
&\left[\overset{(m)}{U}{}^{+}, \overset{(i)}{H}\right] = 0, \qquad \text{если} \quad m \neq i,\\
&\left[\overset{(n)}{U}{}^{-}, \overset{(i)}{H}\right] = 0, \qquad \text{если} \quad n = i,\\
&\overset{(m)}{U}{}^{+} \overset{(m)}{H} \left(\overset{(m)}{U}{}^{+}\right)^{-1} = \overset{(m)}{\gamma_0}\,\omega,\\
&\overset{(n)}{U}{}^{-} \overset{(n)}{H} \left(\overset{(n)}{U}{}^{-}\right)^{-1} = -\overset{(m)}{\gamma_0}\,\omega.
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Преобразованием (1.30) система (1.21′) приводится к виду

$$\begin{aligned}
&p_0\Phi = \omega \overset{(m)}{\gamma_0}\Phi,\\
&p_0\Phi = -\omega \overset{(n)}{\gamma_0}\Phi.
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Поскольку оператор U коммутирует с операциями вида (1.28′) и (1.28″), волновая функция Φ будет обладать той же самой симметрией, что и волновая функция Ψ. Мы выбираем те же самые обозначения для дискретных переменных, определяющих компоненты вектора $\Phi \in \{\Phi\}$ ($\{\Phi\}$ — пространство решений системы (1.35)), так что компонента ϕ вектора Φ обозначается как

$$\phi \equiv \phi(t, x; \xi_1, \ldots, \xi_m, \ldots, \xi_M, \xi_{M+1}, \ldots, \xi_n, \ldots, \xi_{M+N}) \equiv \phi(\xi_m \in \{m\}, \xi_n \in \{n\}),$$

причем предполагается полная симметрия относительно перестановок внутри каждой из совокупностей $\{m\}$ и $\{n\}$.

Генераторы (1.25) преобразованием U приводятся к виду:

$$\begin{aligned}
&P'_0 = \omega\widetilde{\gamma}_0, \qquad P'_k = p_k, \qquad J'_{kl} = (x_k p_l - x_l p_k) + \widetilde{S}_{kl},\\
&J'_{0k} = x_0 p_k - \frac{\widetilde{\gamma}_0}{2}[\omega, x_k]_+ + \frac{\widetilde{\gamma}_0 p_l}{\omega + \varkappa}\widetilde{S}_{kl},
\end{aligned} \tag{1.36}$$

где x_μ, p_μ, $\widetilde{S}_{kl}$ — те же самые операторы, которые входят в (1.25).

Покажем теперь, что вектор $\Phi \in \{\Phi\}$ определяется только через $2(M+1)(N+1)$ своих компонент. Приравнивая левые части уравнений (1.35), получим следующие условия на Φ

$$\overset{(m)}{\gamma_0}\Phi = \overset{(m')}{\gamma_0}\Phi, \tag{1.37а}$$

$$\overset{(n)}{\gamma_0}\Phi = \overset{(n')}{\gamma_0}\Phi, \tag{1.37б}$$

$$\overset{(m)}{\gamma_0}\Phi = -\overset{(n)}{\gamma_0}\Phi, \tag{1.37в}$$

которые сужают пространство $\{F' | P^2 F = \varkappa^2 F'\}$ к пространству решений $\{\Phi\}$, где $F' = UF$. Действительно, если расписать условия (1.37а)–(1.37в), как условия для компонент ϕ и выбрать представление γ_μ матриц, где γ_0 — диагональна с элементами $(1, 1, -1, -1)$, тогда условие (1.37а) будет означать, что только те компоненты

ϕ отличны от нуля, у которых все переменные $\xi_m \in \{m\}$ принимают либо значения $\xi_m = 1, 2$, либо значения $\xi_m = 3, 4$. Условие (1.37б) требует того же самого для переменных $\xi_n \in \{n\}$. Условие (1.37в) показывает, что если переменные ξ_m принимают значения 1, 2, тогда переменные ξ_n должны принимать значения 3, 4 и, наоборот, если $\xi_m = 3, 4$, тогда $\xi_n = 1, 2$, в противном случае компонента $\phi \equiv 0$. Таким образом, отличны от нуля лишь следующие компоненты Φ (если конечно Φ — решение уравнений (1.35)):

$$\begin{aligned} &\Phi^{(+)} = \left\{\Phi^{(+)}(\xi_m = 1, 2; \xi_n = 3, 4)\right\}, \\ &\Phi^{(-)} = \left\{\Phi^{(-)}(\xi_m = 3, 4; \xi_n = 1, 2)\right\}. \end{aligned} \tag{1.38}$$

В (1.38) знаком $(\pm)$ обозначены компоненты векторов Φ, которые принадлежат собственным значениям ± 1 инварианта $\varepsilon' = \widetilde{\gamma}_0$ (ε' — инвариант знака энергии в представлении Фолди–Войтхойзена–Широкова).

Удобно переобозначить ненулевые компоненты векторов (1.38) через $\phi^{(+)}_{r,g}(t, x)$ и $\phi^{(-)}_{g,r}(t, x)$, где числа r, g равны числу переменных ξ, принимающих у данной компоненты значение 1 и 3 соответственно. Ясно, что компоненты (1.38) симметричного мультиспинора Φ взаимно однозначно соответствуют компонентам в обозначениях $\phi_{r,g}$. У компонент $\phi^{(\pm)}$ индексы r, g могут принимать следующие целочисленные значения:

$$\begin{aligned} &\phi^{(+)}_{r,g}: \quad 0 \le r \le M, \quad 0 \le g \le N; \\ &\phi^{(-)}_{g,r}: \quad 0 \le g \le M, \quad 0 \le r \le N. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Теперь нетрудно подсчитать, что размерность пространства $\{\Phi\}$ (а значит и $\{\Psi\}$) равна $2(M + 1)(N + 1)$.

Операторы $\widetilde{S}_3$, $\widetilde{T}_3$, $\widetilde{T}^2_a$ и $\widetilde{S}^2_a$ диагональны на симметризованных векторах с компонентами (1.39) (или (1.38)). Если через $f^{(+)}_{r,g}$ и $f^{(-)}_{g,r}$ обозначить элементы базиса пространства $\{\Phi\}$, тогда на этих элементах операторы $\widetilde{S}_3$, $\widetilde{T}_3$, $\widetilde{T}^2_a$ и $\widetilde{S}^2_a$ принимают следующие собственные значения:

$$\begin{aligned} &\widetilde{S}_3 f^{(+)}_{r,g} = \left(r - \frac{M}{2}\right) f^{(+)}_{r,g}, && \widetilde{T}_3 f^{(+)}_{r,g} = \left(g - \frac{N}{2}\right) f^{(+)}_{r,g}, \\ &\widetilde{S}^2_a f^{(+)}_{r,g} = \frac{M}{2}\left(\frac{M}{2} + 1\right) f^{(+)}_{r,g}, && \widetilde{T}^2_a f^{(+)}_{r,g} = \frac{N}{2}\left(\frac{N}{2} + 1\right) f^{(+)}_{r,g}, \\ &\widetilde{S}_3 f^{(-)}_{g,r} = \left(r - \frac{N}{2}\right) f^{(-)}_{g,r}, && \widetilde{T}_3 f^{(-)}_{g,r} = \left(g - \frac{M}{2}\right) f^{(-)}_{g,r}, \\ &\widetilde{S}^2_a f^{(-)}_{g,r} = \frac{N}{2}\left(\frac{N}{2} + 1\right) f^{(-)}_{g,r}, && \widetilde{T}^2_a f^{(-)}_{g,r} = \frac{M}{2}\left(\frac{M}{2} + 1\right) f^{(-)}_{g,r}. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Из (1.40) следует, что на пространстве решений уравнений (1.35), а значит и на пространстве решений (1.21), реализуется представление

$$D^{(+)}\left(s = \frac{M}{2}, t = \frac{N}{2}\right) \oplus D^{(-)}\left(s = \frac{N}{2}, t = \frac{M}{2}\right) \tag{1.41}$$

группы $P(1, 4)$.

Уравнение (1.35) для ненулевых компонент можно записать в виде:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\phi^{(+)}(t,x)\\ \phi^{(-)}(t,x)\end{pmatrix}=\omega\begin{pmatrix}\hat{1}^{(M+1)(N+1)} & 0\\ 0 & -\hat{1}^{(M+1)(N+1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi^{(+)}(t,x)\\ \phi^{(-)}(t,x)\end{pmatrix}, \quad (1.42)$$

где введено обозначение

$$\phi^{(+)}(t,x)\equiv\begin{pmatrix}\phi^{(+)}_{0,0}(t,x)\\ \phi^{(+)}_{0,1}(t,x)\\ .\\ .\\ .\end{pmatrix},\qquad \phi^{(-)}(t,x)\equiv\begin{pmatrix}\phi^{(-)}_{0,0}(t,x)\\ \phi^{(-)}_{0,1}(t,x)\\ .\\ .\\ .\end{pmatrix}.$$

Таким образом, уравнения типа Б–В (1.21) эквивалентны уравнению (1.42).

§ 2. Уравнение для нуклона и системы типа (K^*, Σ)

В этом параграфе рассмотрим детально два уравнения Б–В, которые реализуют представления $D^{(+)}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\oplus D^{(-)}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ и $D^{(+)}\left(1,\frac{1}{2}\right)\oplus D^{(-)}\left(\frac{1}{2},1\right)$.

1. Рассмотрим систему уравнений (1,21) для случая $M = N = 1$. Уравнения (1.21) в этом случае принимают вид:

$$\begin{aligned}&p^\mu(\gamma_\mu\otimes 1)\Psi=\varkappa\Psi,\\ &p^\mu(1\otimes\gamma_\mu)\Psi=-\varkappa\Psi,\end{aligned}\qquad (2.1)$$

где компоненты волновой функции $\Psi\in\{\Psi\}$ определяются как $\psi(t,x;\xi_1,\xi_2)$, причем пространство решений

$$\{\Psi\}\subset\{F|P^2F=\varkappa^2F\}\subset\{F\},\qquad F\equiv\Psi^+\otimes\Psi^-. \qquad (2.2)$$

Симметризовать компоненты $\psi(t,x;\xi_1,\xi_2)$ относительно операции $\xi_1\leftrightarrow\xi_2$ в случае $M = N = 1$ невозможно, поскольку уравнения (2.1) неинвариантны относительно этой операции.

Уравнения (2.1) можно переписать как систему уравнений для компонент:

$$\begin{aligned}&p^\mu(\gamma_\mu)_{\xi\eta}\psi(t,x;\eta,\rho)=\varkappa\psi(t,x;\xi,\rho),\\ &p^\mu(\gamma_\mu)_{\rho\eta}\psi(t,x;\xi,\rho)=-\varkappa\psi(t,x;\xi,\rho).\end{aligned}\qquad (2.1')$$

Генераторы группы $P(1,4)$ (1.25), связанные с уравнением (2.1), в этом частном случае выглядят как

$$\begin{aligned}&P_0=\frac{1}{2}[\beta_0,\beta_k]p_k+\varkappa\beta_0,\qquad P_k=p_k,\\ &J_{kl}=(x_kp_l-x_lp_k)+\widetilde{S}_{kl},\qquad \widetilde{S}_{kl}=\frac{i}{4}[\beta_k,\beta_l]_-,\\ &J_{0k}=x_0p_k-\frac{1}{2}(P_0x_k+x_kP_0),\end{aligned}\qquad (2.3)$$

где

$$\beta_\mu\equiv\widetilde{\gamma}_\mu=\gamma_\mu\otimes 1-1\otimes\gamma_\mu. \qquad (2.4)$$

Шестнадцатирядные матрицы $\frac{1}{2}\beta_\mu$, как это можно непосредственно проверить, удовлетворяют алгебре Кеммера–Дэффина–Петье

$$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\lambda + \beta_\lambda\beta_\nu\beta_\mu = 4g_{\mu\nu}\beta_\lambda + 4g_{\nu\lambda}\beta_\mu. \tag{2.5}$$

Матрицы $\widetilde{S}_a$ и $\widetilde{T}_a$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \widetilde{S}_a &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes 1 + 1 \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \widetilde{T}_a &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma_a \end{pmatrix} \otimes 1 + 1 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma_a \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Преобразование Фолди–Войтхойзена–Перси имеет вид:

$$U = [2\omega(\omega+\varkappa)]^{-1}\left\{\omega+\varkappa+p_k(\gamma_k\otimes 1)\right\}\left\{\omega+\varkappa-p_l(1\otimes\gamma_l)\right\}. \tag{2.7}$$

Преобразованием (2.7) уравнения (2.1) приводятся к виду:

$$\begin{aligned} & i\frac{\partial}{\partial t}\Phi = \omega\overset{(1)}{\gamma_0}\Phi, \\ & i\frac{\partial}{\partial t}\Phi = -\omega\overset{(2)}{\gamma_0}\Phi, \qquad \Phi = U\Psi. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Уравнение (2.8), переписанное как уравнение для компонент ϕ, будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & i\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x;\xi_1,\xi_2) = \omega(\gamma_0)_{\xi_1\eta}\phi(t,x;\eta,\xi_2), \\ & i\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x;\xi_1,\xi_2) = -\omega(\gamma_0)_{\xi_2\eta}\phi(t,x;\xi_1,\eta). \end{aligned} \tag{2.8$'$}$$

Единственное дополнительное условие, которое сужает пространство $\{F'|P^2F' = \varkappa^2F'\}$ $(F' = UF)$ к пространству решений $\{\Phi\}$ имеет вид:

$$\overset{(1)}{\gamma_0}\Phi = -\overset{(2)}{\gamma_0}\Phi \tag{2.9}$$

или

$$(\gamma_0)_{\xi_1\eta}\phi(\eta,\xi_2) = -(\gamma_0)_{\xi_2\eta}\phi(\xi_1,\eta). \tag{2.9$'$}$$

Если представить пространство $\{F'|P^2F' = \varkappa^2F'\}$ в виде прямой суммы:

$$\{F'|P^2F' = \varkappa^2F'\} = \{\Phi\}\oplus\{R\}, \tag{2.10}$$

где $\{\Phi\}$ — пространство решений (2.8), а $\{R\}$ — пространство, которое исключается условием (2.9), тогда уравнения (2.8) можно преобразовать к следующему виду

$$\begin{aligned} & i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \Phi^{(+)} \\ \Phi^{(-)} \\ R \end{pmatrix} = \omega\begin{pmatrix} 1^4 & 0 & 0 \\ 0 & -1^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0^8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi^{(+)} \\ \Phi^{(-)} \\ R \end{pmatrix}, \\ & R = 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

В (2.11) условие (2,9) выделено в явном виде. Волновые функции $\Phi^{(+)}$, $\Phi^{(-)}$ и R определяются следующими компонентами:

$$\Phi^{(+)} = \begin{pmatrix} \phi^{(+)}(t,x;1,3) \\ \phi^{(+)}(t,x;1,4) \\ \phi^{(+)}(t,x;2,3) \\ \phi^{(+)}(t,x;2,4) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi^{(+)}_{1,1}(t,x) \\ \phi^{(+)}_{1,0}(t,x) \\ \phi^{(+)}_{0,1}(t,x) \\ \phi^{(+)}_{0,0}(t,x) \end{pmatrix}, \tag{2.12а}$$

$$\Phi^{(-)} = \begin{pmatrix} \phi^{(-)}(t,x;3,1) \\ \phi^{(-)}(t,x;3,2) \\ \phi^{(-)}(t,x;4,1) \\ \phi^{(-)}(t,x;4,2) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi^{(-)}_{1,1}(t,x) \\ \phi^{(-)}_{1,0}(t,x) \\ \phi^{(-)}_{0,1}(t,x) \\ \phi^{(-)}_{0,0}(t,x) \end{pmatrix}, \tag{2.12б}$$

$$R = \begin{pmatrix} \phi(t,x;1,1) \\ \phi(t,x;1,2) \\ \phi(t,x;2,1) \\ \phi(t,x;2,2) \\ \phi(t,x;3,3) \\ \phi(t,x;3,4) \\ \phi(t,x;4,3) \\ \phi(t,x;4,4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \rho_5 \\ \rho_6 \\ \rho_7 \\ \rho_8 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Генераторы группы $P(1,4)$ связанные с уравнением (2.8), имеют вид

$$\begin{gathered} P'_0 = \omega\beta_0, \qquad P'_k = p_k, \qquad J'_{kl} = x_k p_l - x_l p_k + \widetilde{S}_{kl}, \\ J'_{0k} = x_0 p_k - \frac{\beta_0}{2}[\omega, x_k] + \frac{\beta_0 p_l}{\omega + \varkappa}\widetilde{S}_{lk}. \end{gathered} \tag{2.14}$$

Операторы $\widetilde{S}_a$, $\widetilde{T}_a$ (2.6) принимают “ящичную” форму на пространствах $\{\Phi^{(+)}\}$, $\{\Phi^{(-)}\}$ и $\{R\}$. Операторы $\widetilde{S}^2_a$ и $\widetilde{T}^2_a$ уже диагонализованы в пространствах $\{\Phi^{(+)}\}$ и $\{\Phi^{(-)}\}$. Чтобы диагонализовать “ящики” операторов $\widetilde{S}^2_a$ и $\widetilde{T}^2_a$, действующие в $\{R\}$, нужно в $\{R\}$ перейти к новому базису путем симметризации и аитисимметризации базисных элементов.

Используя (2.6), можно доказать, что на пространствах $\{\Phi\}$ и $\{R\}$ реализуются следующие представления:

$$\begin{aligned} &\{\Phi\}: \quad D^{(+)}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \oplus D^{(-)}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) && \text{группы } P(1,4); \\ &\{R\}: \quad D(1,0) \oplus D(0,1) \oplus 2D(0,0) && \text{подгруппы } O(4), \end{aligned}$$

поскольку вектора R удовлетворяют уравнениям

$$i\frac{\partial}{\partial t}R = 0, \qquad \omega R = 0.$$

Это означает, что фактически компоненты ρ_α вектора R ($\alpha = 1, \ldots, 8$) не зависят от переменных t и x. Отсюда следует, что ящики всех генераторов (2.14), действующих в $\{R\}$, будут состоять из одних нулей, за исключением ящика генераторов J_{kl}, которые будут содержать операторы $\widetilde{S}_{kl}^{\{R\}}$, удовлетворяющие алгебре $O(4)$.

В заключение отметим, что первое уравнение из (2.11) можно унитарными преобразованиями свести к виду:

$$p_0\Psi' = \left\{ \left[\frac{\beta_0}{2}, \frac{\beta_k}{2} \right] p_k + \frac{\beta_0}{2}\varkappa \right\} \Psi', \tag{2.15}$$

которое является уравнением типа Дэффина–Кеммера. Вектора Ψ', в отличие от векторов $\Psi \in \{\Psi\}$, являющихся решениями (2.1), содержат лишние компоненты (прообразы компонент ρ_α).

2. Рассмотрим систему (1.21) для $M = 2$, $N = 1$. В этом случае уравнения (1.21) принимают вид:

$$\begin{aligned} &p^\mu \overset{(1)}{\gamma}_\mu \Psi = p^\mu(\gamma_\mu \otimes 1 \otimes 1)\Psi = \varkappa\Psi, \\ &p^\mu \overset{(2)}{\gamma}_\mu \Psi = p^\mu(1 \otimes \gamma_\mu \otimes 1)\Psi = \varkappa\Psi, \\ &p^\mu \overset{(3)}{\gamma}_\mu \Psi = p^\mu(1 \otimes 1 \otimes \gamma_\mu)\Psi = -\varkappa\Psi. \end{aligned} \tag{2.16}$$

На элементы $\Psi \in \{\Psi\}$, где $\{\Psi\}$ — пространство решений (2.16), налагаются следующие ограничения:

$$\text{а)}\quad \{\Psi\} \subset \{F | P^2 F = \varkappa^2 F\} \subset \{F\}, \tag{2.17}$$

где

$$\{F\} \equiv \{\Psi^+\} \otimes \{\Psi^+\} \otimes \{\Psi^-\};$$

$\{\Psi^+\}$ и $\{\Psi^-\}$ — пространства решений уравнения (1.14) и уравнения (1.15) соответственно.

Это ограничение непосредственно следует из уравнений (2.16) и инвариантности (2.16) относительно группы $P(1,4)$.

$$\begin{aligned} \text{б)}\quad &\overset{(1)}{\gamma}_0 \Phi = \overset{(2)}{\gamma}_0 \Phi, \\ &\overset{(1)}{\gamma}_0 \Phi = -\overset{(3)}{\gamma}_0 \Phi, \\ &\overset{(2)}{\gamma}_0 \Phi = -\overset{(3)}{\gamma}_0 \Phi, \end{aligned} \tag{2.18}$$

где Φ — фолди-образ Ψ:

$$\begin{aligned} &\Phi = U\Psi, \\ &U = [2\omega(\omega + \varkappa)]^{-3/2} \left(\omega + \varkappa + \overset{(1)}{\gamma}_k p_k \right) \left(\omega + \varkappa + \overset{(2)}{\gamma}_l p_l \right) \left(\omega + \varkappa - \overset{(3)}{\gamma}_j p_j \right). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Дополнительные условия (2.18) следуют из уравнений (2.16) в представлении Фолди

$$\begin{aligned} &p_0\Phi = \omega \overset{(1)}{\gamma}_0 \Phi, \\ &p_0\Phi = \omega \overset{(2)}{\gamma}_0 \Phi, \\ &p_0\Phi = -\omega \overset{(3)}{\gamma}_0 \Phi. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Ограничение (2.17) в представлении Фолди представляется в виде:

$$\begin{aligned} &\{\Phi\} \subset \{F' | P^2 F' = \varkappa^2 F'\} \subset \{F'\}, \\ &\{F'\} \equiv \{\Phi^+\} \otimes \{\Phi^+\} \otimes \{\Phi^-\}, \end{aligned} \tag{2.17$'$}$$

где

$$F' = UF.$$

Этих ограничений достаточно, чтобы найти представление группы $P(1,4)$, которое реализуется на $\{\Phi\}$ (или $\{\Psi\}$).

Условие (2.17) позволяет найти явный вид генераторов $P(1,4)$, действующих в пространстве $\{\Phi\}$. Они имеют вид:

$$\begin{aligned} &P'_0 = \omega\widetilde{\gamma}_0, \qquad P'_k = p_k, \\ &J'_{kl} = x_k p_l - x_l p_k + \widetilde{S}_{kl}, \qquad \widetilde{S}_{kl} = \frac{i}{4}\,[\widetilde{\gamma}_k, \widetilde{\gamma}_l]_-\,, \\ &J'_{0k} = x_0 p_k - \frac{\widetilde{\gamma}_0}{2}[\omega, x_k]_+ + \frac{\widetilde{\gamma}_0 p_l}{\omega + \varkappa}\widetilde{S}_{lk}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

где

$$\widetilde{\gamma}_\mu = \overset{(1)}{\gamma}_\mu + \overset{(2)}{\gamma}_\mu - \overset{(3)}{\gamma}_\mu.$$

Операторы $\widetilde{S}_{kl}$ представимы также в виде:

$$\widetilde{S}_{kl} = \overset{(1)}{S}_{kl} + \overset{(2)}{S}_{kl} + \overset{(3)}{S}_{kl}, \qquad S_{kl} = \frac{i}{4}\,[\gamma_k, \gamma_l]_-\,. \tag{2.22}$$

Дополнительные условия (2.18) сужают пространство $\{F' | P^2 F' = \varkappa^2 F'\}$ до пространства решений $\{\Phi\}$. Если γ_0 — матрица диагональна с элементами $(1, 1, -1, -1)$, тогда векторы $\Phi \in \{\Phi\}$ определяются следующими ненулевыми компонентами:

$$\begin{aligned} &\phi^{(+)}(t, x; \xi_1, \xi_2, \xi_3), \qquad \xi_1, \xi_2 = 1, 2, \quad \xi_3 = 3, 4, \\ &\phi^{(-)}(t, x; \xi_1, \xi_2, \xi_3), \qquad \xi_1, \xi_2 = 3, 4, \quad \xi_3 = 1, 2. \end{aligned} \tag{2.23}$$

В силу инвариантности (2.16) и (2.20) относительно перестановки $\xi_1 \leftrightarrow \xi_2$, пространство $\{\Phi\}$ можно разложить в прямую сумму

$$\{\Phi\} = \{\Phi_S\} \oplus \{\Phi_A\}$$

пространств, симметричных Φ_S и антисимметричных Φ_A функций относительно операции $\xi_1 \leftrightarrow \xi_2$.

Волновые функции Φ_S и Φ_A определяются следующими компонентами:

$$\begin{aligned} &\phi_S^{(+)} = \phi^{(+)}(t, x; [\xi_1, \xi_2]_+, \xi_3), \qquad \xi_1, \xi_2 = 1, 2, \quad \xi_3 = 3, 4; \\ &\phi_S^{(-)} = \phi^{(-)}(t, x; [\xi_1, \xi_2]_+, \xi_3), \qquad \xi_1, \xi_2 = 3, 4, \quad \xi_3 = 1, 2; \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned} &\phi_A^{(+)} = \phi^{(+)}(t, x; [\xi_1, \xi_2]_-, \xi_3), \qquad \xi_1, \xi_2 = 1, 2, \quad \xi_3 = 3, 4; \\ &\phi_A^{(-)} = \phi^{(-)}(t, x; [\xi_1, \xi_2]_-, \xi_3), \qquad \xi_1, \xi_2 = 3, 4, \quad \xi_3 = 1, 2, \end{aligned} \tag{2.25}$$

где $[\xi_1, \xi_2]_\pm$ обозначает симметризацию (+) или антисимметризацию (−) компонент ϕ относительно перестановок $\xi_1 \leftrightarrow \xi_2$. Например,

$$\phi^{(+)}([1,2]_\pm, 3) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\phi^{(+)}(1,2,3) \pm \phi^{(+)}(2,1,3)\right].$$

Операторы $\widetilde{S}_3$, $\widetilde{T}_3$, $\widetilde{S}_a^2$ и $\widetilde{T}_a^2$ определяемые (2.22) и (1.10)–(1.12), диагональны на $\{\Phi_S\}$ и $\{\Phi_A\}$. Учитывая (1.18), можно найти собственные значения этих операторов на каждом элементе базиса пространств $\{\Phi_S\}$, $\{\Phi_A\}$. Таким путем можно показать, что на $\{\Phi_S\}$ и $\{\Phi_A\}$ и реализуются следующие представления группы $P(1,4)$:

$$\{\Phi_S\}: \quad D^{(+)}\left(1, \frac{1}{2}\right) \oplus D^{(-)}\left(\frac{1}{2}, 1\right), \tag{2.26}$$

$$\{\Phi_A\}: \quad D^{(+)}\left(0, \frac{1}{2}\right) \oplus D^{(-)}\left(\frac{1}{2}, 0\right). \tag{2.27}$$

Если ограничиться классом симметризованных решений $\{\Phi_S\}$ (или $\{\Psi_A\}$), тогда уравнение (2.16) описывает частицу со спином $s = 1$ и изоспином $t = \frac{1}{2}$, а также античастицу $s = \frac{1}{2}$, $t = 1$, т.е. уравнение (2.16) описывает систему (K^*, Σ) (при этом триплет Σ следует считать античастицей).

§ 3. Уравнение движения для частицы переменной массы

1. На множестве решений уравнений, рассмотренных в предыдущих параграфах, реализуются представления группы $P(1,4)$, принадлежащие классу I ($P^2 = \varkappa^2 > 0$). В этом параграфе будут найдены уравнения, описывающие движение частицы с переменной массой, но с фиксированным спином s.

Для класса II ($P^2 = W = V = 0$) представлений группы $P(1,4)$, уравнение Дирака в пятимерной схеме имеет вид;

$$p^\mu \gamma_\mu \Psi = 0, \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, 4) \tag{3.1}$$

или

$$H\Psi = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi, \tag{3.2}$$

где

$$H = \gamma_0\gamma_k p_k = \gamma_0\gamma_a p_a + \gamma_0\gamma_4 \frac{p_4}{|p_4|}|p_4|, \qquad k = 1,2,3,4; \qquad a = 1,2,3. \tag{3.3}$$

Уравнение (3.1) можно представить в виде:

$$p^{\mu'}\gamma'_{\mu'}\Psi = |p_4|\Psi, \qquad |p_4| \neq 0, \qquad (\mu' = 0,1,2,3), \tag{3.4}$$

где

$$\gamma'_a = \frac{p_4}{|p_4|}\gamma_a\gamma_4, \qquad \gamma'_0 = \frac{p_4}{|p_4|}\gamma_0\gamma_4. \tag{3.5}$$

Операторы $\gamma'_{\mu'}$ удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и обычно матрицы Дирака, т.е.

$$\begin{gathered}\left[\gamma'_{\mu'}, \gamma'_{\nu'}\right] = 2g_{\mu'\nu'}, \qquad g_{00} = -g_{aa} = 1, \qquad g_{\mu'\nu'} = 0, \quad (\mu \neq \nu'),\\ \left[\gamma'_{\mu'}, p_k\right]_- = \left[\gamma'_{\mu'}, x_k\right] = 0.\end{gathered} \tag{3.6}$$

В канонической (шредингеровской) форме уравнение (3.4) выглядит как

$$i\frac{\partial}{\partial t}\chi = \gamma_0\omega\chi, \qquad \omega = \sqrt{p_a^2 + p_4^2}, \tag{3.7}$$

$$\chi = U\Psi, \tag{3.8}$$

где U — оператор преобразования типа Фолди–Войтхойзена:

$$U = \left[2\omega(\omega + |p_4|)\right]^{-1/2}(\omega + |p_4| + \gamma_a' p_a)\,. \tag{3.9}$$

Генераторы группы $P(1,4)$, определенные на решениях уравнения (3.7), имеют вид:

$$\begin{aligned}
&P_0' = \omega\gamma_0', \qquad P_k = p_k,\\
&J_{ab}' = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \qquad S_{ab} = \frac{i}{4}\left[\gamma_a', \gamma_b'\right]_-\,,\\
&J_{4a} = x_4 p_a - x_a p_4 + \frac{p_4}{|p_4|}\frac{p_b}{\omega + |p_4|}S_{ab},\\
&J_{0a} = x_0 p_a - \frac{\gamma_0'}{2}[\omega, x_a]_+ + \frac{\gamma_0' p_b}{\omega + |p_4|}S_{ba},\\
&J_{04} = x_0 p_4 - \frac{\gamma_0'}{2}[\omega, x_4]_+,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$[S_{ab}, S_{cd}]_- = i\left(\delta_{ac}S_{bd} + \delta_{bd}S_{ac} - \delta_{ad}S_{bc} - \delta_{bc}S_{ad}\right). \tag{3.11}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что генераторы (3.10) удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.1). Детальный вывод (3.10) будет проведен в другой работе.

Особенностью этого класса представлений будет то, что невозможно перейти в такую систему отсчета, где все $p_k = 0$. Если генераторы представлены в виде (3.10), тогда возможна система, в которой $p_a = 0$, $p_4 \neq 0$. Это позволяет требовать, чтобы $|p_4| \neq 0$ в уравнении (3.4). При переходе к такой системе отсчета алгебра генераторов (3.10) сужается к алгебре генераторов (3.11) группы $O(3)$. Таким образом, малой группой в этом классе представлений будет группа $O(3)$, поэтому все представления группы $P(1,4)$, реализуемые в пространстве решений уравнений типа (3.1) и (3.7), будут унитарны, конечномерны и характеризоваться собственными значениями оператора энергии и числом s, которое принимает целые и полуцелые значения.

Оператор спина $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$ для уравнения (3.1) имеет такой же вид, как и для обычного уравнения Дирака (относительно $P(1,3)$):

$$S_a = \frac{1}{2}\epsilon_{abc}S_{bc} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & \sigma_a \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

σ_a — матрицы Паули.

Из (3.12) и (3.10) вытекает, что на множестве решений уравнения (3.1) реализуется представление

$$D^{(+)}\left(s = \frac{1}{2}\right) \oplus D^{(-)}\left(s = \frac{1}{2}\right) \tag{3.13}$$

группы $P(1,4)$.

2. Уравнение движения частицы с произвольным спином и с произвольной не равной нулю массой, нетрудно выписать, если заметить, что уравнение (3.4) отличается от обычного уравнения Дирака заменой

$$m \to |p_4|, \qquad \gamma_{\mu'} \to \gamma'_{\mu'}, \tag{3.14}$$

и можно буквально повторить все рассуждения Баргмана и Вигнера, проведенные в работе [6]. Поэтому для частиц с переменной массой и спином $s = \frac{M}{2}$ имеет место система уравнений:

$$p^{\mu'} \overset{(m)}{\gamma'_{\mu'}} \Psi = |p_4| \Psi \qquad (m = 1, 2, \ldots, M), \tag{3.15}$$

причем предполагается, что компоненты $\psi(t, x; \xi_1, \ldots, \xi_M)$ волновой функции Ψ полностью симметризованы относительно любой перестановки $\xi_m \leftrightarrow \xi_{m'}$.

Генераторы, действующие в пространстве $\{\Phi\}$, имеют вид:

$$\begin{gathered}
P'_0 = \omega \widetilde{\gamma}'_0, \qquad P'_k = p_k, \\
J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + \widetilde{S}_{ab}, \qquad \widetilde{S}_{ab} = \frac{i}{4} [\widetilde{\gamma}'_a, \widetilde{\gamma}'_b]_-, \\
J_{4a} = x_4 p_a - x_a p_4 + \frac{p_4}{|p_4|} \frac{p_b}{\omega + |p_4|} \widetilde{S}_{ab}, \\
J_{0a} = x_0 p_a - \frac{\widetilde{\gamma}'_0}{2} [\omega, x_a]_+ + \frac{\widetilde{\gamma}'_0 p_b}{\omega + |p_4|} \widetilde{S}_{ba}, \\
J_{04} = x_0 p_4 - \frac{\widetilde{\gamma}'_0}{2} [\omega, x_4]_+,
\end{gathered} \tag{3.16}$$

где

$$\begin{gathered}
\Phi = U\Psi, \qquad U = \prod_{m=1}^{M} \overset{(m)}{U}, \\
\overset{(m)}{U} = [2\omega(\omega + |p_4|)]^{-1/2} \left(\omega + |p_4| + \overset{(m)}{\gamma'_a} p_a \right), \qquad \widetilde{\gamma}'_{\mu'} = \sum_{m=1}^{M} \overset{(m)}{\gamma'_{\mu'}}.
\end{gathered} \tag{3.17}$$

Уравнение (3.15) преобразованием (3.17) приводится к виду:

$$p_0 \Phi = \omega \overset{(m)}{\gamma'_0} \Phi, \tag{3.18}$$

которое эквивалентно следующему уравнению канонического вида

$$p_0 \Phi = \omega \hat{\beta} \Phi, \tag{3.19}$$

где

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1^{(M+1)} & 0 \\ 0 & -1^{(M+1)} \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Таким образом, уравнения типа Баргмана–Вигнера (3.15) в пятимерной схеме описывают частицу и античастицу с фиксированным спином s, но с нефиксированной массой $|p_4|$. На решениях уравнений (3.15) реализуется представление

$$D^{(+)} \left(\frac{M}{2} \right) \oplus D^{(-)} \left(\frac{M}{2} \right) \tag{3.21}$$

группы $P(1, 4)$.

§ 4. *P*-, *T*-, *C*-свойства уравнения Дирака

В этом параграфе изучаются свойства уравнения Дирака (1.14) (или (1.15)) относительно пространственного и временного отражений, а также операции зарядового сопряжения.

При замене $x_k \to -x_k$ волновая функция $\Psi^+(t,x)$ может преобразоваться, вообще говоря, двумя неэквивалентными способами:

$$P^{(1)}\Psi^+(t,x) = r^{(1)}\Psi^+(t,-x), \qquad \left[P^{(1)}\right]^2 \sim 1 \tag{4.1}$$

либо

$$P^{(2)}\Psi^+(t,x) = r^{(2)}\overset{*}{\Psi}{}^+(t,-x), \qquad \left[P^{(2}\right]^2 \sim 1, \tag{4.2}$$

где $r^{(1)}$, $r^{(2)}$ — (4×4)-матрицы; $P^{(1)}$ — эрмитовый, а $P^{(2)}$ — антиэрмитовый операторы, удовлетворяющие таким соотношениям:

$$\left[P^{(1)}, P_k\right]_+ = \left[P^{(1)}, J_{0k}\right]_+ = 0, \qquad \left[P^{(1)}, P_0\right]_- = \left[P^{(1)}, J_{kl}\right]_- = 0, \tag{4.3}$$

$$\left[P^{(2)}, P_k\right]_- = \left[P^{(2)}, J_{0k}\right]_- = 0, \qquad \left[P^{(2)}, P_0\right]_+ = \left[P^{(2)}, J_{kl}\right]_+ = 0. \tag{4.4}$$

При замене $t \to -t$ волновая функция также может преобразоваться двумя различными способами. Согласно Паули

$$T^{(1)}\Psi^+(t,x) = \tau^{(1)}\Psi^+(-t,x), \qquad \left[T^{(1)}\right]^2 \sim 1, \tag{4.5}$$

$$\left[T^{(1)}, P_k\right]_- = \left[T^{(1)}, J_{kl}\right]_- = 0, \qquad \left[T^{(1)}, P_0\right]_+ = \left[T^{(1)}, J_{0k}\right]_+ = 0, \tag{4.6}$$

где $\tau^{(1)}$ — (4×4)-матрица.

Согласно Вигнеру

$$T^{(2)}\Psi^+(t,x) = \tau^{(2)}\overset{*}{\Psi}{}^+(-t,x), \qquad \left[T^{(2}\right]^2 \sim 1, \tag{4.7}$$

$$\left[T^{(2)}, P_k\right]_+ = \left[T^{(2)}, J_{kl}\right]_+ = 0, \qquad \left[T^{(2)}, P_0\right]_- = \left[T^{(2)}, J_{0k}\right]_- = 0, \tag{4.8}$$

где $\tau^{(2)}$ — (4×4)-матрица.

Оператор зарядового сопряжения определяется как

$$C\Psi^+(t,x) = \tau^{(3)}\overset{*}{\Psi}{}^+(t,x), \qquad C^2 \sim 1, \tag{4.9}$$

$$[C, P_\mu]_+ = 0, \qquad [C, J_{\mu\nu}]_+ = 0, \tag{4.10}$$

где $\tau^{(2)}$ — (4×4)-матрица. Из этого определения ясно, что оператор C можно определить через операторы $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ или через $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ как

$$C^{(1)} = T^{(1)}T^{(2)} = T^{(2)}T^{(1)}, \tag{4.11}$$

$$C^{(2)} = P^{(1)}P^{(2)} = P^{(2)}P^{(1)}. \tag{4.11$'$}$$

Матрицы $r^{(1)}$, $r^{(2)}$, $\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$, $\tau^{(3)}$ можно представить в виде:

$$\begin{aligned} r^{(i)} &= a_\mu^{(i)}\alpha_\mu + a_{\mu\nu}^{(i)}\alpha_\mu\alpha_\nu, \qquad \mu<\nu, \quad i=1,2, \\ \tau^{(l)} &= b_\mu^{(l)}\alpha_\mu + b_{\mu\nu}^{(l)}\alpha_\mu\alpha_\nu, \qquad \mu<\nu, \quad l=1,2,3 \end{aligned} \tag{4.12}$$

где $a_\mu^{(i)}$, $a_{\mu\nu}^{(i)}$, $b_\mu^{(l)}$ и $b_{\mu\nu}^{(l)}$ — произвольные числа ($\mu=0,1,\ldots,4$).

Зная явный вид генераторов P_μ, $J_{\mu\nu}$ (формула (1.17)), действующих в пространстве решений $\{\Psi^+\}$ (или $\{\Psi^-\}$) уравнения (1.14) (или (1.15)) и учитывая (4.12), можно убедиться непосредственной проверкой, что соотношения (4.4), (4.6), (4.10) удовлетворяются только для нулевых матриц $\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$ и $\tau^{(3)}$. Соотношения (4.3) и (4.8) удовлетворяются, если

$$r^{(1)} = \beta, \qquad \tau^{(2)} = i\alpha_1\alpha_3, \tag{4.13}$$

Итак, уравнение (1.14) (или (1.15)) $P^{(2)}$-, $T^{(1)}$-, C-неинвариантно, но $P^{(1)}$-, $T^{(2)}$-инвариантно [9]. Это означает, что четырехкомпонентное уравнение Дирака на группе $P(1,4)$ $P^{(1)}T^{(1)}C^{(1)}$-, $P^{(2)}T^{(2)}C^{(2)}$-инвариантно, но $P^{(1)}T^{(2)}C^{(2)}$-, $P^{(2)}T^{(2)}C^{(1)}$-, $P^{(2)}T^{(1)}C^{(2)}$-неинвариантно.

Для сравнения напомним, что обычное уравнение Дирака на группе $P(1,3)$, как хорошо известно, P-, C-, T-инвариантно. Такое отличие P-, C-, T-свойств 5-мерного уравнения Дирака (1.14) от обычного уравнения Дирака являются следствием того, что уравнение (1.14) (или (1.15)) не описывает частицу и античастицу, поскольку на решениях этого уравнения реализуется представление $D^{(+)}\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus D^{(-)}\left(0,\frac{1}{2}\right)$ группы $P(1,4)$.

Рассмотрим теперь уравнение, являющейся “прямой сумой” уравнений (1.14) и (1,15):

$$H\Psi = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi, \tag{4.14}$$

$$H = \Gamma_0\Gamma_k p_k + \Gamma_0\varkappa, \tag{4.15}$$

$$\Gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_k \\ \gamma_k & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.16}$$

Ψ — восьмикомпонентный спинор.

На решениях уравнения (4.14) реализуется представление

$$D^{(+)}\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus D^{(-)}\left(0,\frac{1}{2}\right)\oplus D^{(+)}\left(0,\frac{1}{2}\right)\oplus D^{(-)}\left(\frac{1}{2},0\right). \tag{4.17}$$

Генераторы группы $P(1,4)$, действующие в пространстве решений уравнения (1.14), выглядят как

$$\begin{aligned} &P_0 = H = \Gamma_0\Gamma_k p_k + \Gamma_0\varkappa, \qquad P_k = p_k, \\ &J_{kl} = x_k p_l - x_l p_k + S_{kl}^{(8)}, \qquad S_{kl}^{(8)} = \frac{i}{4}[\Gamma_k,\Gamma_l]_-, \\ &J_{0k} = x_0 p_k - \frac{1}{2}[H,x_k]_+. \end{aligned} \tag{1.17$'$}$$

Операторами спина и изоспина будут матрицы

$$S_a^{(8)} = \begin{pmatrix} \sigma_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_a^{(8)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_a \end{pmatrix}. \tag{1.12''}$$

Операторы P, T, C на восьмикомпонентной волновой функции определяется как

$$P^{(1)}\Psi(t,x) = R^{(1)}\Psi(t,-x), \qquad P^{(2)}\Psi(t,x) = R^{(2)}\Psi(t,-x), \tag{4.18}$$

$$T^{(1)}\Psi(t,x) = \mathcal{T}^{(1)}\overset{*}{\Psi}(-t,x), \qquad T^{(2)}\Psi(t,x) = \mathcal{T}^{(2)}\overset{*}{\Psi}(-t,x), \tag{4.19}$$

$$C\Psi(t,x) = \mathcal{T}^{(3)}\overset{*}{\Psi}(t,x), \tag{4.20}$$

где

$$R^{(1)} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \qquad R^{(2)} = i\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1\alpha_3 \\ \alpha_1\alpha_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.21}$$

$$\mathcal{T}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{T}^{(2)} = i\begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_1\alpha_3 \end{pmatrix}, \tag{4.22}$$

$$\mathcal{T}^{(3)} = i\begin{pmatrix} 0 & \alpha_2\alpha_4 \\ \alpha_2\alpha_4 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.23}$$

Можно проверить, что при выборе матриц R, $\mathcal{T}$, в виде (4.21)–(4.23) соотношения (4.3), (4.4), (4.6), (4.8) и (4.10) выполняются. Это означает, что восьмикомпонентное уравнение (4.14) P-, T-, C-, PTC-инвариантно.

Таким образом, в схеме $P(1,4)$ простейшим P-, T-, C-инвариантным уравнением, описывающим частицу (мультиплет) со спином и изоспином, является восьмикомпонентное уравнение (4.14). Отсюда ясно, что для построения P-, T-, C-инвариантных уравнений типа Б–В, следует в качестве исходного уравнения взять уравнение (4.14). Из предыдущего рассмотрения ясно также, что свойством P-, T-, C-инвариантности будут обладать лишь такие уравнения в схеме $P(1,4)$, на решениях которых реализуются представления, симметричные относительно замены $s \leftrightarrow t$:

$$\begin{aligned} &D^{(+)}(s,t) \oplus D^{(-)}(s,t) \oplus D^{(+)}(t,s) \oplus D^{(-)}(t,s), \qquad (t \neq s), \\ &D^{(+)}(s,t) \oplus D^{(-)}(s,t), \qquad (t = s). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Для полноты укажем, что уравнения (3.15), на решениях которых реализуются представления класса II (с $W = V = 0$) P-, T-, C-инвариантно. Этот факт является следствием того, что уравнение (3.1) или (3.4) инвариантно относительно этих операций. Действительно, если выбрать матрицы $r^{(1)}$, $r^{(2)}$, $\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$, $\tau^{(3)}$ в виде

$$r^{(1)} = \gamma_0', \quad r^{(2)} = \gamma_0'\gamma_2', \quad \tau^{(1)} = \gamma_1'\gamma_2'\gamma_3', \quad \tau^{(2)} = \gamma_1'\gamma_3', \quad \tau^{(3)} = \gamma_2', \tag{4.25}$$

то легко убедиться, что уравнение (3.4) P-, T-, C-инвариантно.

Итак, уравнение (3.15), описывавшее свободное движение частицы со спином s и нефиксированной массой $|p_4|$, P-, T-, C-инвариантно.

§ 5. P-, T-, C-инвариантные уравнения типа Баргмана–Вигнера

Уравнения Б–В, рассмотренные в § 1, T-, P-, C-инвариантны лишь в частном случае $M = N$. Для получения T-, P-, C-инвариантных уравнений Б–В нужно использовать, как уже отмечалось, в качестве исходного восьмикомпонентное уравнение вида (4.14).

Уравнение (4.14) эквивалентно двум уравнениям

$$H\Psi = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi, \qquad P^+\Psi = 0, \tag{5.1}$$

и

$$H\Psi = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi, \qquad P^-\Psi = 0, \tag{5.2}$$

где $P^\pm$ — проекционные операторы вида

$$\begin{gathered} P^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \Gamma), \qquad P^+ + P^- = 1, \qquad P^+P^- = 0, \\ \Gamma = \Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4 = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & -\gamma_0 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{5.3}$$

причем операторы Γ коммутируют с операторами уравнения $p^\mu\Gamma_\mu$, а также с генераторами (1.17′). Поэтому пространство решений $\{\Psi\}$ уравнения (1.14) можно разложить на два инвариантных подпространства

$$\{\Psi\} = \{P^+\Psi\} \oplus \{P^-\Psi\}.$$

Уравнение (5.1) (или (5.2)) имеет в качестве пространства решений подпространство $\{P^-\Psi\}$ (или $\{P^+\Psi\}$) на котором реализуется представление $D^{(+)}\left(0,\frac{1}{2}\right) \oplus D^{(-)}\left(\frac{1}{2},0\right)$ (или $D^{(+)}\left(\frac{1}{2},0\right) \oplus D^{(-)}\left(0,\frac{1}{2}\right)$), что доказывает, что (5.1) эквивалентно (1.15), а (5.2) эквивалентно (1.14).

Уравнения Б–В, если в качестве исходного уравнения выбрать уравнение (4.14), будут иметь вид

$$p^\mu \overset{(m)}{\Gamma}_\mu \Psi = \varkappa\Psi, \qquad (m = 1, 2, \ldots, M). \tag{5.4}$$

Пространство решений $\{\Psi\}$ уравнений (5.4) реализует прямую сумму представлений $D^{(\pm)}(s,t)$, где

$$\begin{gathered} s, t = \frac{M}{2}, \frac{M}{2} - 1, \frac{M}{2} - 2, \ldots, \\ s + t = \frac{M}{2}, \frac{M}{2} - 1, \frac{M}{2} - 2, \ldots. \end{gathered} \tag{5.5}$$

Причем, в этой сумме некоторые представления могут повторяться несколько раз. Существует, тем не менее, проекционный оператор, проектирующий $\{\Psi\}$ на определенное инвариантное подпространство $\{\Psi'\} \subset \{\Psi\}$, в котором реализуется лишь прямая сумма неприводимых представлений вида (4.24) с числами s и t, удовлетворяющими (5.5). Обозначим такой проекционный оператор через P', т.е.

$$\Psi' = P'\Psi,$$

тогда T-, P-, C-инвариантное уравнение с $\Psi \in \{\Psi'\}$ будет иметь вид:

$$p^\mu \overset{(m)}{\Gamma}_\mu \Psi = \varkappa\Psi, \qquad (1-P')\Psi = 0. \tag{5.6}$$

Рассмотрим детально уравнение (5.4) для случая $M = 2$. Уравнение (5.4) принимает вид

$$p^\mu \overset{(1)}{\Gamma}_\mu \Psi = \varkappa\Psi, \qquad p^\mu \overset{(2)}{\Gamma}_\mu \Psi = \varkappa\Psi. \tag{5.7}$$

Волновая функция $\Psi \in \{\Psi\}$ ($\{\Psi\}$ — пространство решений (5.7)) определяется своими компонентами вида

$$\psi = \psi(t, x; \xi_1, \xi_2) \equiv \psi(\xi_1, \xi_2) \qquad (\xi_1, \xi_2 = 1, 2, \ldots, 8).$$

Дополнительные условия в этой случае имеют вид

$$\overset{(1)}{\Gamma}_0 \Psi = \overset{(2)}{\Gamma}_0 \Psi \tag{5.8}$$

и приводят к тому, что Ψ определяется лишь следующими компонентами:

$$\begin{aligned} &\psi^{(+)} = \psi^{(+)}(\xi_1, \xi_2), \qquad \xi_1, \xi_2 = 1, 2, 3, 4, \\ &\psi^{(-)} = \psi^{(-)}(\xi_1, \xi_2), \qquad \xi_1, \xi_2 = 5, 6, 7, 8. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Вектора $\Psi^{(\pm)}$, определяемые компонентами $\psi^{(\pm)}$, принадлежат собственному значению ± 1 инварианта ε:

$$\varepsilon \Psi^{(\pm)} = \pm 1 \Psi^{(\pm)}.$$

Рассмотрим операторы

$$\overset{(1)}{\Gamma} = \Gamma \otimes 1, \qquad \overset{(2)}{\Gamma} = 1 \otimes \Gamma, \qquad \overset{(1)}{\Gamma}\overset{(2)}{\Gamma}. \tag{5.10}$$

Нетрудно убедиться, что оператора (5.10) коммутируют с матрицами $\overset{(1)}{\Gamma}_\mu$ и $\overset{(2)}{\Gamma}_\mu$ с генераторами группы $P(1,4)$, которые в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} &P_0 = \frac{1}{2}[\widetilde{\Gamma}_0, \widetilde{\Gamma}_k]_- p_k + \varkappa \widetilde{\Gamma}_0, \qquad P_k = p_k, \\ &J_{kl} = x_k p_l - x_l p_k + \widetilde{S}_{kl}, \qquad \widetilde{S}_{kl} = \frac{i}{4}[\widetilde{\Gamma}_k, \widetilde{\Gamma}_l]_-, \\ &J_{0k} = x_0 p_k - \frac{1}{2}[P_0, x_k]_+, \qquad \widetilde{\Gamma}_\mu = \overset{(1)}{\Gamma}_\mu + \overset{(2)}{\Gamma}_\mu. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Это означает, что из операторов (5.10) можно образовать шесть проекционных операторов

$$\frac{1}{2}\left(1 \pm \overset{(1)}{\Gamma}\right), \qquad \frac{1}{2}\left(1 \pm \overset{(2)}{\Gamma}\right), \qquad \frac{1}{2}\left(1 \pm \overset{(1)}{\Gamma}\overset{(2)}{\Gamma}\right), \tag{5.12}$$

которые разбивают множество $\{\Psi\}$ на инвариантные относительно $P(1,4)$ подмножества.

Существует четыре независимых проекционных оператора, которые образуют полную систему и которые могут быть построены из операторов (5.12):

$$\mathcal{P}_1 = \frac{1}{4}\left(1 + \overset{(1)}{\Gamma}\right)\left(1 + \overset{(2)}{\Gamma}\right), \qquad \mathcal{P}_2 = \frac{1}{4}\left(1 + \overset{(1)}{\Gamma}\right)\left(1 - \overset{(2)}{\Gamma}\right),$$
$$\mathcal{P}_3 = \frac{1}{4}\left(1 - \overset{(1)}{\Gamma}\right)\left(1 + \overset{(2)}{\Gamma}\right), \qquad \mathcal{P}_4 = \frac{1}{4}\left(1 - \overset{(1)}{\Gamma}\right)\left(1 - \overset{(2)}{\Gamma}\right), \tag{5.13}$$
$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3 + \mathcal{P}_4 = 1, \qquad \mathcal{P}_i\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i, \qquad \mathcal{P}_i\mathcal{P}_j = 0 \quad (i \neq j),$$
$$(i, j = 1, 2, 3, 4).$$

Вектора, принадлежащие инвариантным подпространствам

$$M_i = \{\mathcal{P}_i\Psi^{(+)}\} \oplus \{\mathcal{P}_i\Psi^{(-)}\}, \tag{5.14}$$

определяются тогда лишь следующими компонентами из (5.9):

$\Psi \in M_1$ определяются компонентами

$$\begin{aligned} &\psi^{(+)}(\xi_1, \xi_2), \qquad \xi_1, \xi_2 = 1, 2,\\ &\psi^{(-)}(\xi_1, \xi_2), \qquad \xi_1, \xi_2 = 7, 8; \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\Psi \in M_2 \quad — \quad \begin{aligned} &\psi^{(+)}(\xi_1, \xi_2), \qquad \xi_1 = 1, 2, \quad \xi_2 = 3, 4,\\ &\psi^{(-)}(\xi_1, \xi_2), \qquad \xi_1 = 7, 8, \quad \xi_2 = 5, 6; \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\Psi \in M_3 \quad — \quad \begin{aligned} &\psi^{(+)}(\xi_1, \xi_2), \qquad \xi_1 = 3, 4, \quad \xi_2 = 1, 2,\\ &\psi^{(-)}(\xi_1, \xi_2), \qquad \xi_1 = 5, 6, \quad \xi_2 = 7, 8; \end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\Psi \in M_4 \quad — \quad \begin{aligned} &\psi^{(+)}(\xi_1, \xi_2), \qquad \xi_1 = 3, 4, \quad \xi_2 = 3, 4,\\ &\psi^{(-)}(\xi_1, \xi_2), \qquad \xi_1 = 5, 6, \quad \xi_2 = 5, 6. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Пространства M_1 и M_2 могут быть разложены на подпространства симметричных

$$\Psi_S(\xi_1, \xi_2) = \Psi_S(\xi_2, \xi_1)$$

и антисимметричных

$$\Psi_A(\xi_1, \xi_2) = -\Psi_A(\xi_2, \xi_1)$$

функций. Это видно хотя бы из того, что операторы $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_4$ коммутируют с операцией перестановки $\xi_1 \leftrightarrow \xi_2$ или из выражений (5.15) и (5.18). Пространства M_2, M_3 не допускают такого разложения.

Чтобы указать, какие представления группы $P(1,4)$ реализуются на пространствах M_i, необходимо знать, какие собственные значения имеют операторы $\widetilde{S}_3$, $\widetilde{T}_3$, $\widetilde{S}_a^2$ и $\widetilde{T}_a^2$ на базисных элементах этих пространств. Операторы $\widetilde{S}_a$, $\widetilde{T}_a$, $\widetilde{S}_a^2$ и $\widetilde{T}_a^2$ в этом случае принимают вид:

$$\widetilde{S}_a = \overset{(1)}{S}{}_a^{(8)} + \overset{(2)}{S}{}_a^{(8)}, \qquad \widetilde{T}_a = \overset{(1)}{T}{}_a^{(8)} + \overset{(2)}{T}{}_a^{(8)},$$
$$\widetilde{S}_a^2 = \left[\overset{(1)}{S}{}_a^{(8)}\right]^2 + \left[\overset{(2)}{S}{}_a^{(8)}\right]^2 + 2\overset{(1)}{S}{}_a^{(8)}\overset{(2)}{S}{}_a^{(8)}, \tag{5.19}$$
$$\widetilde{T}_a^2 = \left[\overset{(1)}{T}{}_a^{(8)}\right]^2 + \left[\overset{(2)}{T}{}_a^{(8)}\right]^2 + 2\overset{(1)}{T}{}_a^{(8)}\overset{(2)}{T}{}_a^{(8)}.$$

Операторы $\widetilde{S}_a^2$ и $\widetilde{T}_a^2$ диагональны только на инвариантных подпространствах M_2 и M_3. Чтобы диагонализировать их также и в M_1 и M_4, необходимо в качестве базиса M_1 и M_4 выбрать симметричные и антисимметричные функции

$$M_1 \to M_1^{(S)} \oplus M_1^{(A)}, \qquad M_4 \to M_4^{(S)} \oplus M_4^{(A)}, \tag{5.20}$$

где

$$M_1^{(S)} = \{\mathcal{P}_1\Psi_S^{(+)}\} \oplus \{\mathcal{P}_1\Psi_S^{(-)}\}, \qquad M_1^{(A)} = \{\mathcal{P}_1\Psi_A^{(+)}\} \oplus \{\mathcal{P}_1\Psi_A^{(-)}\}$$

и т.д.

Тогда можно показать, что на $M_1^{(S)}$, $M_1^{(A)}$, M_2, M_3, $M_4^{(S)}$ и $M_4^{(A)}$ реализуются следующие представления группы $P(1,4)$:

$$M_1^{(S)}:\ D^{(+)}(1,0) \oplus D^{(-)}(0,1), \tag{5.21}$$

$$M_1^{(A)}:\ D^{(+)}(0,0) \oplus D^{(-)}(0,0), \tag{5.22}$$

$$M_2:\ D^{(+)}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \oplus D^{(-)}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \tag{5.23}$$

$$M_3:\ D^{(+)}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \oplus D^{(-)}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \tag{5.24}$$

$$M_4^{(S)}:\ D^{(+)}(0,1) \oplus D^{(-)}(1,0), \tag{5.25}$$

$$M_4^{(A)}:\ D^{(+)}(0,0) \oplus D^{(-)}(0,0). \tag{5.26}$$

Теперь можно написать уравнения вида (5.6) для любого из представлений (5.21)–(5.26), или любой их суммы.

Мы выпишем только следующие P-, T-, C-инвариантные уравнения:

для спиносинглета-изосинглета (5.22) или (5.26)

$$\left.\begin{array}{l} p^\mu \overset{(m)}{\Gamma}_\mu \Psi_A = \varkappa \Psi_A \\ (1-\mathcal{P}_1)\Psi_A = 0 \end{array}\right\}, \qquad m = 1,2 \tag{5.27}$$

или

$$(1-\mathcal{P}_4)\Psi_A = 0;$$

для спинодублета-изодублета (5.23) или (5.24)

$$\left.\begin{array}{l} p^\mu \overset{(m)}{\Gamma}_\mu \Psi = \varkappa \Psi \\ (1-\mathcal{P}_2)\Psi = 0 \end{array}\right\}, \qquad m = 1,2 \tag{5.28}$$

или

$$(1-\mathcal{P}_3)\Psi = 0;$$

для спинотриплета-изотриплета

$$\left.\begin{array}{l} p^{\mu}\overset{(m)}{\Gamma}_{\mu}\Psi_S = \varkappa\Psi_S \\ (1-\mathcal{P}_1-\mathcal{P}_4)\Psi_S = 0 \end{array}\right\}, \qquad m = 1, 2. \tag{5.29}$$

Итак, уравнение (5.4) на группе $P(1,4)$, в отличие от обычного уравнения Брагмана–Вигнера на группе $P(1,3)$, описывает не один, а несколько спин-изоспиновых мультиплетов (смесь). С помощью проекционных операторов можно из (5.4) выделять уравнения, описывающие спиносинглет-изосинглет, спинодублет-изодублет, спинодублет-изосинглет и т.д.

В заключение этого параграфа укажем еще один вид уравнений, решения которых, также как и решения уравнений Б–В не содержит лишних компонент.

Уравнения имеют вид

$$p_{\mu}\Psi = (L_{\mu\nu}p^{\nu} + L_{\mu}\varkappa)\Psi, \tag{5.30}$$

где матрицы $L_{\mu\nu}$ и L_{μ} представляются в виде

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{i\lambda}S_{\mu\nu}, \qquad L_{\mu} = \frac{1}{i\lambda}S_{\mu 5}. \tag{5.31}$$

Операторы $S_{\mu\nu}$ и $S_{\mu 5}$ реализуют неприводимое представление $D(\lambda,\lambda_1,\lambda_2)$ группы $O(1,5)$, где λ, λ_1, λ_2 — целые или полуцелые числа, удовлетворяющие условиям

$$\lambda \geq \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0, \qquad \lambda_1 \geq 0, \qquad \lambda_2 \geq 0,$$

где 2λ той же самой четности, что и $2(\lambda_1+\lambda_2)$. Эти числа определяются как собственные значения операторов S_{05}, S_3 и T_3 на старшем векторе.

На решениях уравнений (5.30) реализуется представление

$$D^{(+)}(s=\lambda_1, t=\lambda_2) \oplus D^{(-)}(s=\lambda_2, t=\lambda_1)$$

группы $P(1,4)$.

Соответственно, на решениях уравнений

$$p_{\mu}\Psi = (L_{\mu\nu}p^{\nu} - L_{\mu}\varkappa)\Psi, \tag{5.32}$$

где $L_{\mu\nu}$ и L_{μ} определяются (5.31), реализуется представление

$$D^{(+)}(s=\lambda_2, t=\lambda_1) \oplus D^{(-)}(s=\lambda_1, t=\lambda_2)$$

группы $P(1,4)$.

Отметим, что уравнение (5.30) в том случае, когда $P^2 = W = V = 0$ эквивалентно релятивистскому уравнению для частицы с фиксированным спином s, которое недавно было предложено М. Бакри [10].

1. Румер Ю.Б., Исследования по 5-оптике, Физматгиз, М., 1956.
2. Hegerfeldt G.G., Henning J., *Fortschr. Phys.*, 1968, **16**, 9.
3. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1968, **7**, 79.
4. Фущич В.И., Кривский И.Ю., О волновых уравнениях в 5-пространстве Минковского, Препринт ИТФ-68-72, Киев, 1968.
5. Lipkin H.J., Meshkov S., *Phys. Rev. Lett.*, 1965, **14**, 670.

6. Bargmann V., Wigner E.P., *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1948, **34**, 211.
7. Foldy L.L., Wouthuysen S.A., *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 29.
8. Pursey D.L., *Nucl. Phys. B*, 1964, **7**, 174.
9. Fushchych W.I., Equations of motion in odd-dimensional spaces and T-, C-invariance, Preprint ИТФ-69-17, Kiev, 1969.
10. Bakri M.M., *Nuovo Cimento A*, 1967, **51**, 864.