О волновых уравнениях в 5-пространстве Минковского

В.И. ФУЩИЧ, И.Ю. КРИВСКИЙ

The mass operator is determined as an independent dynamical variable related to the generator $\mathcal{P}_4$ of de Sitter's inhomogeneous group $\mathcal{P}(1,4)$ in the Minkovski 5-space. The classification of irreducible representations of the $\mathcal{P}(1,4)$ algebra is given. The wave equations invariant under the $\mathcal{P}(1,4)$ group and describing the particles with arbitrary spin and isospin are written down in the Schrödinger–Foldy form and isospin entering the equations dynamically so as spin. The equations of the first degree with respect to ∂_μ ($\mu = 0,1,2,3,4$), invariant under $\mathcal{P}(1,4)$ that is, the equations of the Dirac and Kemmer–Duffin type are considered in detail. It is shown that the equation of the Kemmer–Duffin type in the Minkovski five-dimensional space describes a fermion of the nucleon-antinucleon type but not boson than boson.

Report presented at the Conference on Composite Models of Elementary Particle (Institute for Theoretical Physics, Kiev, Ukrainian SSR, June 1968).

Определен оператор массы как независимая динамическая переменная, связанная с генератором $\mathcal{P}_4$ неоднородной группы де Ситтера $\mathcal{P}(1,4)$ в 5-мерном пространстве Минковского. Проведена классификация неприводимых представлений алгебры $\mathcal{P}(1,4)$. Выписаны волновые уравнения в форме Шредингера–Фолди, инвариантные относительно группы $\mathcal{P}(1,4)$, описывающие частицы с произвольным спином и изоспином, причем изоспин входит в эти уравнения динамически, как и спин. Детально рассмотрены примеры уравнений первой степени по ∂_μ ($\mu = 0,1,2,3,4$), инвариантных относительно $\mathcal{P}(1,4)$ — уравнения типа Дирака и Кеммера–Дэффина. Показано, что уравнение типа Кеммера–Дэффина в 5-мерном пространстве Минковского описывает не бозон, а фермион типа нуклон-антинуклон.

Работа была доложена на Рабочем совещании по составным моделям элементарных частиц, состоявшемся в ИТФ АН УССР в июне 1968 г.

§ 1. Введение. Выбор группы

Вопрос о написании физически приемлемых уравнений, в которых переменные типа изоспина, гиперзаряда входили бы динамически, на равных правах со спином, был поднят многими авторами (обзор этих работ см. в [1]). В этих работах главные усилия направлялись на объединение однородной группы Лоренца $O(1,3)$ с группами "внутренних" симметрий. Более последовательное решение этого вопроса, однако, требует нетривиального объединения неоднородной группы Лоренца (группы Пуанкаре $\mathcal{P}(1,3)$) с группами "внутренних" симметрий. Ожидается, что именно на этом пути удастся получить спектр масс и другие характеристики элементарных частиц.

Однако, как показано в работах [2], невозможно нетривиально объединить алгебру[1] $\mathcal{P}(1,3)$ и "внутренние" симметрии в рамках конечномерной алгебры G, если оператор массы $M^2 \equiv P_0^2 - \vec{P}^{\,2}$ имеет дискретный спектр. В работе [3] был построен нетривиальный пример алгебры $G \supset \mathcal{P}(1,3)$ для случая, когда оператор

Препринт ИТФ–68-72, Киев, № 72, 1968, 38 с.

[1]Алгебры и соответствующие им группы обозначается здесь одинаковыми символами.

массы имеет уже полосатый спектр; но и в этом случае оказалось, что алгебра G является бесконечномерной алгеброй Ли. Рассмотрение же бесконечномерных алгебр для физических задач затруднительно как ввиду отсутствия разработанного математического аппарата таких алгебр, так и ввиду необходимости решения заведомо нелегкой задачи придания физического смысла, по крайней мере, всем ее коммутирующим генераторам. Не говоря уже о том, что вопрос о написании уравнений движения, инвариантных относительно таких алгебр, совершенно не ясен. Все это наводит на мысль, что при отыскании объединявшей конечномерной алгебры G следует, очевидно, отказаться от требования дискретности или даже полосатости спектра оператора массы, а экспериментально наблюдаемые дискретные массы пытаться получить как собственные значения оператора массы при наличии соответствующего взаимодействия.

В данной работе предлагается один из возможных способов нетривиального объединения, в терминах уравнений для волновых функций[2] алгебры $\mathcal{P}(1,3)$ с алгебрами "внутренних" симметрий в рамках конечномерной алгебры Ли, имеющий определенное физическое оправдание. Он основан на рассмотрении оператора (квадрата) массы как независимой динамической переменной, определяемой как

$$M^2 \equiv \varkappa^2 + P_4^2, \tag{1.1}$$

где $\varkappa$ – некоторый фиксированный параметр, а P_4 — оператор типа компонент 8-импульса $\vec{P}$, коммутирующий со всеми генераторами алгебры $\mathcal{P}(1,3)$. Соотношение между энергией P_0, 8-импульсом $\vec{P}$ и переменной массой M физической системы оставляется прежним (здесь всюду $\hbar = c = 1$):

$$P_0^2 = \vec{P}^{\,2} + M^2 \equiv P_k^2 + \varkappa^2, \qquad k = 1,2,3,4. \tag{1.2}$$

Определение (1.1) делает P-пространство (одной частицы) пятимерным: $P \equiv (P_0, \vec{P}, P_4)$. Если P- и x-пространства по-прежнему считать взаимно сопряженными, последнее тоже будет пятимерным: $x \equiv (x_0, \vec{x}, x_4)$. Естественно оставить за временем $t \equiv x_0$ и 8-координатой $\vec{x}$ прежнюю роль, а в качестве x_4 выбрать (в квантовой механике) динамическую переменную, канонически сопряженную к P_4. Далее, если не нарушать общепринятую связь между импульсным и конфигурационным пространствами, то предлагаемая концепция переменной массы требует рассмотрения группы преобразований оставляющих инвариантной пятимерную форму

$$x^2 \equiv x_0^2 - \vec{x}^2 - x_4^2 \equiv x_\mu^2, \qquad \mu = 0,1,2,3,4, \tag{1.3}$$

— неоднородной группы де Ситтера, алгебру которой обозначим как $\mathcal{P}(1,4)$, в отличие от алгебры $\mathcal{P}(1,3)$ группы Пуанкаре.

Совершенно очевидно, что принятое здесь определение оператора массы как независимой динамической переменной является более общим и нетривиальным (см. ниже) даже для случая отсутствия взаимодействия. Оно может оказаться плодотворным (или даже необходимым) при описании нестабильных частиц (систем) как не обладающих фиксированной массой.

[2]Как показано в [3], алгебраическая задача о подходящем вложении алгебры $\mathcal{P}(1,3)$ в более широкую может быть сформулирована в терминах уравнений для волновых функций, что облегчает надлежащий физический анализ объединяющей схемы.

Уместно напомнить, что идея использования пятимерного пространства в физике была высказана Ф. Клейном задолго до основания квантовой теории и рассматривалась в самых различных вариантах (обзор основных работ этого направления см., например, в монографии Румера [4]). Она интенсивно обсуждалась в общей теории относительности в связи с объединением теории тяготения и электричества, а в дальнейшем — построением волновой механики в пятимерном пространстве [4]. Одно из основных отличий нашего рассмотрения этой идеи состоит (помимо интерпретации пятой координаты) в выборе группы преобразований координат пятимерного пространства.

В § 2 данной работы найдены инварианты алгебры $\mathcal{P}(1,4)$, проведена классификация неприводимых представлений алгебры $\mathcal{P}(1,4)$, в классе I, когда $P^2 \equiv P_\mu^2 > 0$, найдена конкретная реализация представления для генераторов этой алгебры, выписаны волновые уравнения в форме Шредингера–Фолди, инвариантные относительно выбранной группы. В § 3 дана физическая интерпретация волновых уравнений, согласно которой уравнения в классе I описывают частицы с произвольным спином и изоспином, причем изоспин входит в эти уравнения динамически, как и спин. В § 4 проведена классификация неприводимых представлений алгебры $\mathcal{P}(1,4)$ в других классах и выписаны соответствующие $\mathcal{P}(1,4)$-инвариантные уравнения[3]. В § 5 и 6 детально рассмотрены примеры $\mathcal{P}(1,4)$-инвариантных уравнений первой степени по ∂_μ в пятимерном пространстве Минковского — уравнения типа Дирака и Кеммера–Дэффина. Любопытно отметить, что уравнение типа Кеммера–Дэффина в схеме $\mathcal{P}(1,4)$ описывает не бозоны, а фермионы типа нуклон-антинуклон.

§ 2. Классификация представлений алгебры $\mathcal{P}(1,4)$. Волновые уравнения в классе I.

Эрмитовы генераторы P_μ и $J_{\mu\nu}$ алгебры $\mathcal{P}(1,4)$ неоднородной группы де Ситтера удовлетворяют соотношениям

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \qquad -i\,[P_\mu, J_{\nu\sigma}] = g_{\mu\nu}P_\sigma - g_{\mu\sigma}P_\nu, \tag{2.1а}$$

$$-i\,[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}, \tag{2.1б}$$

где

$$g_{00} = 1, \qquad g_{kl} = -\delta_{lk}; \qquad \mu,\nu,\sigma,\rho = 0,1,2,3,4; \qquad k,l = 1,2,3,4, \tag{2.2}$$

а, $J_{\mu\nu}$ — генераторы однородной группы де Ситтера $O(1,4)$. Совокупность генераторов $J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu}$ полезно для дальнейшего записать в виде матрицы:

$$(J_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & J_{01} & J_{02} & J_{03} & J_{04} \\ & 0 & J_{12} & J_{13} & J_{14} \\ & & 0 & J_{23} & J_{24} \\ & & & 0 & J_{34} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Здесь, как в других подобных записях, соответствующие матричные элементы ниже главной диагонали не выписаны. Кроме того, для упрощения записи, нули

[3]Краткое содержание некоторых результатов, приведенных в § 2–4, изложено в [5].

главной диагонали в подобных матрицах будем в дальнейшем опускать. Заметим, кстати, что в отличие от случая $O(1,3)$, совокупность генераторов $J_{\mu\nu}$ алгебры $O(1,4)$ нельзя исчерпать группированием их в 3-мерные или 4-мерные векторы. Поэтому ниже чаще всего приходится иметь дело с тензорными конструкциями.

Для написания всех волновых уравнений, инвариантных относительно неоднородной группы де Ситтера $\mathcal{P}(1,4)$ ("$\mathcal{P}(1,4)$-инвариантных уравнений") и реализующих представления алгебры $\mathcal{P}(1,4)$, необходимо найти инварианты этой алгебры, провести классификацию представлений по значениям инвариантов и найти явный вид ее генераторов в различных представлениях. Ясно, что одним из таких инвариантов является квадрат 5-импульса:

$$P^2 \equiv P_0^2 - \vec{P}^{\,2} - P_4^2 \equiv P_\mu^2, \qquad \mu = 0,1,2,3,4. \tag{2.4}$$

Для отыскания других инвариантов рассмотрим антисимметричный тензор третьего ранга

$$U_{\mu\nu\alpha} \equiv P_\mu J_{\nu\alpha} + P_\alpha J_{\alpha\mu} + P_\alpha J_{\mu\nu}. \tag{2.5}$$

Он имеет 10 независимых компонент, поэтому эквивалентен соответствующему антисимметричному тензору второго ранга $w_{\mu\nu}$, который определим как

$$w_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta\gamma}P_\alpha J_{\beta\gamma} = \frac{1}{6}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta\gamma}U_{\alpha\beta\gamma}, \tag{2.6}$$

где $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta\gamma}$ — единичный полностью антисимметричный тензор пятого ранга с $\varepsilon_{01234} = 1$. Соответствие между компонентами тензоров (2.5) и (2.6) удобно записать в матричной форме

$$(w_{\mu\nu}) \equiv \begin{pmatrix} w_{01} & w_{02} & w_{03} & w_{04} \\ & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ & & w_{23} & w_{24} \\ & & & w_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_{234} & -U_{314} & -U_{124} & -U_{321} \\ & U_{034} & U_{042} & U_{023} \\ & & U_{014} & U_{031} \\ & & & U_{012} \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Заметим, что в $\mathcal{P}(1,3)$ аналогом тензора $w_{\mu\nu}$ является 4-вектор w_μ (см. (2.56) в [6]).

Используя (1.1), можно показать, что имеют место следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{gathered}[P_\mu, w_{\rho\sigma}] = 0, \\ -i\,[J_{\mu\nu}, w_{\rho\sigma}] = g_{\mu\sigma}w_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}w_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}w_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}w_{\mu\rho}, \\ -i\,[w_{\mu\nu}, w_{\rho\sigma}] = (g_{\mu\sigma}\varepsilon_{\nu\rho\alpha\beta\gamma} + g_{\nu\rho}\varepsilon_{\mu\sigma\alpha\beta\gamma} - g_{\mu\rho}\varepsilon_{\nu\sigma\alpha\beta\gamma} - g_{\nu\sigma}\varepsilon_{\mu\rho\alpha\beta\gamma})\,P_\alpha J_{\beta\gamma};\end{gathered} \tag{2.8а}$$

$$\begin{gathered}[P_\mu, U_{\nu\rho\alpha}] = 0, \\ -i\,[J_{\mu\nu}, U_{\rho\sigma\alpha}] = g_{\mu\sigma}U_{\nu\rho\alpha} + g_{\nu\rho}U_{\mu\sigma\alpha} - g_{\mu\rho}U_{\nu\sigma\alpha} - g_{\nu\sigma}U_{\mu\rho\alpha}, \\ -i\,[U_{\mu\nu\alpha}, U_{\rho\sigma\gamma}] = g_{\mu\rho}\,(U_{\nu\alpha\sigma}P_\gamma - U_{\nu\alpha\gamma}P_\sigma) - \mu\sigma(\nu\alpha\rho\cdot\gamma - \nu\alpha\gamma\cdot\rho) + \\ +\mu\gamma(\nu\alpha\rho\cdot\sigma - \nu\alpha\sigma\cdot\rho) - \nu\rho(\mu\alpha\sigma\cdot\gamma - \mu\alpha\gamma\cdot\sigma) + \nu\sigma(\mu\alpha\rho\cdot\gamma - \mu\alpha\gamma\cdot\rho) - \\ -\nu\gamma(\mu\alpha\rho\cdot\sigma - \mu\alpha\sigma\cdot\rho) + \alpha\rho(\mu\nu\sigma\cdot\gamma - \mu\nu\gamma\cdot\sigma) - \alpha\sigma(\mu\nu\rho\cdot\gamma - \mu\nu\gamma\cdot\rho) + \\ +\alpha\gamma(\mu\nu\rho\cdot\sigma - \mu\nu\sigma\cdot\rho),\end{gathered} \tag{2.8б}$$

где последние слагаемые записаны схематически, например

$$\mu\gamma(\nu\alpha\rho\cdot\sigma - \nu\alpha\sigma\cdot\rho) \equiv g_{\mu\gamma}(U_{\nu\alpha\rho}P_\sigma - U_{\nu\alpha\sigma}P_\rho).$$

С помощью (2.1) и (2.8) можно проверить, что только скалярные операторы

$$V \equiv -\frac{1}{4} J_{\mu\nu} w_{\mu\nu} = -\frac{1}{8} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma\alpha} J_{\mu\nu} J_{\rho\sigma} P_{\alpha}, \tag{2.9}$$

$$W \equiv \frac{1}{6} U_{\mu\nu\alpha}^2 = \frac{1}{2} w_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{2} P_{\mu}^2 J_{\nu\alpha}^2 - P_{\mu} P_{\nu} J_{\mu\sigma} J_{\nu\sigma} \tag{2.10}$$

коммутируют со всеми генераторами алгебры $\mathcal{P}(1,4)$, т.е. являются ее инвариантами. Можно также убедиться, что инвариантом является оператор знака энергии

$$\varepsilon = P_0/|P_0|. \tag{2.11}$$

Итак, алгебра $\mathcal{P}(1,4)$ имеет четыре инварианта P^2, V, W, ε, общих для всех ее представлений. Как видно из (2.4), (2.10), (2.11), инварианты P^2, W и ε подобны по конструкции соответствующим инвариантам алгебры $\mathcal{P}(1,3)$, тогда как инварианта типа V алгебра $\mathcal{P}(1,3)$ не имеет.

Как и в случае $\mathcal{P}(1,3)$ [7, 8], целесообразно рассмотреть четыре класса неприводимых представлений алгебры $\mathcal{P}(1,4)$, соответствующие следующим значениям инварианта P^2:

$$\begin{array}{llll} P^2 = \varkappa^2 > 0 & \text{— класс I;} & P^2 = 0,\ P \neq 0 & \text{— класс II;} \\ P^2 = -\eta^2 < 0 & \text{— класс III;} & P = 0 & \text{— класс IV;} \end{array}$$

где $\varkappa$ и η — действительные числа.

Остановимся в этом параграфе и анализе представления класса I. Удобно работать в допустимой в этом классе "системе покоя" $P_k = 0$. В этой системе $P_0 = \varepsilon\varkappa$ и, как можно убедиться, тензор (2.6) редуцируется к 6-компонентному тензору: компоненты $w_{0k} = 0$, а остальные компоненты w_{kl} совпадают (с точностью до $\varepsilon\varkappa$) с компонентами

$$S_{kl} \equiv J_{kl}\Big|_{P_k=0}$$

в указаном ниже порядке, так что его можно записать в форме 4×4-матрицы:

$$(w_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ & w_{23} & w_{24} \\ & & w_{34} \end{pmatrix} = -\varepsilon\varkappa \begin{pmatrix} S_{43} & S_{24} & S_{32} \\ & S_{41} & S_{13} \\ & & S_{21} \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Инварианты V и W в этой системе имеют вид:

$$V = -\frac{1}{4} S_{kl} w_{kl} = \varepsilon\varkappa \vec{L}\vec{R}, \tag{2.13}$$

$$W = \frac{1}{2} w_{kl}^2 = \varkappa^2 \left(\vec{L}^{\,2} + \vec{R}^{\,2}\right), \tag{2.14}$$

где 3-векторы

$$\vec{L} \equiv (S_{23}, S_{31}, S_{12}), \qquad \vec{R} \equiv (S_{41}, S_{42}, S_{43}). \tag{2.15}$$

Напомним, кстати, что в $\mathcal{P}(1,3)$ 4-вектор w_μ в системе $\vec{P} = 0$ совпадает с 3-вектором спина, компонентами которого суть операторы J_{ab}, $a, b = 1, 2, 3$, в системе $\vec{P} = 0$, т.е. моменты S_{ab} собственных вращений (точнее говоря, моменты “внутренних” движений). Ясно поэтому, что операторы $J_{kl} = S_{kl}$ в системе $P_k = 0$ тоже следует понимать как моменты некоторых “внутренних” движений.

Операторы $J_{kl} = S_{kl}$ являются генераторами алгебры O_4 группы евклидовых вращений в 4-пространстве. Эта группа и является малой группой группы $\mathcal{P}(1,4)$ в классе I. Поэтому задача о классификации неприводимых представлений алгебры $\mathcal{P}(1,4)$ в этом классе по существу сводится к хорошо изученной (см., например, [6]) задаче о классификации неприводимых представлений алгебры O_4 Напомним, что все неприводимые представления $D(s,t)$ группы $O(4)$ унитарны, конечномерны и идентифицируется двумя числами s и t, возможные значения которых суть $s,t = 0, 1/2, 1, \ldots$. Эти числа определяют собственные значения инвариантов $\vec{S}^{\,2}$ и $\vec{T}^{\,2}$ алгебры O_4:

$$\vec{S}^{\,2} = s(s+1)\hat{1}, \qquad \vec{T}^{\,2} = t(t+1)\hat{1}, \tag{2.16}$$

где $\hat{1}$ — $(2s+1)(2t+1)$-мерная единичная матрица, а компоненты 3-векторов $\vec{S}$ и $\vec{T}$ суть

$$S_a = \frac{1}{2}(S_{bc} + S_{4a}), \qquad T_a = \frac{1}{2}(S_{bc} - S_{4a}), \tag{2.17}$$

где (a,b,c) = цикл (1,2,3). Векторы, реализующие матричные представления $D(s,t)$ алгебры O_4, $(2s+1)(2t+1)$-мерны, их компоненты нумеруется собственными значениями s_3 и t_3 операторов S_3 и T_3 $(-s \le s_3 \le s,\ -t \le t_3 \le t)$.

Обратим внимание, что в качестве независимых инвариантов алгебры $\mathcal{P}(1,4)$ в классе I можно выбрать операторы P^2, ε, $\vec{S}^{\,2}$ и $\vec{T}^{\,2}$, поскольку, как видно из (2.17), (2.13), (2.14),

$$\vec{S}^{\,2} = \frac{W}{4\varkappa^2} + \frac{\varepsilon}{2\varkappa}V, \qquad \vec{T}^{\,2} = \frac{W}{4\varkappa^2} - \frac{\varepsilon}{2\varkappa}V. \tag{2.18}$$

Поэтому свойства неприводимых представление группы $\mathcal{P}(1,4)$ в классе I, связанные с инвариантами $\vec{S}^{\,2}$ и $\vec{T}^{\,2}$, совпадают со свойствами неприводимых представлений группы O_4.

Таким образом, все неприводимые представления $D^{\pm}(s,t)$ группы $\mathcal{P}(1,4)$ в классе I унитарны, конечномерны и идентифицируются числами s и t, а также значением $\varkappa^2$ инварианта P^2 и знаком энергии $\varepsilon = \pm 1$. Компоненты векторов Ψ, реализующих представление $D^{\pm}(s,t)$, нумеруются числами s_3, t_3.

Для написания $\mathcal{P}(1,4)$-инвариантного волнового уравнения в классе I необходимо найти конкретную реализацию представления $D^{\pm}(s,t)$, т.е. найти явный вид операторов P_μ и $J_{\mu\nu}$, определенных в том или ином гильбертовом пространстве векторов Ψ, реализующих представление $D^{\pm}(s,t)$. Заметим, что задача о написании даже $\mathcal{P}(1,3)$-инвариантного уравнения для произвольного спина эффективно и изящно решается, только если найден явный вид генераторов $\mathcal{P}(1,3)$ в канонической форме Фолди–Широкова [9, 8]. Естественно поэтому и в нашем случае найти прежде всего канонический вид типа Фолди–Широкова для генераторов P_μ и $J_{\mu\nu}$.

Используя методику работ [8, 9], можно показать, что канонический вид генераторов $\mathcal{P}(1,4)$ для представлений $D^{\pm}(s,t)$ выглядит как

$$\begin{aligned} &P_0 = \varepsilon\omega \equiv \varepsilon\sqrt{p_k^2 + \varkappa^2}, \qquad P_k = p_k, \\ &J_{kl} = x_k p_l - x_l p_k + S_{kl}, \\ &J_{0k} = x_0 p_k - \frac{\varepsilon}{2}(x_k\omega + \omega x_k) - \frac{\varepsilon S_{kl} p_l}{\omega + \varkappa}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

где $x_k p_l - x_l p_k \equiv M_{kl}$ — инфинитезимальные операторы вращений в плоскостях (k,l), операторы x_k и p_k удовлетворяют соотношениям

$$[x_k, p_l] = i\delta_{kl}, \qquad [x_k, x_l] = [p_k, p_l] = 0, \qquad k,l = 1,2,3,4 \tag{2.20}$$

(так что, например, в x-представлении $p_k = -\partial_k \equiv -i\partial/\partial x_k$), а S_{kl} — моменты "внутренних" движений, реализующие матричное неприводимое представление $D(s,t)$ размерности $(2s+1)(2t+1)$ алгебры O_4, о котором говорилось выше. При этом имеется в виду, что операторы (2.10) определены в гильбертовом пространстве вектор-функций $\Psi = \Psi(\vec{x}, x_4)$ (в x-представлении или $\Psi = \Psi(\vec{p}, p_4)$ p-представлении и т.п.) со скалярным произведением

$$\begin{aligned} (\Psi, \Psi') &\equiv \int d^3x\, dx_4 \Psi^*(\vec{x}, x_4)\Psi'(\vec{x}, x_4) \equiv \\ &\equiv \int d^3x\, dx_4 \sum_{s_3, t_3} \Psi^*(\vec{x}, x_4, s_3, t_3)\Psi'(\vec{x}, x_4, s_3, t_3), \end{aligned} \tag{2.21}$$

где $\Psi(\vec{x}, x_4, s_3, t_3)$ — компоненты вектора $\Psi(\vec{x}, x_4)$. Разумеется, все другие виды генераторов $\mathcal{P}(1,4)$ представления $D^{\pm}(s,t)$ унитарно эквивалентны (2.19).

Теперь уже легко доказать, что $\mathcal{P}(1,4)$-инвариантное (в смысле Фолди [9]) квантово-механическое уравнение для векторов Ψ как функции времени $t \equiv x_0$, реализующих представление $D^{\pm}(s,t)$, имеет вид:

$$i\partial_0\Psi = H\Psi, \qquad H = P_0 = \varepsilon\sqrt{\vec{p}^{\,2} + p_4^2 + \varkappa^2}, \tag{2.22}$$

где Ψ — $(2s{+}1)(2t{+}1)$-компонентный вектор, компоненты которого нумеруются числами s_3, t_3, так что, например, в x-представлении вектор $\Psi = \Psi(x) \equiv \Psi(x_0, \vec{x}, x_4)$, а его компонентами суть $\Psi(x_0, \vec{x}, x_4, s_3, t_3)$.

Обратим внимание, что время $t = x_0$ и динамические переменные $\vec{x}$ и x_4 входят в уравнение (2.22) несимметрично. Поэтому могло бы показаться, что уравнение (2.22) не инвариантно относительно неоднородной группы де Ситтера $\mathcal{P}(1,4)$. На самом же деле это уравнение инвариантно относительно $\mathcal{P}(1,4)$ в более общем, чем это обычно принято, смысле, а именно: под инвариантностью в смысле Фолди понимается выполнение условия

$$[(i\partial_0 - H), Q]\,\Psi = 0, \tag{2.23}$$

где Ψ — любое решение уравнения (2.22), а Q — любой генератор из $\mathcal{P}(1,4)$, или любая их линейная комбинация, т.е. любой элемент алгебры $\mathcal{P}(1,4)$. Можно проверить, что генераторы P_μ, $J_{\mu\nu}$ в форме (2.19) действительно удовлетворяют условию (2.23), так что уравнение (2.22) действительно $\mathcal{P}(1,4)$-инвариантно. Его решения Ψ реализуют именно неприводимое (единственное с точностью до унитарной эквивалентности) представление $D^{\pm}(s,t)$, поскольку Ψ суть $(2s+1)(2t+1)$-компонентные векторы и согласно (2.22) для них $P^2\Psi = \varkappa^2\Psi$ и $\varepsilon\Psi = \pm\Psi$.

Заметим, кстати, что если к операторам P_μ и $J_{\mu\nu}$ алгебры $\mathcal{P}(1,4)$ добавить операторы типа отражений (что необходимо при рассмотрении теоремы типа CPT в нашей схеме, которое здесь не приводится), то уравнение (2.22), вообще говоря, не будет реализовать представления такой расширенной алгебры $\widetilde{\mathcal{P}}(1,4)$. Неприводимые представления алгебры $\widetilde{\mathcal{P}}(1,4)$ строятся как прямые суммы неприводимых представлений $D^{\pm}(s,t)$ алгебры $\mathcal{P}(1,4)$. Соответствующие уравнения, реализующие представления алгебры $\widetilde{\mathcal{P}}(1,4)$ нетрудно выписать, имея явный вид (2,19) генераторов $\mathcal{P}(1,4)$ в неприводимых представлениях $D^{\pm}(s,t)$.

Приведем здесь два примера таких уравнений, представляющих физический интерес (см. § 5 и 6). Уравнение, реализующее представления $D^+(s,t)\oplus D^-(s,t)$, имеет вид:

$$i\partial_0\Psi = H\Psi \equiv \beta\sqrt{\vec{p}^{\,2}+p_4^2+\varkappa^2}\Psi, \qquad \beta \equiv \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}, \tag{2.24}$$

а явный вид генераторов $\mathcal{P}(1,4)$ в этом представлении совпадает с (2.19), где заменено

$$\varepsilon \to \beta, \qquad S_{kl} \to \begin{pmatrix} S_{kl} & 0 \\ 0 & S_{kl} \end{pmatrix}.$$

Уравнение, реализующее представление

$$D^+(s,t)\oplus D^+(t,s)\oplus D^-(s,t)\oplus D^-(t,s),$$

имеет вид:

$$i\partial_0\Psi = H\Psi \equiv B\sqrt{\vec{p}^{2}+p_4^2+\varkappa^2}\Psi, \qquad B \equiv \begin{pmatrix} \hat{1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \hat{1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\hat{1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\hat{1} \end{pmatrix}, \tag{2.25}$$

где точки в матрице обозначают нули. В этом представлении явный вид генераторов $\mathcal{P}(1,4)$ совпадает с (2.19), где заменено $\varepsilon \to B$, а

$$S_{ab} \to \begin{pmatrix} S_{ab} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & S_{ab} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & S_{ab} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & S_{ab} \end{pmatrix}, \qquad S_{4a} \to \begin{pmatrix} S_{4a} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & S_{4a} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & S_{4a} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & S_{4a} \end{pmatrix}.$$

Детальное обсуждение расширенной алгебры $\widetilde{\mathcal{P}}(1,4)$ будет предметом специального рассмотрения.

§ 3 Физическая интерпретация.

В предыдущем параграфе были получены волновые уравнения класса I, инвариантные относительно вращении и трансляций в 5-мерном пространстве Минковского. Приведем здесь возможную физическую интерпретацию изложенной выше математической схемы, позволяющую рассматривать эти уравнения как уравнения Шредингера для волновых функций.

В p-представлении компоненты волновой функция Ψ уравнения (2.22) являются функциями шести динамических переменных соответствующего полного набора: $\Psi(x_0, \vec{p}, p_4, s_3, t_3)$. Как обычно, они интерпретируются как амплитуды вероятностей получения, при измерении в данный момент времени $t = x_0$, указанных значений полного набора. Физический смысл операторов $\vec{P}$ и P_4 приведен во введении. Выясним теперь возможный физический смысл операторов S_3, T_3.

Операторы (2.17) удовлетворяют соотношениям

$$[S_a, S_b] = iS_c, \qquad [T_a, T_b] = iT_c, \qquad \left[S_a, \vec{S}^{\,2}\right] = \left[T_a, \vec{T}^{\,2}\right] = [S_a, T_b] = 0. \quad (3.1)$$

Отсюда и из (2.19) ясно, что 3-векторы $\vec{S}$ и $\vec{T}$ можно трактовать как операторы спина и изоспина, причем, поскольку $\vec{S}$ и $\vec{T}$ входят в нашей схеме на равных правах, их можно трактовать и как операторы изоспина и спина соответственно. Таким образом, принятое нами определение (1.1) оператора массы как независимой динамической переменной дало возможность динамически объединить “внешнюю” ($\mathcal{P}(1,3)$) и “внутреннюю” (изоспиновую $SU(2)_T$) симметрии. Действительно, в обычном подходе в качестве объединяющей группы берется группа $\mathcal{P}(1,3) \otimes SU(2)_T$, так что генераторы $SU(2)_T$ коммутируют с генераторами $\mathcal{P}(1,3)$ (даже при наличии взаимодействия). В нашем случае $SU(2)_T \subset O_4 \subset \mathcal{P}(1,4)$, точно так же, как и $SU(2)_S \subset O_4 \subset \mathcal{P}(1,4)$, т.е. здесь генераторы $SU(2)_T$, как и $SU(2)_S$, не коммутируют с генераторами $\mathcal{P}(1,3) \subset \mathcal{P}(1,4)$. Таким образом, изоспин, как и спин, действительно входит в $\mathcal{P}(1,4)$-инвариантную теорию динамически.

Как было показано выше, уравнение (2.22) реализует неприводимое представление $D^{\pm}(s,t)$ алгебры $\mathcal{P}(1,4)$, т.е. описывает “элементарную” относительно $\mathcal{P}(1,4)$ “частицу” (при $\varepsilon = +1$ или “античастицу” при $\varepsilon = -1$) с данными значениями спина s, изоспина t и параметра $\varkappa$. Простейшие состояния этой “частицы” задаются собственными значениями полного набора коммутирующих переменных. Ясно, что неприводимое относительно $\mathcal{P}(1,4)$ представление $D^{\pm}(s,t)$ приводимо относительно $\mathcal{P}(1,3)$, поэтому определенная здесь “элементарная частица” неэлементарна в обычном понимании (т.е. относительно $\mathcal{P}(1,3)$). Действительно, решение Ψ уравнения (2.22) с данными s и t содержит компоненты, нумеруемые не только проекцией спина s_3, но и проекцией изоспина t_3, так что фактически Ψ описывает целый мультиплет — набор состояний с различными значениями как t_3, так и s_3. Например, при $\varepsilon = \pm 1$, $s = 0$, $t = 1/2$ векторы $\Psi^{\pm}$ описывают мезонные изодублеты типа

$$\Psi^{+} \equiv \begin{pmatrix} \Psi^{+}_{0,1/2} \\ \Psi^{+}_{0,-1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^{+} \\ K^{0} \end{pmatrix}, \qquad \Psi^{-} = \begin{pmatrix} \widetilde{K}^{0} \\ K^{-} \end{pmatrix}.$$

Параметр $\varkappa$, являющийся пороговым значением свободной энергии $E = \omega$ и одинаковый для всех членов данного мультиплета, можно понимать как “затравочную” массу покоя мультиплета. Конечно, введение подходящего взаимодействия в уравнение (2.22) приведет к определенному расщеплению масс членов мультиплета.

Напомним, что изоспин принято обычно связывать с зарядом. Поскольку он входит в схему $\mathcal{P}(1,4)$ динамически (как и спин), эту схему в данной интерпретации можно, по-видимому, рассматривать как некоторую реализацию идеи объединения общей теории относительности с теорией электромеханизма, феноменологическую в том смысле, что 5-пространство в нашем случае является плоским.

Предлагаемый подход может оказаться плодотворным для последовательного описания нестабильных систем (резонансов, частиц с нефиксированной массой) уже в рамках квантовой механики[4]. Известно, что при квантовомеханическом описании нестабильных систем приходится (см. например, [10] гл. 5) искать комплексные собственные значения оператора энергии, обязанного быть эрмитовым в гильбертовом пространстве волновых функций, т.е. фактически выходить за рамки гильбертова пространства, что влечет за собой нарушение таких основных принципов, как унитарность, эрмитовость и т.п. [11].

Подобные трудности отсутствуют в предлагаемом квантовомеханическом подходе. Действительно, здесь оператор массы фигурирует как независимая динамическая переменная, он эрмитов, определен в гильбертовом пространстве, поэтому можно искать его собственные значения m^2, распределения $\rho(m^2)$ в том же гильбертовом пространстве точно так же, как ищутся собственные значения и распределения для операторов энергии, импульса и других динамических переменных. Например, если известна стационарная волновая функция $\Psi = \{\Psi(\vec{x}, x_4, s_3, t_3)\}$, вообще говоря, нестабильного мультиплета (имеется в виду: решение уравнения типа (2.22) о не зависящим от времени x_0 взаимодействием), то

$$\rho(m^2, s_3, t_3) = \int d^3x \left| \int dx_4 e^{-i\sqrt{m^2-\varkappa^2}x_4} \Psi(\vec{x}, x_4, s_3, t_3) \right|^2. \tag{3.2}$$

Если кривая (3.2) с данными s_3, t_3 имеет один максимум, то экспериментально наблюдаемая масса частицы с данными s_3, t_3 определяется либо точкой максимума, либо из

$$\vec{m}^{\,2} = \int d^3x\, dx_4\ \Psi^*(\vec{x}, x_4, s_3, t_3)(p_4^2 + \varkappa^2)\Psi(\vec{x}, x_4, s_3, t_3), \tag{3.3}$$

а ее среднее время жизни τ — из соотношения

$$\overline{m^2}\ \overline{\tau^2} = 1. \tag{3.4}$$

Если же кривая (3.2) имеет несколько максимумов, то точки этих максимумов соответствуют экспериментально наблюдаемым массам нестабильных частиц, а их времена жизни определяются по полуширине кривой (3.2) в области соответствующих максимумов. Наконец, если $\rho(m^2, s_3, t_3)$ содержит δ-образную особенность в точке $m^2 = m_0^2$, то m_0 отождествляется с массой стабильной частицы.

Важно отметить, что согласно принятой интерпретации реально наблюдаемые "свободные" частицы, как стабильные, так и нестабильные, описываются не свободным уравнением (2.22), а уравнением типа (2.22) с подходящим взаимодействием, нарушающим $\mathcal{P}(1,4)$-инвариантность, но, конечно, сохраняющим $\mathcal{P}(1,3)$-инвариантность[5]. Что касается решений свободного уравнения (2.22), то они описывают гипотетические ("голые") состояния, которые могут и не соответствовать

[4]Очевидно, строгое рассмотрение подобных задач требует квантовополевого подхода, а квантовомеханический подход можно рассматривать лишь как полуфеноменологический.

[5]В этом смысле приведенное здесь рассмотрение $\mathcal{P}(1,4)$-симметрии является лишь базой для подходящего нарушения ее — аналогично рассмотрению и нарушении $SU(n)$-симметрий.

никаким реальным частицам. С точки зрения такой интерпретации существуют два типа взаимодействий: взаимодействие, обуславливающее “облачение” частиц, присущее даже асимптотическим состояниям, и обычное взаимодействие, ответственное за рассеяния реальных (“облаченных”) частиц. Поэтому, в частности, 5-мерный закон сохранения, вытекающий из свободной $\mathcal{P}(1,4)$-инвариантной схемы, может и не иметь реального смысла.

Подчеркнем, что приведенная здесь интерпретация схемы $\mathcal{P}(1,4)$ и, в частности, упомянутого выше полного набора коммутирующих переменных базировалась, главный образом, на определении оператора переменной массы как независимой динамической переменной. Эта интерпретация, однако, не претендует на единственность и законченность. В частности, вопрос о придании “пятой координате” x_4 более непосредственного физического смысла, чем тот, который заложен в ее определении как динамической переменной, канонически сопряженной к массовой переменной P_4, а также операторам типа J_{04}, J_{a4}, $a = 1,2,3$ здесь не обсуждается. Более подробное обсуждение вопросов интерпретации возможно только в связи с решением уравнений типа (2.22) с подходящими взаимодействиями, что не является предметом данной работы.

§ 4. Волновые уравнения в других классах.

Рассмотрим теперь кратко другие классы представлений алгебры $\mathcal{P}(1,4)$. Для класса II (где $P^2 = 0$, $P \neq 0$) в допустимой здесь системе $p_1 = p_2 = p_4 = 0$ тензор (2.6) выглядит как

$$(w_{\mu\nu}) = -P_3 \left(\begin{array}{c|c|c|c} \overset{(01)}{J_{42}} & \overset{(02)}{J_{14}} & \overset{(03)}{0} & \overset{(04)}{J_{21}} \\ \hline & \overset{(12)}{J_{04}+\varepsilon J_{43}} & \overset{(13)}{\varepsilon J_{24}} & \overset{(14)}{J_{20}+\varepsilon J_{32}} \\ \cline{2-4} & & \overset{(23)}{\varepsilon J_{41}} & \overset{(24)}{J_{04}+\varepsilon J_{13}} \\ \cline{3-4} & & & \overset{(34)}{\varepsilon J_{21}} \end{array} \right), \tag{4.1а}$$

где $\varepsilon = P_0/P_3$, а цифры в скобках указывают, чему равны соответствующие компоненты тензора $w_{\mu\nu}$. Например, символ $\overset{(01)}{J}_{42}$ означает, что $w_{01} = -P_3 J_{42}$. Как видно из (4.1а) тензор $w_{\mu\nu}$ имеет только шесть ненулевых компонентов, которые полезно записать в виде:

$$(w_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} w_{40} & w_{01} & w_{14} \\ & w_{02} & w_{24} \\ & & w_{12} \end{pmatrix} = -P_3 \begin{pmatrix} J'_{12} & J'_{13} & P'_1 \\ & J'_{23} & P'_2 \\ & & P'_3 \end{pmatrix}, \tag{4.1б}$$

где

$$\vec{L}' \equiv (J'_{23}, J'_{31}, J'_{12}) \equiv (J_{14}, J_{24}, J_{12}), \tag{4.2а}$$

$$P'_1 \equiv J_{20} + \varepsilon J_{32}, \qquad P'_2 \equiv J_{01} + \varepsilon J_{13}, \qquad P'_3 \equiv J_{04} + \varepsilon J_{43}. \tag{4.2б}$$

Инварианты V и W в этой системе имеют вид:

$$V = -J_{14}w_{14} - J_{24}w_{24} - J_{12}w_{12} = P_3 V', \tag{4.3}$$

$$W = w_{14}^2 + w_{24}^2 + w_{12}^2 = P_3 W', \tag{4.4}$$

где

$$V' \equiv \vec{L}'\vec{P}', \qquad W'\vec{P}'^2. \tag{4.5}$$

Используя (2.1), можно показать, что операторы (4.2) удовлетворяют соотношениям

$$[P'_a, P'_b] = 0, \qquad i\,[P'_a, J'_{bc}] = \delta_{ab}P'_c - \delta_{ac}P'_b, \tag{4.6а}$$

$$i\,[J'_{ab}, J'_{cd}] = \delta_{ad}J'_{bc} + \delta_{bc}J'_{ad} - \delta_{ac}J'_{bd} - \delta_{bd}J'_{ac}. \tag{4.6б}$$

Отсюда видно, что операторы P'_a и J'_{ab} являются генераторами алгебры $\mathcal{P}(3)$, порожденной группой трансляций и вращении в трехмерном евклидовом пространстве. Инвариантами этой алгебры, как можно убедиться, являются генераторы (4.5). Согласно (4.3), (4.4), инварианты V и W алгебры $\mathcal{P}(1,4)$ в этом случае совпадают (с точностью до множителя P_3) с инвариантами алгебры $\mathcal{P}(3)$. Поэтому классификация неприводимых представлений алгебры $\mathcal{P}(1,4)$ в классе II по существу сводится к классификации неприводимых представлений алгебры $\mathcal{P}(3)$. Не будем здесь останавливаться более подробно на этом случае, поскольку, как видно из (4.6) и (4.4), инварианты W' и W имеют непрерывный спектр, которому, очевидно, трудно придать приемлемый физический смысл. Рассмотрим ниже только случай $W = 0$.

В случае $W = 0$ (при произвольных P_3 и J'_{ab}), согласно (4.4) и (4.5), $P'_a = 0$, поэтому и инвариант $V = 0$. Как видно из (4.1б), тензор $w'_{\mu\nu} \equiv w_{\mu\nu}/P_3$ имеет теперь только три отличные от нуля компоненты, совпадающие с операторами J'_{ab}. Поэтому алгебра $\mathcal{P}(1,4)$ имеет в этом случае дополнительный инвариант

$$W'' = \frac{1}{2}{J'_{ab}}^2. \tag{4.7}$$

Согласно (4.6б) этот инвариант является инвариантом алгебры O_3:

$$W'' = s(s+1)\hat{1},$$

где $\hat{1}$ — $(2s+1)$-мерная единичная матрица, а возможные значения s суть $s = 0, 1/2, 1, \ldots$. Следовательно, классификация неприводимых представлений алгебры $\mathcal{P}(1,4)$ по существу сводится здесь к классификации неприводимых представлений $D(s)$ алгебры O_3.

Таким образом, в случае $P^2 = 0$, $W = V = 0$, $P \neq 0$ все неприводимые представления $D^{\pm}(s)$ группы $\mathcal{P}(1,4)$ унитарны, конечномерны (именно: $(2s+1)$-мерны) и идентифицируются знаком энергии $\varepsilon = \pm 1$ и числом s.

Явный вид генераторов алгебры $\mathcal{P}(1,4)$ для этого случая, как можно убедиться, формально совпадает с (2.19) при $\varkappa = 0$, но при этом S_{kl} реализуют представление $D(s,0)$ при $\varepsilon = +1$ и $D(0, s = t)$ при $\varepsilon = -1$; либо $D(0, s = t)$ при $\varepsilon = +1$ и $D(s,0)$ при $\varepsilon = -1$ алгебры O_4, т.е. $S_{4a} = \pm\varepsilon S_{bc}$, где S_{ab} — $(2s+1)$-мерные матрицы, реализующие соответствующие неприводимые представления алгебры O_3. Генераторы P_μ, $J_{\mu\nu}$ в этом случае реализуют представление $D^+(s,0) = D^+(s)$ и $D^-(0, t = s) = D^-(s)$ при $S_{4a} = +\varepsilon S_{bc}$ или $D^+(0, t = s) = D^+(s)$ и $D^-(s,0)$ при

$S_{4a} = -\varepsilon S_{bc}$. Отсюда ясно, что число s можно отождествить либо со спином, либо с изоспином.

Таким образом, неприводимому представлению класса II для $W = 0$ в отличие от класса I, можно сопоставить либо элементарную частицу (с переменной массой $m = \sqrt{p_4^2}$), имеющую спин s, но не имеющую изоспина, либо элементарную частицу, имеющую изоспин $t = s$, но не имеющую спина.

$\mathcal{P}(1,4)$-инвариантное уравнение для волновой функции такой частицы (или античастицы) имеет вид:

$$i\partial_0\Psi = H\Psi, \qquad H = \varepsilon\sqrt{p_k^2} \equiv \varepsilon\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}, \tag{4.8}$$

где $\Psi = \Psi(x) \equiv \Psi(x_0, \vec{x}, x_4)$ – $(2s+1)$-компонентная величина, компоненты которой $\Psi(x_0, \vec{x}, x_4, s_3)$ нумеруются индексом s_3, $-s \le s_3 \le s$.

Рассмотрим далее представления класса III, когда $P^2 = -\eta^2 < 0$. В допустимой здесь системе $P_0 = \vec{P} = 0$ (в которой $P_4 = \pm\eta$) тензор (2.6) имеет только шесть ненулевых компонент и выглядит как

$$(w_{\mu\nu}) = \mp\eta \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}(01)\\ J_{23}\end{matrix} & \begin{matrix}(02)\\ J_{31}\end{matrix} & \begin{matrix}(03)\\ J_{12}\end{matrix} \\ \hline & \begin{matrix}(12)\\ J_{30}\end{matrix} & \begin{matrix}(13)\\ J_{02}\end{matrix} \\ \cline{2-3} & & \begin{matrix}(23)\\ J_{10}\end{matrix} \end{array} \right), \tag{4.9}$$

Инварианты V и W имеют здесь вид:

$$V = -J_{01}w_{23} - J_{02}w_{31} - J_{03}w_{12} = \pm\eta\vec{L}\vec{N}, \tag{4.10}$$

$$W = -w_{01}^2 - w_{02}^2 - w_{03}^2 + w_{12}^2 + w_{13}^2 + w_{23}^2 = \eta^2(\vec{N}^{\,2} - \vec{L}^{\,2}), \tag{4.11}$$

где

$$\vec{L} \equiv (J_{23}, J_{31}, J_{12}), \qquad \vec{N} \equiv (J_{01}, J_{02}, J_{03}).$$

Как видно из (4.9) и (2.1б), ненулевые компоненты тензора $w'_{\mu\nu} \equiv \mp\eta^{-1}w_{\mu\nu}$ удовлетворяют алгебре $O(1,3)$ однородной группы Лоренца. Инвариантами этой алгебры, как известно, являются операторы

$$\vec{L}\vec{N} \qquad \text{и} \qquad \vec{N}^{\,2} - \vec{L}^{\,2}. \tag{4.12}$$

Согласно (4.10), (4.11) эти операторы совпадают (с точностью до постоянных множителей) с инвариантами алгебры $\mathcal{P}(1,4)$. Поэтому классификация неприводимых представлений алгебры $\mathcal{P}(1,4)$ сводится к классификации неприводимых представлений алгебры $O(1,3)$. Все представления этой алгебры полностью изучены Гельфандом и Наймарком [12].

Напомним, что в пространстве, где реализуются неприводимые представления алгебры $O(1,3)$, операторы (4.12) имеют спектр

$$\vec{L}\vec{N} = il_0l_1\hat{1}, \qquad \vec{N}^{\,2} - \vec{L}^{\,2} = -(l_0^2 + l_1^2 - 1)\hat{1}, \tag{4.13}$$

где $\hat{1}$ — единичный оператор, а $l_0 = 0, 1/2, 1, \ldots$, l_1 — любое число. Отсюда ясно, что в пространстве, где реализуются неприводимые представления алгебры $\mathcal{P}(1,4)$,

$$V = \pm i\eta l_0 l_1 \hat{1}, \qquad W = -\eta^2(l_0^2 + l_1^2 - 1)\hat{1}. \tag{4.14}$$

В этом классе группа $\mathcal{P}(1,4)$, как и группа $O(1,3)$, имеет унитарные и неунитарные представления, в зависимости от значений чисел l_0, l_1. Причем все унитарные неприводимые представления группы $\mathcal{P}(1,4)$ бесконечномерны и идентифицируются числами η, l_0 и l_1, где η — любое действительное число, $-1 \le l_1 \le 1$ при $l_0 = 0$ и l_1 — чисто мнимое при $l_0 = 1/2, 1, \ldots$. Представления, соответствующие всем другим значениям чисел l_0 и l_1, неунитарны; среди них имеются как конечномерные, так и бесконечномерные. В соответствии с этим $\mathcal{P}(1,4)$-инвариантные волновые уравнения с конечным числом компонент (конечнокомпонентные уравнения) реализуют только неунитарные представления алгебры $\mathcal{P}(1,4)$. Унитарные же представления в этом классе могут реализоваться лишь бесконечнокомпонентными уравнениями.

Отметим здесь то любопытное обстоятельство, что все представления однородной группы Лоренца $O(1,3)$ связаны не с представлениями общепринятой группы релятивистской симметрии — группы Пуанкаре $\mathcal{P}(1,3)$, а с представлениями именно неоднородной группы де Ситтера $\mathcal{P}(1,4)$ в 5-пространстве Минковского.

$\mathcal{P}(1,4)$-инвариантные волновые уравнения в этом классе имеют вид:

$$\left(i\partial_0 \mp \eta\sqrt{p_k^2 - \eta^2}\right)\Psi^{(l_0,l_1)}(x_0, \vec{x}, x_4, l, l_3) = 0, \tag{4.15}$$

где $l - l_0 = 0, 1, 2, \ldots$, $-l \le l_3 \le l$. Они конечнокомпонентны или бесконечнокомпонентны в зависимости от значений чисел l_0 и l_1. Доказательства того, что уравнения (4.8), (4.15) $\mathcal{P}(1,4)$-инвариантны и реализуют соответствующие неприводимые представления, проводятся аналогично доказательствам, приведенным в связи с уравнением (2.22).

Обратим внимание, что если мы намерены решениям Ψ уравнения (4.15) придавать физический смысл волновой функции — амплитуды соответствующей вероятности — то числа l_0 и l_1 должны быть такими, чтобы Ψ реализовали унитарные представления, которые, как отмечалось више, бесконечномерны, а Ψ — бесконечнокомпонентны. В последнее время бесконечнокомпонентные уравнения интенсивно обсуждаются [13], хотя и без достаточно обоснованных аргументов в пользу их написания. В нашем же случае бесконечнокомпанентные уравнения являются непременным следствием принятой группы симметрии. Правда, физический смысл величин η, l_0, l_1, l, l_3 не столь ясен, как величин, фигурирующих в волновых функциях уравнений класса I и II. Следуя авторам [13], можно было бы пытаться придать какой-то физический смысл этим величинам. Однако случаи I и II имеют более непосредственное отношение к проблемам спектра масс и нестабильных систем, чем случай III.

Для полноты отметим, что в случае IV, когда $P_0 = \vec{P} = P_4 = 0$, имеем $V = W = 0$. Алгебра $\mathcal{P}(1,4)$ в этом случае редуцируется к алгебре $O(1,4)$ однородной группы де Ситтера, все представления которой известны (см., например, [14]), а соответствующие уравнения выписаны в [1].

Приведенные здесь квантовомеханические уравнения Шредингера–Фолди удобны для перехода к квазирелятивистскому приближению при учете изоспиновых и спиновых эффектов (при введении, конечно, подходящего взаимодействия). При теоретикополевых рассмотрениях обычно исходят из уравнений первого порядка по ∂_μ. Такие уравнения, как показано в последующих параграфах, можно получить из выписанных в § 2 и § 4 уравнений унитарным преобразованием типа Фолди–Вотхойзена. Построение же квантовой теории поля на базе линейных по ∂_μ уравнений и введение взаимодействий в рамках лагранжева формализма проводится в полной аналогии с обычной $\mathcal{P}(1,4)$-инвариантной теорией. В заключение этого параграфа заметим, что все приведенные здесь результаты для $\mathcal{P}(1,4)$ без принципиальных затруднений обобщаются (исключая, конечно, вопросы интерпретации) и на группу $\mathcal{P}(1,n)$ трансляций и вращений в $(1+n)$-мерном пространстве Минковского.

§ 5. Уравнения типа Дирака

Рассмотрим простейшее уравнение, явно инвариантное относительно группы $\mathcal{P}(1,4)$. Напомним, что имеется пять матриц Дирака γ_μ, удовлетворяющих соотношениям

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \qquad \mu = 0,1,2,3,4, \tag{5.1}$$

где γ_0 — эрмитова, а γ_k, $k = 1,2,3,4$ — антиэрмитовы, причем

$$\gamma_0 \equiv \beta = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \qquad (\text{или} \quad \gamma_4 = -\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3). \tag{5.2}$$

Уравнение Дирака в 5-пространстве Минковского имеет вид:

$$(i\gamma_\mu\delta_\mu - \varkappa)\Psi \equiv (i\gamma_0\partial_0 + i\gamma_k\partial_k - \varkappa)\Psi = 0 \tag{5.3а}$$

или

$$(i\gamma_\mu\partial_\mu + \varkappa)\Psi = 0. \tag{5.3б}$$

Уравнение (5.3) было выписано еще Дираком. Наша цель — выяснить, какое представление алгебры $\mathcal{P}(1,4)$ реализует совокупность решений Ψ уравнения (5.3). При этом мы будем следовать не традиционной методике, которой обычно пользуется (см., например, [12]) и которая фактически выясняет вопрос о реализации уравнением Дирака в 4-пространотве Минковокого представления не группы Пуанкаре $\mathcal{P}(1,3)$, а лишь однородной группы Лоренца $O(1,3)$. Заметим, кстати, что поскольку исходной группой инвариантности является именно $\mathcal{P}(1,3)$ (в нашем случае $\mathcal{P}(1,4)$), а не $O(1,3)$ ($O(1,4)$), необходимо с самого начала ставить и решать вопрос о реализации решениями того или иного уравнения представления группы $\mathcal{P}(1,3)$ ($\mathcal{P}(1,4)$), а не $O(1,3)$ ($O(1,4)$).

Здесь мы пользуемся методикой, пригодной для анализа как уравнения Дирака, так и других волновых уравнений (линейных нелинейных по ∂_μ), причем в произвольном $(1+n)$-мерном пространстве Минковского. Она основана на математически строгом определении (2.23) понятия инвариантности волнового уравнения. Из определения (2.23) ясно, что для решения вопроса об инвариантности волнового уравнения относительно группы $\mathcal{P}(1,n)$ необходимо найти явный вид генераторов P_μ, $J_{\mu\nu}$ алгебры $\mathcal{P}(1,n)$, связанный с данным уравнением тем, что его гамильтониан H и оператор $i\partial_0 \equiv i\partial/\partial t$ должны коммутировать с генераторами P_k, $J_{\mu\nu}$ как генератор P_0. Далее, зная явный вид генераторов, можно найти в явном виде инварианты алгебры $\mathcal{P}(1,n)$ и тем самым решить вопрос о том, какое именно представление этой алгебры реализует решения данного уравнения.

Проиллюстрируем эту методику на примере уравнения (5.3).

Запишем уравнение (5.3а) в гамильтоновой форме

$$i\partial_0\Psi = H\Psi, \qquad H \equiv \alpha p_k + \beta\varkappa, \qquad \alpha_k = \gamma_0\gamma_k. \tag{5.3а$'$}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что явный вид генераторов P_μ, $J_{\mu\nu}$, удовлетворяющих соотношениям (2.1), в данном случае выглядит как

$$\begin{aligned}
&P_0 = H \equiv \alpha_k p_k + \beta\varkappa, \qquad P_k = p_k \equiv -ip_k,\\
&J_{kl} = x_k p_l - x_l p_k + S_{kl},\\
&J_{0k} = x_0 p_k - \frac{1}{2}(x_k P_0 + P_0 x_k),
\end{aligned} \tag{5.4}$$

где

$$S_{kl} \equiv \frac{i}{4}(\gamma_k\gamma_l - \gamma_l\gamma_k). \tag{5.5}$$

Заметим, что “орбитальные” и спин-изоспиновые моменты M_{kl} и S_{kl} в отдельности не коммутируют с H. Это, однако, не означает, что в свободной теории, основанной на уравнении (5.3), они не сохраняются. Это лишь означает, что в представлении Дирака (5.4) переменные $\vec{x}$, x_4, от которых зависит волновая функция Ψ, нельзя трактовать как соответствующие координаты; адэкватная интерпретация волновой функции возможна только в представлении Фолди–Широкова (см. § 2), где, как видно из (2.19), “орбитальные” и спин-изоспиновые моменты в отдельности коммутируют с гамильтонианом. Как известно (см., например, [15]), аналогичная ситуация с уравнением Дирака имеет место и в $\mathcal{P}(1,3)$: сохраняющиеся при отсутствии взаимодействия каждый в отдельности орбитальный M_{ab} и спиновый S_{ab} моменты коммутируют с гамильтонианом только в представлении Фолди–Широкова, но не в представлении Дирака.

Имея явный вид (5.4) генераторов $\mathcal{P}(1,4)$, можно проверить, что условие (2,23) выполняется, т.е, уравнение (5.3) действительно $\mathcal{P}(1,4)$-инвариантно. Для конкретности дальнейших рассуждений удобно выбрать γ_μ в виде:

$$\gamma_a = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_a \\ -\sigma_a & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_4 = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_0 \equiv \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

где 1 — двухмерная единичная матрица, σ_a — матрицы Паули, взятые в виде:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда операторы (2.17) спина и изоспина для частицы, описываемой уравнением (5.3), имеют вид

$$S_a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_a \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

а их квадраты, совпадающие с инвариантами (2.18), имеют вид:

$$\vec{S}^{\,2} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{T}^{\,2} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

Далее, инвариант $P^2 = \varkappa$, а инвариант — знак энергии ε совпадает (в системе $p_k = 0$) с матрицей β.

Из формул для $\vec{S}^2$, $\vec{T}^2$, S_3, T_3 и $\varepsilon = \beta$ видно, что совокупность решений уравнения (5.3а) реализует четырехмерное приводимое представление $D^+(1/2,0) \oplus D^-(0,1/2)$ алгебры $\mathcal{P}(1,4)$. Таким образом, в соответствии с интерпретацией чисел s и t, уравнение Дирака (5.3а) описывает мультиплет типа

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi^+_{1/2,0} \\ \Psi^-_{0,1/2} \end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

где $\Psi^+_{1/2,0}$ — спинор-изоскаляр, описывающий фермион со спином $s = 1/2$ и изоспином $t = 0$ (частицу типа Λ – гиперон), а $\Psi^-_{0,1/2}$ — скаляр-изоспинор, описывающие антибозон с $s = 0$ и $t = 1/2$ (античастицу типа $\widetilde{K}$ — мезон)[6].

Аналогично можно показать, что уравнение (5.3б) реализует представление $D^-(1/2,0) \oplus D^+(0,1/2)$ алгебры $\mathcal{P}(1,4)$, т.е. описывает частицу типа K и античастицу типа Λ. Явный вид генераторов P_μ, $J_{\mu\nu}$ в этом случае получается из (5.4) заменой $\varkappa \to -\varkappa$ или $\beta \to -\beta$.

Итак, в отличие от уравнения Дирака в схеме $\mathcal{P}(1,3)$, уравнение Дирака (5.3) в схеме $\mathcal{P}(1,4)$ не описывает симметричным образом частицы и античастицы, а значит, не будет инвариантным относительно преобразований типа CPT. Из анализа уравнений (5.3а) и (5.3б) видно, что в схеме $\mathcal{P}(1,4)$ уравнение, описывающее частицы и античастицы симметрично, должно реализовать представление

$$D^+\left(\frac{1}{2},0\right) \oplus D^+\left(0,\frac{1}{2}\right) \oplus D^-\left(\frac{1}{2},0\right) \oplus D^-\left(0,\frac{1}{2}\right). \tag{5.10}$$

Оказывается, что такое уравнение имеет вид:

$$(i\Gamma_\mu \partial_\mu - \varkappa)\Psi \equiv (i\Gamma_0\partial_0 + i\Gamma_k\partial_k - \varkappa)\Psi = 0, \tag{5.11}$$

где 8×8–матрицы Γ_μ суть

$$\Gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_k \\ \gamma_k & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

Явный вид генераторов $\mathcal{P}(1,4)$ для (5.11) выгладит как

$$\begin{aligned} &P_0 = \mathcal{H} \equiv \Gamma_0\Gamma_k p_k + \Gamma_0\varkappa, \qquad P_k = p_k, \\ &J_{kl} = M_{kl} + \mathcal{S}_{kl}, \\ &J_{0k} = x_0 p_k - \tfrac{1}{2}(x_k P_0 + P_0 x_k), \end{aligned} \tag{5.13}$$

где

$$\mathcal{S}_{kl} \equiv \frac{i}{4}(\Gamma_k\Gamma_l - \Gamma_l\Gamma_k) = \begin{pmatrix} S_{kl} & 0 \\ 0 & S_{kl} \end{pmatrix}. \tag{5.14}$$

[6] Заметим, кстати, что более содержательно было бы назвать бозон типа K не изодублетом, а спиносинглет-изодублетом, а фермион типа Λ — спинодублет-изосинглетом.

Из явного вида соответствующих 8×8-матриц $\vec{\mathcal{S}}^2$, $\vec{\mathcal{T}}^{\,2}$, $\mathcal{S}_3$, $\mathcal{T}_3$ и $\varepsilon=\Gamma_0$ видно, что уравнение (5.11) действительно реализует представление (5.10), т.е., что волновая функция Ψ (восьмикомпонентный спинор) имеет вид:

$$\Psi=\begin{pmatrix}\Psi^+_{1/2,0}\\ \Psi^+_{0,1/2}\\ \Psi^-_{1/2,0}\\ \Psi^-_{0,1/2}\end{pmatrix}. \tag{5.15}$$

Восьмикомпонентное уравнение (5.11) является объединением четырехкомпонентных уравнений (5.3а) и (5.3б). Действительно, беря $\Gamma'_\mu=Q\Gamma_\mu Q^+$, где

$$Q\equiv\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\gamma_0 & 1-\gamma_0\\ 1-\gamma_0 & 1+\gamma_0\end{pmatrix}, \tag{5.16}$$

получим

$$\Gamma'_k=\begin{pmatrix}\gamma_k & 0\\ 0 & \gamma_k\end{pmatrix},\qquad \Gamma'_0=\begin{pmatrix}\gamma_0 & 0\\ 0 & -\gamma_0\end{pmatrix},\qquad \Psi'=\begin{pmatrix}\Psi^+_{1/2,0}\\ \Psi^-_{0,1/2}\\ \Psi^-_{1/2,0}\\ \Psi^+_{0,1/2}\end{pmatrix}. \tag{5.17}$$

Заметим, что подобное объединение уравнений Дирака в схеме $\mathcal{P}(1,3)$ тривиально: восьмикомпонентное уравнение с матрицами Γ_a, Γ_0 (или Γ'_a, Γ'_0), как и уравнение с

$$\Gamma''_a=\begin{pmatrix}\gamma_a & 0\\ 0 & \gamma_a\end{pmatrix},\qquad \Gamma''_0=\begin{pmatrix}\gamma_0 & 0\\ 0 & \gamma_0\end{pmatrix},$$

реализует представление $2\,[D^+(1/2)\oplus D^-(1/2)]$ алгебры $\mathcal{P}(1,3)$.

Волновая функция уравнения (5.11) (или даже (5.3)) описывает непривычные мультиплеты: она объединяет в один мультиплет фермионы и бозоны. Например,

$$\Psi=\begin{pmatrix}\Lambda\\ K\\ \widetilde{\Lambda}\\ \widetilde{K}\end{pmatrix}.$$

Это, конечно не означает, что уравнение (5.11) неудовлетворительно с точки зрения, например, закона сохранения барионного числа. Последний лишь накладывает ограничения на возможные виды взаимодействий.

Как отмечалось выше, для адекватной физической интерпретации волновой функции Ψ как функции координат $\vec{x}$, x_4 необходимо перейти от представления Дирака к представлению Фолди. Этот переход осуществляется в помощью унитарного преобразования

$$U=\exp\left(-i\frac{A_k p_k}{2p}\,\mathrm{arctg}\,\frac{p}{\varkappa}\right),\qquad p\equiv\sqrt{p_k^2}, \tag{5.18}$$

где

$$A_k = \begin{cases} i\gamma_k, & \text{для уравнения (5.3)} \\ i\Gamma_k, & \text{для уравнения (5.11).} \end{cases} \tag{5.19}$$

В представлении Фолди уравнения (5.3), (5.11) имеют вид:

$$i\partial_0\Psi = B\sqrt{p_k^2 + \varkappa^2}\Psi, \tag{5.20}$$

где $B = \gamma_0, -\gamma_0, \Gamma_0$ для уравнений (5.3а), (5.3б), (5.11) соответственно. Явные виды (5.4), (5.13) генераторов P_μ, $J_{\mu\nu}$ переходят при этом преобразовании в (2.19), где нужно положить $\varepsilon = \gamma_0, -\gamma_0, \Gamma_0$ для случаев (5.3а), (5.3б), (5.11) соответственно, а операторы S_{kl} задаются формулами (5.5) и (5.14) для уравнение (5.3) и (5.11) соответственно.

§ 6. Уравнение типа Кеммера-Дэффина

Рассмотрим теперь аналог уравнений, описывающих в схеме $\mathcal{P}(1,4)$ бозоны со спином 0 и 1, а именно, уравнения в 5-пространстве Минковского вида

$$(\beta_\mu\partial_\mu + \varkappa)\varphi \equiv (\beta_k\partial_k + \beta_5\partial_5 + \varkappa)\varphi = 0, \tag{6.1}$$

где $\partial_5 \equiv i\partial/\partial x_5 \equiv -i\partial/\partial t \equiv -i\partial_t$, а пять эрмитовых матриц β_μ удовлетворяют алгебре Кеммера–Дэффина–Петье (КДП):

$$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\lambda + \beta_\lambda\beta_\nu\beta_\mu = \delta_{\mu\nu}\beta_\lambda + \delta_{\lambda\nu}\beta_\mu, \qquad \mu,\nu,\lambda = 1,2,3,4,5. \tag{6.2}$$

Наинизшее представление алгебры (6.2) реализуется 6×6-матрицами вида

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \qquad \beta_2 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\beta_3 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \qquad \beta_4 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \tag{6.3}$$

$$\beta_5 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix},$$

где точки обозначают нули. Удобно записать (6.3) схематически в виде табл. 1. В этой таблице указано, какие элементы матриц равны единице (все остальные равны нулю). Для сравнения напомним, что наинизшее представление алгебры КДП в $\mathcal{P}(1,3)$ (т.е. для $\mu \leq 4$) реализуется четырьмя 5×5-матрицами.

Таблица 1

β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
1,6	2,6	3,6	4,6	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5

С помощью изложенной в § 5 методики можно показать, что уравнение (6.1) с матрицами (6.3) реализует представление

$$D^+(0,0)\oplus D^-(0,0)\oplus D(1/2,1/2), \tag{6.4}$$

где по первым двум слагаемым преобразуются "существенные" (essential) компоненты вектора φ, на которых оператор энергии отличен от нуля, а по остальным двум — "лишние" (redundant) компоненты вектора φ, на которых оператор энергии равен нулю. Последние не имеют физического смысла, но, как и в $\mathcal{P}(1,3)$, они возникают во всех линейных по ∂_μ уравнениях, за исключением уравнений типа Дирака. Преобразование Фолди в таких случаях не только разделяет состояния по знаку энергии, но и дает возможность инвариантным способом отбросить лишние компоненты.

Таким образом, уравнение (5.1) с матрицами (6.3), которое является линеаризованным уравнением Клейна–Гордона в 5-пространстве Минковского, описывает частицы с $s=t=0$.

Остановимся более детально на весьма интересном случае — уравнении (6.1) с 15×15-матрицами β_μ, реализующими алгебру (6.2). Эти матрицы можно выбрать, например, в виде, схематически записанном в табл. 2, где указаны лишь отличные от нуля элементы матриц β_μ, равные ± 1.

Таблица 2

β_1		β_2		β_3		β_4		β_5	
$4,15$	$15,4$	$3,15$	$15,3$	$2,15$	$5,12$	$1,15$	$15,1$	$1,14$	$14,1$
$7,14$	$14,7$	$6,14$	$14,6$	$5,14$	$14,5$	$-5,13$	$-13,5$	$-2,13$	$-13,2$
$9,13$	$13,9$	$8,13$	$13,8$	$-8,12$	$-12,8$	$-6,12$	$-12,6$	$-3,12$	$-12,3$
$10,12$	$12,10$	$-10,11$	$-11,10$	$-9,11$	$-11,9$	$-7,11$	$-11,7$	$-4,11$	$-11,4$

Выясним теперь, какое представление реализует совокупность решений φ уравнения (6.1) с матрицами β табл. 2.

Используя методику, разработанную в [16] для приведения уравнения Кеммера–Дэффина в $\mathcal{P}(1,3)$ к форме Шредингера, можно показать, что уравнение (6.1) эквивалентно уравнению

$$i\partial_t\varphi = H\varphi, \qquad H = S_{5k}p_k + \beta_5\varkappa, \tag{6.5}$$

где

$$S_{5k}\equiv i(\beta_5\beta_k-\beta_k\beta_5), \qquad k=1,2,3,4$$

Легко убедиться, что вследствие (6.2) эрмитовы матрицы

$$S_{\mu\nu}\equiv i(\beta_\mu\beta_\nu-\beta_\nu\beta_\mu) \tag{6.6}$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям для генераторов алгебры O_5, т.е. реализуют 15-мерное представление этой алгебры. Используя явный вид матриц β_μ табл. 2, находим, что величина, соответствующая инварианту P^2 в $\mathcal{P}(1,4)$, имеет вид:

$$P^2 \equiv H^2 - p_k^2 = \varkappa^2\beta_5^2 = \varkappa^2 \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1^4 & & & \\ \hline & 0^6 & & \\ \hline & & 1^4 & \\ \hline & & & 0 \end{array}\right), \tag{6.7}$$

где верхние индексы в матрице обозначают размерности единичных и нулевых матриц, а матрицы S_{kl} имеют вид, схематически записанный в табл. 3, где указаны лишь отличные от нуля элементы матриц iS_{kl}, равные ± 1.

Таблица 3

iS_{12}		iS_{13}		iS_{14}	
$3,4$	$-4,3$	$2,4$	$-4,2$	$1,4$	$-4,1$
$6,7$	$-7,6$	$5,7$	$-7,5$	$-5,9$	$9,5$
$8,9$	$-9,8$	$-8,10$	$10,8$	$-6,10$	$10,6$
$-11,12$	$12,11$	$-11,13$	$-13,11$	$-11,14$	$14,11$
iS_{23}		iS_{24}		iS_{34}	
$2,3$	$-3,2$	$1,3$	$-3,1$	$1,2$	$-2,1$
$5,6$	$-6,5$	$-5,8$	$8,5$	$6,8$	$-8,6$
$9,10$	$-10,9$	$7,10$	$-10,7$	$7,9$	$-9,7$
$-12,13$	$13,12$	$-12,14$	$14,12$	$-13,14$	$14,13$

Из табл. 3 видно, что S_{kl} имеет следующий квазидиагональный вид:

$$S_{kl} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} S_{kl}^4 & & & \\ \hline & S_{kl}^6 & & \\ \hline & & S_{kl}^4 & \\ \hline & & & 0 \end{array}\right), \tag{6.8}$$

где S_{kl}^4 и S_{kl}^6 реализуют, соответственно, 4-мерное и 6-мерное представления алгебры O_4. Далее, квадраты векторов спина и изоспина, компоненты которых суть

$$S_a \equiv \frac{1}{2}(S_{bc} + S_{4a}), \qquad T_a \equiv \frac{1}{2}(S_{bc} - S_{4a}),$$

имеют вид

$$\vec{S}^{\,2} = \vec{T}^{\,2} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \frac{3}{4}1^4 & & & \\ \hline & 1^6 & & \\ \hline & & \frac{3}{4}1^4 & \\ \hline & & & 0 \end{array}\right), \tag{6.9}$$

а квадраты компонент S_3, T_3 равны

$$S_3^2 = T_3^2 = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \frac{1}{2}1^4 & & & & \\ \hline & \begin{matrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{matrix} & & & \\ \hline & & \begin{matrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{matrix} & & \\ \hline & & & \frac{1}{2}1^4 & \\ \hline & & & & 0 \end{array}\right). \tag{6.10}$$

Из (6.9) и (6.10) видно, что 15×15–матрицы S_{kl} из (6.6), имеющие вид (6.8), реализуют представление

$$D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \oplus D(1,0) \oplus D(0,1) \oplus D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \oplus D(0,0) \tag{6.11}$$

алгебры O_4.

Для установления того, какое именно представление алгебры $\mathcal{P}(1,4)$ реализуется решениями уравнения (6.1) с 15×15-матрицами β_μ, необходимо диагонализировать оператор знака энергии, который (в системе p_k) совпадает с β_5. Это осуществляется с помощью преобразования

$$\beta'_\mu = A\beta_\mu A^{-1}, \tag{6.12}$$

где отличные от нуля матричные элементы матриц A и A^{-1} символически записаны в табл. 4 и 5: например, символ “2.5,9” в табл. 5 означает, что $(2A^{-1})_{5,9} = 2$, т.е. $(A^{-1})_{5,9} = 1$, а символ “$-11,4$” означает, что $(A^{-1})_{11,4} = -1/2$.

Таблица 4

	$1,1$	$-1,14$	$2,2$	$-2,13$	$3,3$	$-3,12$	$4,4$	$-4,11$
A	$5,1$	$5,14$	$6,2$	$6,13$	$7,3$	$7,12$	$8,4$	$8,11$
	$9,5$	$10,6$	$11,7$	$12,8$	$13,9$	$14,10$	$15,15$	

Таблица 5

	$1,1$	$1,5$	$2,2$	$2,6$	$3,3$	$3,7$	$4,4$	$4,8$
$2A^{-1}$	$2.5,9$	$2.6,10$	$2.7,11$	$2.8,12$	$2.9,13$	$2.10,12$	$2.15,5$	
	$11,4$	$11,8$	$-12,3$	$12,7$	$-13,2$	$-13,6$	$-14,1$	$14,5$

В этом представлении

$$\varepsilon = \beta'_5 = \left(\begin{array}{c|c|c} 1^4 & & \\ \hline & -1^4 & \\ \hline & & 0^7 \end{array}\right). \tag{6.13}$$

Из формул (6.7), (6,9), (6.10) и (6.13) видно, что уравнение (6.1) с 15×15-матрицами β_μ реализует представление

$$D^+\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \oplus D^-\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \oplus D(1,0) \oplus D(0,1) \oplus D(0,0), \tag{6.14}$$

где по первым двум слагаемым преобразуются существенные компоненты вектора φ, реализующие указанные представления алгебры $\mathcal{P}(1,4)$, а по остальным двум преобразуются лишние компоненты. Разумеется, физический смысл имеют только восемь компонент, реализующие представление $D^{+}(1/2,1/2)\oplus D^{-}(1/2,1/2)$, которые инвариантным образом отделяются от семи лишних компонент с помощью преобразования типа Фолди:

$$U=\exp\left(-i\frac{\beta_k p_k}{2p}\,\operatorname{arctg}\frac{p}{\varkappa}\right),\qquad p\equiv\sqrt{p_k^2}. \tag{6.15}$$

При этом преобразовании уравнение (6.1) с 15×15-матрицами расщепляется на два независимых уравнения: одно — для существенных компонент $\Psi(x_0,\vec{x},x_4,s_3,t_3)$, s_3, $t_3=\pm 1/2$, совпадающее с уравнением (2,24); а другое — для лишних компонент $\varphi(x_0,\vec{x},x_4,s_3,t_3)$, s_3, $t_3=0,\pm 1$, и $\varphi_0(x_0,\vec{x},x_4)$, не имеющих физического смысла.

Таким образом, уравнение Кеммера–Дэффина в 5-мерном пространстве Минковского описывает симметричным образом фермионы и антифермионы со спином и изоспином $s=t=1/2$ (мультиплеты типа спинодублет-изодублет), т.е., например, системы типа нуклон-антинуклон $(N,\widetilde{N})$.

Здесь мы ограничились рассмотрением $\mathcal{P}(1,4)$-инвариантных уравнений типа Дирака и Кеммера–Дэффина. Аналогично могут быть рассмотрены и другие линейные по ∂_μ уравнения в 5-мерном пространстве, например, уравнения типа Рарита–Швингера, Паули–Фирца и др. При этом формализм Рарита–Швингера, развитый для нахождения уравнений для частиц с произвольным спином в $\mathcal{P}(1,3)$, легко обобщается и на случай группы $\mathcal{P}(1,4)$. Это связано с наличием пяти матриц γ_μ, $\mu=0,1,2,3,4$, удовлетворяющих алгебре (5.1), причем в формализме Рарита–Швингера для $\mathcal{P}(1,4)$ равноправно используются все пять матриц γ_μ. Заметим, кстати, что в случае алгебры КДП (6.2) ситуация иная; не существует пятой 10×10-матрицы, удовлетворяющей алгебре (6.2).

В заключении отметим, что общий вид линейных по ∂_μ $\mathcal{P}(1,4)$-инвариантных уравнений выглядит как

$$(B_\mu\partial_\mu+\varkappa)\Phi=0, \tag{6.16}$$

где эрмитовы матрицы B_μ удовлетворяют алгебре

$$\begin{gathered}[B_\mu,J_{\alpha\rho}]=g_{\mu\alpha}B_\rho-g_{\mu\rho}B_\alpha,\\ B_\mu B_\nu B_\lambda-B_\mu B_\lambda B_\nu-B_\nu B_\lambda B_\mu+B_\lambda B_\nu B_\mu=\delta_{\mu\nu}B_\lambda-\delta_{\lambda\nu}B_\mu.\end{gathered} \tag{6.17}$$

В зависимости от конкретной реализации этой алгебры уравнение (6,16) описывает частицы с теми или иными значениями спина s и изоспина t. Эти уравнения, однако, содержат много лишних компонент. Выяснение того, какое именно представление алгебры $\mathcal{P}(1,4)$ реализует уравнение (6.16) с теми или иными матрицами алгебры (6.17), а также выделением инвариантным образом существенных компонент проводится с помощью методики (6.1) Кеммера-Дэффина.

1. Соколик Г.А., Групповые методы в теории элементарных частиц, Атомиздат, М., 1965.
2. O'Reifertaigh L., *Phys. Rev. Lett.*, 1965, **14**, 575;
   Jost R., *Helv. Phys. Acta.*, 1966, **39**, 369.
3. Фущич В.И., *УФЖ*, 1968, **13**, 878.
4. Румер Ю.Б., Исследования по 5-оптике, Физматгиз, М., 1956.
5. Fushchych W.I., Krivski I.Yu., *Nucl. Phys.*, 1968, **17**, 79.
6. Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, М., 1963.
7. Wigner E.P., *Ann. Math.*, 1939, **40**, 149.
8. Широков Ю.М., *ЖЭТФ*, 1957, **33**, 1196.
9. Foldy L., *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 568.
10. Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А.М., Рассеяния, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике, Физматгиз, М., 1967.
11. Mathews P.T., Salam A., *Phys. Rev.*, 1958, **112**, 283.
12. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я., Представление группы Лоренца, Физматгиз, М., 1958.
13. Fronsdal C., *Phys. Rev.*, 1967, **156**, 1665;
    Nambu Y., *Phys. Rev.*, 1967, **160**, 1171;
    Takabayasi T., *Prog. Theor. Phys.*, 1967, **37**, 767;
    Stoyanev D., Todorov I., ICTP, preprint IC/67/58.
14. Newton T.D., *Ann., Math.*, 1950, **51**, 730.
15. Foldy L., Wouthuysen S., *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 29.
16. Case K.M., *Phys. Rev.*, 1955, **100**, 1513.