Об операторах взаимодействия

В.И. ФУЩИЧ

The problem on finding interaction operators in the field quantum theory is formulated and solved (in some particular cases). It is shown that in the most general sense this problem is reduced to finding isometric operators satisfying the conditions (22).

В теории, основывающейся на уравнении движения

$$H\Psi = i\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \tag{1}$$

как правило, предполагается, что полный гамильтониан системы можно представить в виде [1]

$$H = H^0 + H'. \tag{2}$$

Хотя такое предположение кажется естественным, на самом же деле это очень существенное ограничение на теорию, и возможно является причиной возникновения расходимостей в ней.

Более точно это предположение означает, что все динамические операторы системы имеют вид

$$P_\alpha = P^0_\alpha + P'_\alpha, \qquad M_{\mu\nu} = M^0_{\mu\nu} + M'_{\mu\nu}, \tag{3}$$

где P_α — полный оператор энергии-импульса системы, $M_{\mu\nu}$ — полный тензор момента, а P^0_α, $M^0_{\mu\nu}$ — операторы (свободные) невзаимодействующей системы. Операторы со штрихами будем называть операторами взаимодействия.

Исходя из требований релятивистской инвариантной теории, на операторы P_α, $M_{\mu\nu}$ следует наложить условие, что они являются генераторами алгебры Пуанкаре P [2], т.е.

$$\begin{aligned}
&[P_\alpha, P_\beta]_- = 0, \qquad [M_{\mu\nu}, P_\alpha]_- = i(g_{\nu\alpha}P_\mu - g_{\mu\alpha}P_\nu),\\
&[M_{\mu\nu}, M_{\gamma\sigma}]_- = i(g_{\mu\sigma}M_{\nu\gamma} - g_{\mu\gamma}M_{\nu\sigma} + g_{\nu\gamma}M_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\gamma}).
\end{aligned} \tag{4}$$

Очевидно, что и свободные операторы должны также быть генераторами алгебры Пуанкаре P^0, т.е.

$$\begin{aligned}
&\left[P^0_\alpha, P^0_\beta\right]_- = 0, \qquad \left[M^0_{\mu\nu}, P^0_\alpha\right]_- = i(g_{\nu\alpha}P^0_\mu - g_{\mu\alpha}P^0_\nu),\\
&\left[M^0_{\mu\nu}, M^0_{\gamma\sigma}\right]_- = i\left(g_{\mu\sigma}M^0_{\nu\gamma} - g_{\mu\gamma}M^0_{\nu\sigma} + g_{\nu\gamma}M^0_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}M^0_{\mu\gamma}\right).
\end{aligned} \tag{4'}$$

В релятивистской квантовой механике свободные операторы $P^0_\alpha = (P^0_0, \vec{P}^{\,0})$, $M^0_{\mu\nu} = (\vec{K}^{\,0}, \vec{J}^{0})$ системы, состоящей из одной частицы, имеют вид [3]

$$\begin{aligned}
&P^0_0 = \omega = \left(m^2 + \vec{p}^{\,2}\right)^{1/2}, \qquad \vec{p} = -i\vec{\nabla}, \qquad \vec{P}^{\,0} = \vec{p},\\
&\vec{J}^0 = \vec{r}\times\vec{p} + \vec{s}, \qquad \vec{K}^{\,0} = \frac{1}{2}\left(\vec{r}\omega + \omega\vec{r}\right) - \left(\vec{s}\times\vec{p}\right)(m+\omega)^{-1} - t\vec{p},
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\vec{s}$ — спиновый оператор.

Український фізичний журнал, 1967, **12**, № 8, С. 1331–1338.

В квантовой теории поля эти операторы определяются через канонический тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ следующим образом:

$$P^0_\alpha = \int d^3x\, T_{\alpha 0}, \qquad M^0_{\mu\nu} = \int d^3x\, (x_\mu T_{\nu 0} - x_\nu T_{\mu 0}). \tag{5$'$}$$

Несмотря на то, что операторы (5) и (5′) имеют различную структуру, в алгебраическом смысле это эквивалентные операторы, так как они реализуют одно и то же неприводимое представление алгебры P^0. Поэтому и физические теории, построенные на операторах (5) и (5′), эквивалентны, хотя пространства, в которых действуют эти операторы, различны. Это утверждение справедливо и для полных операторов, если динамические операторы системы в квантовой механике и квантовой теории поля реализуют одно и то же представление алгебры P. И вообще, две теории следует считать физически эквивалентными, если средние значения коммутирующих операторов полного набора в обеих теориях совпадают. Ясно, что такое определение эквивалентности двух описаний более общее, чем обычно принятое [3], которое по существу является следствием из постулата о равноправности различных систем отсчета.

В работе [4], а затем в [5] впервые рассматривалась задача о нахождении наиболее общих выражений для операторов взаимодействий в релятивистской квантовой механике. В настоящей работе формулируется и решается (в некоторых частных случаях) такая же задача в релятивистской квантовой теории поля.

Прежде чем перейти к решению этой задачи, необходимо придать четкий математический смысл равенствам (3). Обозначим через H гильбертово пространство, в котором задано представление алгебры P, а через H^0 — подпространство в H, в котором реализуется представление алгебры P^0. Формулам (3) можно придать четкий смысл в следующих случаях:

1. Представления алгебр P и P^0 заданы во всем пространстве H ($H = H^0$) или на плотных (неплотных) множествах $\widetilde{D}(P) = \widetilde{D}(P^0) \subset H$.
2. Представление алгебры P задано в $H \supset H^0$, а представление P^0 — в инвариантном подпространстве H^0.
3. Представление P задано только на плотном (или неплотном) множестве $\widetilde{D}(P) \supset \widetilde{D}(P^0)$ в H.

1. Рассмотрим первый случай.

а) Так как алгебры P и P^0 изоморфны, то равенства (3) можно рассматривать как связь между базисами в 10-мерном векторном пространстве, поэтому

$$P_\alpha = a^\beta_\alpha P^0_\beta + b^{\beta\gamma}_\alpha M^0_{\beta\gamma}, \qquad M_{\mu\nu} = c^\gamma_{\mu\nu} P^0_\gamma + d^{\gamma\sigma}_{\mu\nu} M^0_{\gamma\sigma}. \tag{6}$$

Поскольку операторы P_α, $M_{\mu\nu}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям (4), то постоянные коэффициенты в (6) должны быть такими, чтобы удовлетворялись следующие равенства:

$$\begin{aligned}
&\left\{a^\lambda_\nu \left(b^{\gamma\sigma}_\mu - b^{\sigma\gamma}_\mu\right) + a^\lambda_\mu \left(b^{\sigma\gamma}_\nu - b^{\gamma\sigma}_\nu\right)\right\} g_{\sigma\lambda} = 0,\\
&\left(b^{\gamma\sigma}_\mu - b^{\sigma\gamma}_\mu\right)\left(b^{\beta\rho}_\nu - b^{\rho\beta}_\nu\right) g_{\gamma\rho} = 0,\\
&\left\{c^\beta_{\mu\nu} \left(b^{\gamma\rho}_\alpha - b^{\rho\gamma}_\alpha\right) + a^\beta_\alpha \left(d^{\rho\gamma}_{\mu\nu} - d^{\gamma\rho}_{\mu\nu}\right)\right\} g_{\rho\beta} = g_{\mu\alpha} a^\gamma_\nu - g_{\nu\alpha} a^\gamma_\mu,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\left(b_\alpha^{\gamma\rho} - b_\alpha^{\rho\gamma}\right)\left(d_{\mu\nu}^{\beta\sigma} - d_{\mu\nu}^{\sigma\beta}\right) g_{\gamma\sigma} = g_{\mu\alpha} b_\nu^{\rho\beta} - g_{\nu\alpha} b_\mu^{\rho\beta},\\
&\left\{c_{\mu\nu}^{\rho}\left(d_{\alpha\beta}^{\gamma\sigma} - d_{\alpha\beta}^{\sigma\gamma}\right) + c_{\alpha\beta}^{\rho}\left(d_{\mu\nu}^{\sigma\gamma} - d_{\mu\nu}^{\gamma\sigma}\right)\right\} g_{\sigma\rho} = g_{\alpha\nu} c_{\beta\mu}^{\gamma} - g_{\alpha\mu} c_{\beta\nu}^{\gamma} + g_{\beta\mu} c_{\alpha\nu}^{\gamma} - g_{\beta\nu} c_{\alpha\mu}^{\gamma},\\
&\left(d_{\alpha\beta}^{\gamma\sigma} - d_{\alpha\beta}^{\sigma\gamma}\right)\left(d_{\mu\nu}^{\rho\lambda} - d_{\mu\nu}^{\lambda\rho}\right) = g_{\alpha\nu} d_{\beta\mu}^{\sigma\rho} - g_{\alpha\mu} d_{\beta\nu}^{\sigma\rho} + g_{\beta\mu} d_{\alpha\nu}^{\sigma\rho} - g_{\beta\nu} d_{\alpha\nu}^{\sigma\rho},\\
&c_{\mu\nu}^{\gamma} = -c_{\nu\mu}^{\gamma}, \qquad d_{\mu\nu}^{\gamma\sigma} = -d_{\nu\mu}^{\gamma\sigma}.
\end{aligned}
$$

Из (6) получаем явные выражения для операторов взаимодействия через свободные операторы

$$
P'_\alpha = b_\alpha^{\gamma\sigma} M_{\gamma\sigma}^0 + \sum_{\beta=0,\ \beta\neq\alpha} a_\alpha^\beta P_\beta^0, \tag{7}
$$

$$
M'_{\mu\nu} = c_{\mu\nu}^{\gamma} P_\gamma^0 + \sum_{\substack{\gamma,\sigma=0,\\ \gamma\neq\mu,\ \sigma\neq\nu}} d_{\mu\nu}^{\gamma\sigma} M_{\gamma\sigma}^0. \tag{7$'$}
$$

Формулы (6) можно рассматривать как линейные однородные канонические соотношения между операторами P_α, $M_{\mu\nu}$ и P_α^0, $M_{\mu\nu}^0$. Очевидно, что формулы (7) определяют наиболее общий вид операторов взаимодействия, если ограничиться только линейными каноническими преобразованиями. В общем случае нелинейных неоднородных преобразований операторы являются некоторыми функциями от свободных операторов:

$$
P'_\alpha = F_\alpha(P_\gamma^0, M_{\mu\nu}^0), \qquad \gamma\neq\alpha, \tag{8}
$$

$$
M'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}(P_\beta^0, M_{\lambda\sigma}^0), \qquad \lambda\neq\mu, \quad \sigma\neq\nu. \tag{8$'$}
$$

Из условия релятивистской инвариантности (4) следует, что функции F_α, $F_{\mu\nu}$ должны быть такими, чтобы операторы взаимодействия удовлетворяли таким коммутационным соотношениям:

$$
\left[P'_\alpha, P'_\beta\right]_- = \left[P_\beta^0, P'_\alpha\right]_- + \left[P_\alpha^0, P'_\beta\right]_-, \tag{9}
$$

$$
\left[M'_{\mu\nu}, P'_\alpha\right]_- = i(g_{\nu\alpha}P'_\mu - g_{\mu\alpha}P'_\nu) + \left[P_\alpha^0, M'_{\mu\nu}\right]_- - \left[M_{\mu\nu}^0, P'_\alpha\right], \tag{9$'$}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[M'_{\mu\nu}, M'_{\lambda\sigma}\right]_- = i\left(g_{\mu\sigma}M'_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}M'_{\nu\sigma} + g_{\nu\lambda}M'_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}M'_{\mu\lambda}\right) +\\
+ \left[M_{\lambda\sigma}^0, M'_{\mu\nu}\right]_- - \left[M_{\mu\nu}^0, M'_{\lambda\sigma}\right].
\end{aligned} \tag{9$''$}
$$

Таким образом, задача о нахождении операторов взаимодействия в этом случае сводится к описанию всех канонических преобразований операторов P_α, $M_{\mu\nu}$ и P_α^0, $M_{\mu\nu}^0$. Следует отметить, что даже если бы были описаны все такие преобразования, то мы не смогли бы найти все возможные операторы взаимодействия, так как операторы P'_α, $M'_{\mu\nu}$ могут, вообще говоря, удовлетворять условиям (9), но не быть функциями P_α^0, $M_{\mu\nu}^0$. В этом последнем случае наша задача сводится к решению операторных уравнений (9) при заданных операторах P_α^0, $M_{\mu\nu}^0$. Далее укажем на один класс решений этой задачи.

б) В квантовой теории поля динамические операторы обычно строятся из операторов рождения и уничтожения. Для простоты, рассмотрим только взаимодействие между нейтральными мезонами.

Рассмотрим такую систему операторов:

$$P_\alpha = P_\alpha^0 + P'_\alpha, \qquad M_{ij} = M_{ij}^0 + M'_{ij}, \qquad M_{0i} = M_{0i}^0 + M'_{0i}, \tag{10}$$

где

$$P_\alpha^0 = \int d^3k\; k_\alpha a^*(\vec{k})a(\vec{k}), \qquad \alpha = 0,1,2,3, \tag{11}$$

$$M_{ij}^0 = \frac{i}{2}\int d^3k\; \left\{k_i m_j^0(\vec{k}) - k_i m_i^0(\vec{k})\right\}, \qquad i,j = 1,2,3, \tag{11$'$}$$

$$M_{0i}^0 = -M_{i0}^0 = -\frac{i}{2}\int d^3k k_0 m_i^0(\vec{k}), \tag{11$''$}$$

$$m_i^0(\vec{k}) = \frac{\partial a^*(\vec{k})}{\partial k_i}a(\vec{k}) - a^*(\vec{k})\frac{\partial a(\vec{k})}{\partial k_i}, \qquad k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2},$$

$$P'_\alpha = \int d^3k\; k_\alpha \left\{a^*(\vec{k})v(\vec{k}) + v^*(\vec{k})a(\vec{k})\right\} + f_\alpha, \tag{12}$$

$$M'_{ij} = i\int d^3k\; \left\{k_i m'_j(\vec{k}) - k_j m'_i(\vec{k})\right\} + f_{ij}, \tag{12$'$}$$

$$M'_{0i} = -M'_{i0} = i\int d^3k\; k_0 m'_i(\vec{k}) + f_{0i}, \tag{12$''$}$$

$$m'_k(\vec{k}) = \frac{\partial a^*(\vec{k})}{\partial k_i}v(\vec{k}) - a^*(\vec{k})\frac{\partial v^*(\vec{k})}{\partial k_i} + \frac{\partial v(\vec{k})}{\partial k_i}a(\vec{k}) - v^*(\vec{k})\frac{\partial a(\vec{k})}{\partial k_i},$$

$v(\vec{k})$ — функция, $a^*(\vec{k})$, $a(\vec{k})$ — операторы рождения и уничтожения мезонов, удовлетворяющие обычным коммутационным соотношениям

$$\left[a(\vec{k}), a^*(\vec{k}')\right]_- = \delta(\vec{k} - \vec{k}'),$$

$$f_\alpha = \int d^3k\; k_\alpha |v(\vec{k})|^2,$$

$$f_{ij} = \frac{i}{2}\int d^3k \left\{k_i\left(\frac{\partial v^*(\vec{k})}{\partial k_j}v(\vec{k}) - v^*(\vec{k})\frac{\partial v(\vec{k})}{\partial k_j}\right) - \right.$$
$$\left. -k_j\left(\frac{\partial v^*(\vec{k})}{\partial k_i}v(\vec{k}) - v^*(\vec{k})\frac{\partial v(\vec{k})}{\partial k_i}\right)\right\},$$

$$f_{0i} = -\frac{i}{2}\int d^3k\; k_0\left(\frac{\partial v^*(\vec{k})}{\partial k_i}v(\vec{k}) - v^*(\vec{k})\frac{\partial v(\vec{k})}{\partial k_i}\right).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что система операторов (10) удовлетворяет условиям (4) и (4$'$), а проще всего в этом убедиться, если сделать такое каноническое преобразование [6]:

$$c(\vec{k}) = a(\vec{k}) + v(\vec{k}), \qquad c^*(\vec{k}) = a^*(\vec{k}) + v^*(\vec{k}). \tag{13}$$

В новых операторах $c^*(\vec{k})$ и $c(\vec{k})$ полные динамические операторы (10) имеют вид[1]

$$P_\alpha = P^0_\alpha(a^* \to c^*, a \to c), \tag{14}$$

$$M_{ij} = M^0_{ij}(a^* \to c^*, a \to c), \tag{14$'$}$$

$$M_{0i} = M^0_{0i}(a^* \to c^*, a \to c). \tag{14$''$}$$

Этот пример показывает, что всякая система операторов (10), которая может быть приведена при помощи канонических преобразований операторов рождения и уничтожения к диагональному виду (относительно операторов $c^*(\vec{k})$, $c(\vec{k})$), удовлетворяет коммутационным соотношениям (4).

Следует отметить, что система операторов (10) является нетривиальным решением уравнений (4), однако физическая теория, построенная на основе этих операторов, по существу, эквивалентна свободной теории поля, если преобразования (13) являются собственными каноническими преобразованиями.

В работе [7] приведены также частные решения уравнений (9), отличные от наших. Выражения для генераторов алгебры P приведены в виде бесконечных рядов операторов $a^*(k)$ и $a(k)$. Вопрос о сходимости этих рядов не обсуждается.

2. Так как во втором случае $H \supset H^0$, то (3) следует записать в таком виде:

$$\begin{aligned} &P_\alpha = P_\alpha E^0 + P_\alpha E' \equiv P^0_\alpha + P'_\alpha, \\ &M_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} E^0 + M_{\mu\nu} E' \equiv M^0_{\mu\nu} + M'_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{15}$$

где E^0 — оператор проектирования на подпространство H^0, E' — оператор проектирования на $H \ominus H^0$. Из формулы (15) следует, что операторы P^0_α, $M^0_{\mu\nu}$ являются частями операторов P_α, $M_{\mu\nu}$, лежащими в H^0. В этом случае соотношения (9) имеют вид

$$\begin{aligned} &\left[P'_\alpha, P'_\beta\right]_- = P^0_\beta P'_\alpha - P^0_\alpha P'_\beta, \\ &\left[M'_{\mu\nu}, P'_\alpha\right]_- = i\left(g_{\nu\alpha} P'_\mu - g_{\mu\alpha} P'_\nu\right) + P^0_\alpha M'_{\mu\nu} - M^0_{\mu\nu} P'_\alpha, \\ &\left[M'_{\mu\nu}, M'_{\lambda\sigma}\right]_- = i\left(g_{\mu\sigma} M'_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda} M'_{\nu\sigma} + g_{\nu\lambda} M'_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma} M'_{\mu\lambda}\right) + \\ &\qquad\qquad + M^0_{\lambda\sigma} M'_{\mu\nu} - M^0_{\mu\nu} M'_{\lambda\sigma}. \end{aligned} \tag{16}$$

Из (16) видно, что операторы взаимодействия образуют обобщенную (или квантованную) алгебру Ли в том смысле, что некоторые структурные константы этой алгебры не числа, а операторы, которые, в свою очередь, являются генераторами алгебры Пуанкаре P^0. В общем случае задача о нахождении операторов взаимодействия сводится к построению представлений такой обобщенной алгебры. Такую задачу, по-видимому, невозможно решить известными в настоящее время методами. Однако в предположении, что

$$\begin{aligned} &P^0_\beta P'_\alpha - P^0_\alpha P'_\beta = 0, \\ &P^0_\alpha M'_{\mu\nu} - M^0_{\mu\nu} P'_\alpha = 0, \\ &M^0_{\lambda\sigma} M'_{\mu\nu} - M^0_{\mu\nu} M'_{\lambda\sigma} = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

[1] Стрелки в формулах (14) означают соответствующую замену в формулах (11) для операторов P^0_α, $M^0_{\mu\nu}$.

система уравнений (16) может быть решена, поскольку в этом случае операторы взаимодействия образуют алгебру Пуанкаре P', а все представления такой алгебры найдены [8].

Далее покажем, что если подпространство H' инвариантно также и относительно сопряженных операторов P^*, то условия (17) выполняются тождественно, т.е.

$$P^0_\beta P'_\alpha = P^0_\alpha M'_{\mu\nu} = M^0_{\mu\nu} M'_{\lambda\sigma} = 0. \tag{18}$$

Рассмотрим такое скалярное произведение:

$$(P'E'h, E^0h) = (P'h', E^0h),$$

где $h' \in H \ominus H^0$, $E^0h \in H^0$. При вышеуказанных предположениях справедливо такое равенство:

$$(P'h', E^0h) = (Ph', E^0h) = (h', P^*E^0h) = 0, \tag{19}$$

из которого следует, что $P'h' \in H' = H \ominus H^0$, т.е. относительно операторов взаимодействия пространство H', инвариантно, а это и означает, что условия (18) удовлетворяются.

Нетрудно убедиться, что такое же утверждение справедливо и тогда, когда операторы P заданы не во всем H, а только на плотном множестве $\widetilde{D}(P)$ в H при

$$E^0\widetilde{D}(P) \in \widetilde{D}(P). \tag{20}$$

3. Теперь рассмотрим случай, когда $\widetilde{D}(P)$ плотно в H, но условие (20) не выполняется. Обозначим через $D^0(P)$ и $D'(P)$ такие множества

$$D^0(P) = E^0\widetilde{D}(P) \cap \widetilde{D}(P), \qquad D'(P) = E'\widetilde{D}(P) \cap \widetilde{D}(P).$$

По формулам (15) алгебра P однозначно определяется через операторы P^0 и P' только на тех элементах $h \in H$, которые принадлежат области $D = D^0(P) \oplus D'(P)$. На самом же деле операторы P_α, $M_{\mu\nu}$ определены в более широкой области $\widetilde{D}(P)$, поэтому возникает задача о расширении операторов P, которые определены на множестве D формулами (15), на множество $\widetilde{D}(P)$. При этом расширения должны быть такими, чтобы расширенные операторы образовывали алгебру Пуанкаре.

Далее мы остановимся на более узкой задаче, а именно, о расширении операторов P при условии, что они симметричны и область $D \subset \widetilde{D}(P)$ плотна в H.

Используя теорию симметрических расширений [9], можно найти все симметрические расширения операторов P_α, $M_{\mu\nu}$, которые определены на множестве D формулами (15). Эти расширения определяются формулами

$$\begin{aligned} \widetilde{P}_\alpha f_\alpha &= P^0_\alpha f^0_\alpha + P'_\alpha f'_\alpha + z_\alpha \varphi_\alpha + \overline{z}_\alpha V_\alpha \varphi_\alpha, \\ \widetilde{M}_{\mu\nu} f_{\mu\nu} &= M^0_{\mu\nu} f^0_{\mu\nu} + M'_{\mu\nu} f'_{\mu\nu} + z_{\mu\nu}\Phi_{\mu\nu} + \overline{z}_{\mu\nu} V_{\mu\nu}\Phi_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned} &f^0_\alpha, f^0_{\mu\nu} \in D^0(P), \qquad f'_\alpha, f'_{\mu\nu} \in D'(P), \\ &f_\alpha = f^0_\alpha + f'_\alpha + \varphi_\alpha + V_\alpha\varphi_\alpha, \\ &f_{\mu\nu} = f^0_{\mu\nu} + f'_{\mu\nu} + \Phi_{\mu\nu} + V_{\mu\nu}\Phi_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

V_α, $V_{\mu\nu}$ — изометрические операторы, z_α, $z_{\mu\nu}$ — невещественные числа, φ_α, $\Phi_{\mu\nu}$ — вектора в H, принадлежащие дефектным пространствам операторов P_α, $M_{\mu\nu}$.

Из всех возможных расширений операторов P_α и $M_{\mu\nu}$, задаваемых формулами (21), следует отобрать только такие, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям (4). Это ограничение на $\widetilde{P}_\alpha$ и $\widetilde{M}_{\mu\nu}$ приводит к тому, что изометрические операторы V_α, $V_{\mu\nu}$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\left[(\widetilde{z}_\alpha V_\alpha - z_\alpha E)(V_\alpha - E)^{-1}, (\overline{z}_\beta V_\beta - z_\beta E)(V_\beta - E)^{-1}\right]_- = 0, \tag{22}$$

$$\begin{gathered}\left[(\overline{z}_{\mu\nu} V_{\mu\nu} - z_{\mu\nu} E)(V_{\mu\nu} - E)^{-1}, (\overline{z}_\alpha V_\alpha - z_\alpha E)(V_\alpha - E)^{-1}\right]_- = \\ = i\left\{g_{\nu\alpha}(\overline{z}_\mu V_\mu - z_\mu E)(V_\mu - E)^{-1} - g_{\mu\alpha}(\overline{z}_\nu V_\nu - z_\nu E)(V_\nu - E)^{-1}\right\},\end{gathered} \tag{22$'$}$$

$$\begin{gathered}\left[(\overline{z}_{\mu\nu} V_{\mu\nu} - z_{\mu\nu} E)(V_{\mu\nu} - E)^{-1}, (\overline{z}_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} - z_{\alpha\beta} E)(V_{\alpha\beta} - E)^{-1}\right]_- = \\ = i\Big\{g_{\mu\beta}(\overline{z}_{\nu\alpha} V_{\nu\alpha} - z_{\nu\alpha} E)(V_{\nu\alpha} - E)^{-1} - g_{\mu\alpha}(\overline{z}_{\nu\beta} V_{\nu\beta} - z_{\nu\beta} E) \times \\ \times (V_{\nu\beta} - E)^{-1} + g_{\nu\alpha}(\overline{z}_{\mu\beta} V_{\mu\beta} - z_{\mu\beta} E)(V_{\mu\beta} - E)^{-1} + \\ + g_{\nu\beta}(\overline{z}_{\mu\alpha} V_{\mu\alpha} - z_{\mu\alpha} E)(V_{\mu\alpha} - E)^{-1}\Big\},\end{gathered} \tag{22$''$}$$

где E — единичный оператор, а по повторяющимся греческим индексам суммирование не проводится.

Таким образом, задача о нахождении операторов взаимодействия сводится к нахождению изометрических операторов V_α, $V_{\mu\nu}$, удовлетворяющих уравнениям (22).

Аналогичным способом можно рассмотреть и тот случай, когда операторы P_α, $M_{\mu\nu}$ заданы на неплотном множестве D формулами (15), но при этом необходимо предполагать, что они замкнуты [10].

1. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., Введение в теорию квантованных полей, М.–Л., 1957.
2. Dirac P.A.M., *Rev. Mod. Phys.*, 1949, **21**, 392.
3. Вигнер Е., Теория групп, М., ИЛ, 1961.
4. Bakamjian B., Thomas L.H., *Phys. Rev.*, 1953, **92**, 1300.
5. Foldy L.L., *Phys. Rev.*, 1961, **112**, 275.
6. Боголюбов Н.Н., Толмачев В.В., Ширков Д.В., Новый метод в теории сверхпроводимости, М., 1958;
   Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, М., ИЛ, 1963.
7. Kita H., *Prog. Theor. Phys.*, 1966, **35**, 934.
8. Wigner E.P., *Ann. Math.*, 1939, **40**, 149;
   Широков Ю.М., *ЖЭТФ*, 1957, **33**, 1196;
   Санников С.С., *Ядерная физика*, 1966, **4**, 587.
9. Ахиезер Н.И., Глазмай И.М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М.–Л., 1966.
10. Красносельский М.А., *ДАН СССР*, 1948, **9**, № 1.