О вложении алгебры Пуанкаре

В.И. ФУЩИЧ

The article shows the way of constructing, according to a given spectrum of elementary and hypothetic particle masses, such an algebra G, containing Poincarais's algebra P as a subalgebra, or an enveloping algebra $U(P)$, that a mass operator determined in the space, where one of unreducible representations is given, be selfadjoint and have a spectrum, coinciding with the given mass spectrum.
By embedding small Poincarais's algebra (non-relativistic case) an explicit type of a mass operator was obtained. It is noted that the mass operator can depend on a spin and parity only in the case, when the fundamental particles, which adrons and bosons "consist" of, have different types and parity.

1. За последние годы экспериментально открыто много элементарных частиц. Несмотря на успешное применение теории групп $SU(3)$ и $SU(6)$, до сего времени не создана теория, которая смогла бы объяснить спектр масс адронов или бозонов. Если рассмотреть таблицу элементарных частиц, то можно заметить, что их массы, или массовый оператор, как мы будем ниже говорить, являются некоторой функцией взаимокоммутирующих операторов M[1], т.е.

$$M = f(I_3, I, Y, J, \widetilde{P}, X), \tag{1}$$

I, I_3, Y, J, $\widetilde{P}$ — операторы изоспина, проекции изоспина на ось z гиперзаряда, спина, парности соответственно, X — некоторые операторы, физический смысл которых пока не ясен[2].

Одной из основных задач теории элементарных частиц является установление явной зависимости M от этих операторов. В работах [1] делались попытки установить такую зависимость методом вложения алгебры Пуанкаре P в более широкую алгебру Ли G. Оказывается, что таким методом, как это показано в [2], невозможно получить зависимости типа (1), если алгебра G конечномерна, а оператор Казимира P_μ^2 алгебры P — самосопряженный. В связи с этим естественно выяснить вопрос, можно ли получить такую зависимость, не ограничиваясь тем, что P_μ^2 — самосопряженный, а G — конечномерная или бесконечномерная алгебра Ли.

В работе показано, как вложить алгебру P в G так, чтобы оператор массы (или спина) был самосопряженный и имел дискретный спектр. Кроме того из рассмотрения вложения малой алгебры Пуанкаре P_l в конечномерную алгебру G_l (нерелятивистский случай), найден явный вид оператора массы частицы, который при некоторых предположениях приводит к массовой формуле Гелл–Манна.

2. Пусть нам заданы четыре неприводимых представления алгебры P в пространствах $H_1^{\mu_1,s_1}$, $H_2^{\mu_2,s_2}$, $H_3^{\mu_3,s_3}$, $H_4^{\mu_4,s_4}$, где μ_i, s_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, вообще говоря,

Український фізичний журнал, 1967, **12**, № 5, С. 741–746.

[1]В действительности M — оператор массы не отдельной частицы, а оператор массы некоторой системы, которая может находиться в различных возбужденных состояниях, собственных для этого оператора.

[2]Без таких дополнительных операторов невозможно объяснить разницу между массами мезонов ω и Φ, η и η', f и f'.

комплексные числа, которые характеризуют представления этой алгебры [3]. Как известно, оператор $\left(P_\mu^i\right)^2$, действующий в $H_i^{\mu_i,s_i}$, кратен единичному оператору, т.е.

$$\left(P_\mu^i\right)^2 H_i = \mu_i^2 H_i. \tag{2}$$

Поскольку нас будет интересовать октет барионов, положим $\operatorname{Re}\mu_1 = N$, $\operatorname{Re}\mu_2 = \Xi$, $\operatorname{Re}\mu_3 = \Sigma$, $\operatorname{Re}\mu_4 = \Lambda$ — массы соответствующих барионов, а $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = \frac{1}{2}$.

Обозначим через H пространство, которое является прямой суммой пространств H_i. В H-пространстве операторы импульсов P_μ и P_μ^2 имеют вид

$$P_\mu = \begin{pmatrix} P_\mu^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_\mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_\mu^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_\mu^4 \end{pmatrix}, \quad P^2 \equiv P_\mu^2 \equiv \begin{pmatrix} \left(P_\mu^1\right)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(P_\mu^2\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(P_\mu^3\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(P_\mu^4\right)^2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где через P_μ^i и $\left(P_\mu^i\right)^2$ обозначены операторы, отображающие H_i в H_i. Аналогичный вид имеет оператор момента $M_{\mu\nu}$. Очевидно, что в H реализуется приводимое представление алгебры P. Однако относительно некоторой алгебры $G \supset P$ это пространство может быть неприводимым, т.е. H не содержит подпространств инвариантных относительно G.

Каждый оператор в H можно записать в виде [4]

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где операторы d_{ij} отображают H_j в H_i. Нетрудно убедиться, что совокупность операторов типа (4) и операторов алгебры P образуют алгебру G[3], т.е.

$$[P,[D,D']] + [D,[D',P]] + [D',[P,D]] = 0, \tag{5}$$

где D' — оператор типа (4).

Физический смысл дополнительных операторов D состоит в том, что они переводят частицу (вектор состояния) из одного изотопического мультиплета в другой или в линейную комбинацию частиц (вектор состояний), которые принадлежат различным изотоническим мультиплетам.

Поскольку оператор P^2, вообще говоря, несамосопряженный, то его нельзя принять за оператор квадрата массы частицы M^2. Естественно определить оператор квадрата массы частицы M^2 следующим образом:

$$M^2 = \operatorname{Re} P^2 = \frac{P^2 + (P^2)^*}{2}. \tag{6}$$

В том случае, когда все $d_{ij} = 0$ для $i \neq j$, никакой зависимости оператора массы от операторов $I_3, I, \ldots, X$ невозможно таким путем получить, хотя $G \supset P$, т.е. алгебра G является тривиальным расширением алгебры P [5].

[3]При этом, конечно, предполагается, что обычное произведение операторов P, D, D' имеет смысл.

Так как скалярное произведение в H задается формулой

$$(h, g) = \sum_{i=1}^{4} (h_i, g_i)_i, \tag{7}$$

где $h, g \in H$, а $h_i, g_i \in H_i$, то очевидно, что M^2 является самосопряженным оператором в H и имеет только дискретный спектр.

Таким образом, мы построили алгебру $G \supset P$, одно из представлений которой реализуется в H. Этим самым и показано, что методом вложения алгебры P в G можно, в принципе, получить зависимость типа (1), однако вопрос о том, как конструктивно задать алгебру G, т.е. построить базис (генераторы) этой алгебры и выразить оператор M^2 через этот базис, остается открытым[4]. Такая задача в нерелятивистском случае, как будет видно ниже, может быть полностью решена.

Прежде чем переходить к нерелятивистскому случаю, сделаем несколько замечаний об операторах массы и спина.

3. Характерной чертой релятивистской теории (с алгебраической точки зрения) является то, что, в отличие от операторов энергии, импульса и момента, которые являются элементами алгебры P операторы массы и спина, даже в случае свободной теории, не являются элементами алгебры P. Действительно, для свободной частицы формула (1) имеет вид

$$M^2 = f\left(P_0^2, P_1^2, P_2^2, P_3^2\right) = P_0^2 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2.$$

Оператор квадрата спина

$$S^2 = W_\alpha W_\alpha, \qquad W_\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} P_\beta M_{\gamma\delta}.$$

Легко убедиться, что операторы $P_0^2, \ldots, P_3^2$, $W_0^2, \ldots, W_3^2$ не принадлежат алгебре P, и поэтому, чтобы придать четкий математический смысл этим формулам, необходимо расширить алгебру P до ее обертывающей алгебры $U(P)$. Так как генераторами алгебры $U(P)$ являются все возможные произведения генераторов алгебры P, то в рамках алгебры $U(P)$ операторы $M^2, S^2, P_0^2, \ldots, W_3^2$ принадлежат этой же алгебре.

Таким образом, для того, чтобы операторы массы и спина входили в теорию “на равных правах” с операторами энергии, импульса и момента, необходимо положить в ее основу не алгебру Пуанкаре, а алгебру $U(P)$. В связи с этим более корректно говорить о вложении $U(P)$ в G, а не о вложении P в G.

4. Рассмотрим вложение малой алгебры Пуанкаре P_l (т.е. алгебры с генераторами $P_0, M_{12}, M_{23}, M_{13}$) в G_l. Аналогичным методом, как и в пункте 2, можно показать, что в этом случае алгебра $G_l \supset P_l$ будет конечномерной алгеброй — 64-мерной алгеброй Ли. В качестве генераторов этой алгебры выберем операторы:

$$\Gamma^\alpha,\ \Gamma_\mu^\alpha,\ \Gamma_{\mu\nu}^\alpha,\ \Gamma_{\mu 5}^\alpha,\ \Gamma_5^\alpha, \qquad \alpha, \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{8}$$

Коммутационные соотношения между этими генераторами можно установить, если заметить, что в фундаментальном (октетном) представлении алгебры $G_l \equiv \widetilde{U}(8) \equiv$

[4]Случай, когда P_μ^2 — самосопряженный, а G — бесконечная алгебра Ли, рассмотрен Н. Вотрубой и М. Гавличеком (см. также примечания при корректуре).

$U(4,4)$ они имеют вид [6]

$$\begin{aligned} &\Gamma^\alpha = I\otimes\sigma_\alpha, \qquad \Gamma^\alpha_\mu = \gamma_\mu\otimes\sigma_\alpha, \qquad \Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \gamma_\mu\gamma_\nu\otimes\sigma_\alpha, \\ &\Gamma^\alpha_{\mu5} = \gamma_\mu\gamma_5\otimes\sigma_\alpha, \qquad \Gamma^\alpha_5 = \gamma_5\otimes\sigma_\alpha, \end{aligned} \tag{9}$$

где I — единичная матрица, σ_α, γ_μ — матрицы Паули, Дирака. Все генераторы алгебры $\widetilde{U}(8)$, за исключением генераторов Γ^0_{12}, Γ^0_{13}, Γ^0_{23} являются операторами типа (4).

Найти явный вид массового оператора в рамках алгебры $\widetilde{U}(8)$ означает выразить его через генераторы этой алгебры. В данном случае оператором массы являются

$$P_0 = \begin{pmatrix} N\cdot E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Xi\cdot E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma\cdot E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda\cdot E \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Нетрудно убедиться, что

$$P_0 = c_0\Gamma^0 + c_1 Y + c_2 I + c_3 Y^2, \tag{11}$$

где c_0, c_1, c_2, c_3 — вообще говоря, произвольные постоянные, а

$$I = \frac{1}{2}\left(\Gamma^0 + \Gamma^0_0 - Y\right), \qquad Y = \frac{1}{2}\left(\Gamma^0_0 + \Gamma^3_0\right), \qquad Y^2 = \frac{1}{2}\left(\Gamma^0 + \Gamma^3\right).$$

В октетном представлении алгебры $\widetilde{U}(8)$ эти постоянные однозначно выражаются через массы частиц, которые входят в октет, а именно $c_0 = \Lambda$, $2c_1 = N - \Xi$, $c_2 = \Xi - \Lambda$, $2c_3 = N + \Xi - \Sigma - \Lambda$. Для всех высших представлений алгебры $\widetilde{U}(8)$ таких точных соотношений между массами элементарных частиц и постоянными c_0, c_1, c_2, c_3 нельзя установить, и поэтому формула (11) будет давать некоторые массовые соотношения между массами элементарных частиц, которые входят в данное представление $\widetilde{U}(8)$.

Любопытно отметить, что если в (11) положить $c_2 = 2c$, $2c_3 = -c$, то формула (11) приводит к известному массовому соотношению Гелл–Манна[5].

Чтобы получить зависимость массового оператора от I_3, необходимо учесть разницу между массами частиц, которые входят в один изотопический мультиплет. Пространство H в этом случае является прямой суммой восьми пространств H_i, и поэтому алгебра G_l, неприводимое представление которой реализуется в H является 256-мерной алгеброй Ли. Генераторы алгебры $G_l \equiv \widetilde{U}(16)$ в фундаментальном представлении имеют вид

$$\begin{aligned} &\Gamma^{\alpha\beta} = \Gamma^\alpha\otimes\sigma_\beta, \qquad \Gamma^{\alpha\beta}_\mu = \Gamma^\alpha_\mu\otimes\sigma_\beta, \qquad \Gamma^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\otimes\sigma_\beta, \\ &\Gamma^{\alpha\beta}_{\mu5} = \Gamma^\alpha_{\mu5}\otimes\sigma_\beta, \qquad \Gamma^{\alpha\beta}_5 = \Gamma^\alpha_5\otimes\sigma_\beta, \end{aligned} \tag{12}$$

Оператор P_0, аналогичным способом, как и в рамках алгебры $\widetilde{U}(8)$, можно представить так:

$$P_0 = c_0'\Gamma^{00} + c_1' Y + c_2' I_3 + c_3' I + c_4' Y^2 + c_5' I_3^2 + c_6' Y I_3 + c_7' I^+ I^-, \tag{13}$$

[5]Заметим, что при этом формула (11) будет отличаться от формулы Окубо (нет члена I^2).

где $c'_0, c'_1, \ldots, c'_7$ — произвольные постоянные, а Γ^{00} — единичная матрица,

$$Y = \frac{1}{2}\Gamma^3 \otimes (\sigma_0 + \sigma_3), \qquad Y^2 = \frac{1}{2}\Gamma^0 \otimes (\sigma_0 + \sigma_3),$$

$$I_3 = \frac{1}{4}\left\{(\Gamma^3 + \Gamma_0^3) \otimes (\sigma_0 - \sigma_3) + \Gamma_0^0 \otimes (\sigma_0 + \sigma_3)\right\},$$

$$I_3^2 = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}\Gamma^0 \otimes (3\sigma_0 - \sigma_3) + \Gamma_0^0 \otimes (\sigma_0 - \sigma_3)\right\},$$

$$I = \frac{1}{8}\left\{\Gamma^0 \otimes (5\sigma_0 - \sigma_3) + (\Gamma^3 + \Gamma_0^0 - \Gamma_0^3) \otimes (\sigma_0 - \sigma_3)\right\},$$

$$YI_3 = \frac{1}{4}\Gamma_0^0 \otimes (\sigma_0 + \sigma_3),$$

$$I^+I^- = \frac{1}{8}\left\{\Gamma^0 \otimes (5\sigma_0 - \sigma_3) - (\Gamma^3 + \Gamma_0^3) \otimes (\sigma_0 - \sigma_3) - \Gamma_0^0 \otimes (\sigma_0 + \sigma_3)\right\}.$$

Физический смысл операторов I^+ и I^- состоит в том, что они переводят частицу (вектор состояния) одного изомультиплета в частицу (вектор состояния), которая принадлежит тому же самому изомультиплету.

Если предположить, что все адроны являются связанными состояниями трех кварков (со спином 1/2), то алгебра $G_l = \widetilde{U}(6) \supset P_l$ и оператор массы имеет следующий вид:

$$P_0 = c''_0 + c''_1 Y + c''_2 I_3, \tag{14}$$

где $c''_0 = \dfrac{m_1 + m_2 + m_3}{3}$, $c''_1 = \dfrac{m_1 + m_2 - 2m_3}{2}$, $c''_3 = m_1 - m_2$, а m_1, m_2, m_3 — массы кварков.

Из полученных результатов можно сделать следующие выводы: во-первых, по заданному спектру масс элементарных или гипотетических частиц всегда можно построить такую нетривиальную алгебру $G \supset P$, что оператор M^2 определенный в пространстве, где задано одно из неприводимых представлений G, будет самосопряженный, а его спектр совпадает с заданным спектром масс частиц; во-вторых, методом вложения алгебры P_l в G_l можно получать массовые формулы (операторы), не пользуясь при этом ни гипотезами о существовании высших симметрий ($SU(3)$, $SU(6)$) и полусильных взаимодействий, ни методом теории возмущений; в-третьих, массовые формулы могут зависеть от спина и четности только в том случае, если фундаментальные частицы из которых “состоят” адроны или бозоны, имеют разные спины и четности; в-четвертых, чтобы в физическую теорию операторы массы и спина входили на равных правах с операторами энергии импульса и спина, необходимо в основу теории положить не алгебру Пуанкаре, а ее обертывающую алгебру.

Поскольку приведенные результаты, в основном носят модельный характер и формулы 11), (13), (14) получены только в нерелятивистском случае, то никаких сопоставлений с экспериментом мы не приводим.

Примечание при корректуре. После того, как работа была сдана в печать, нами была конструктивно построена бесконечномерная алгебра G, содержащая алгебру Пуанкаре. Операторы D, переводящие частицу (вектор состояния) с массой m_j в частицу (вектор состояния) с массой m_i $(i, j = 1, 2, 3, \ldots)$ строятся из операторов d_{ij}, которые имеют вид

$$d_{ij} = \int d\bar{p}\, d\bar{q}\, F_1(\bar{p}) F_2(\bar{q}) \overset{*}{\Psi}_i(\bar{p}) \Psi_j(\bar{q}),$$

где $\overset{*}{\Psi}_i(\bar{p})$, $\Psi_j(\bar{q})$ — операторы рождения и поглощения фермиона с массами m_i и m_j соответственно.

Пространство H_i состоит из векторов

$$h_i = \int d\bar{p}\, F(\bar{p}) \overset{*}{\Psi}_i(\bar{p}) |0\rangle.$$

Массовые формулы, полученные в рамках этой алгебры, совпадают (формально) с формулами (11), (13), (14).

1. Fulton T., Wess J., *Ann. Phys.*, 1966, **37**, 271;
Kadishevsky V.G., Muradian R.M., Tavhelidze A.N., Todorov J.T., *Phys. Lett.*, 1965, **15**, 182.
2. O'Raifertaigh L., *Phys. Rev. Lett.*, 1965, **14**, 575;
Jost R., *Helv. Phys. Acta*, 1966.
3. Wigner E.P., *Ann. Math.*, 1939, **40**, 149;
Широков Ю.М., *ЖЭТФ*, 1957, **33**, 1196;
Санников С.С., *Ядерная физика*, 1966, **4**, 587.
4. Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я., Обобщенные функции, т. 4, 1959.
5. Фущич В.И., *Письма в ЖЭТФ*, 1965, **2**, 157.
6. Salam A., Delbourgo R., Strathdee J., *Proc. Roy. Soc. A*, 1965, **284**, 146.