Про представлення групи де Сіттера

В.І. ФУЩИЧ

Як відомо, сукупність дійсних перетворень у п'ятивимірному просторі Мінковського $x'_\alpha = a_{\alpha\rho} x_\rho$ $(\alpha, \rho = 0, 1, 2, 3, 4)$ утворює групу де Сіттера, якщо квадратична форма $s^2 = x_0^2 - \sum\limits_{i=1}^{4} x_i^2$ інваріантна відносно цих перетворень. Томас [1] і Ньютон [2] побудували і описали унітарні представлення цієї групи, використавши той факт, що максимальною компактною підгрупою групи де Сіттера (позначимо її через LO_4) є група O_4, представлення якої добре вивчені.

В цій замітці ми побудуємо представлення групи LO_4, використавши те, що максимальною некомпактною підгрупою групи де Сіттера є власна група Лоренца LO_3, всі представлення якої описані Гельфандом і Наймарком.

Інфінітезимальні оператори представлення групи LO_4, задовольняють співвідношення

$$
\begin{gathered}
[A_{i_1j_1}, A_{i_2j_2}]_- = \delta_{i_1j_2} A_{j_1i_2} + \delta_{j_1i_2} A_{i_1j_2} - \delta_{i_1i_2} A_{j_1j_2} - \delta_{j_1j_2} A_{i_1i_2}, \\
i_1, i_2, j_1, j_2 = 1, 2, 3, 4,
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

$$
\begin{aligned}
&[A_{ij}, B_k]_- = 0, \qquad \text{якщо} \quad k \neq j; \quad k \neq j; \quad i, j, k = 1, 2, 3, \\
&[B_i, B_k]_- = A_{ik},
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

де A_{ij} і B_k — оператори, які відповідають нескінченно малим поворотам в площинах (x_i, x_j) і (x_0, x_i).

Ефективно побудувати представлення групи LO_4 — це задати дії операторів A_{ij}, B_k на деякий базис в просторі R, де визначений оператор T_g (g — елемент LO_4). Припустимо, що R є прямою сумою просторів, в яких реалізуються незвідні представлення групи LO_3, і що в цій сумі не зустрічається двох просторів, які б мали однакові індекси (l_0, l_1) [3, 4][1].

Згідно з [3, 4] в кожному з цих просторів можна вибрати канонічний базис $\xi^{l_0,l_1}_{l,m}$. Закон дії операторів A_{ij}, B_k, коли $i, j, k = 1, 2, 3$, на $\xi^{l_0,l_1}_{l,m}$ відомий [3, 4], тому залишилося визначити тільки $A_{i4}\xi^{l_0,l_1}_{l,m}$ і $B_4\xi^{l_0,l_1}_{l,m}$.

Окремо випишемо комутаційні співвідношення між операторами A_{i4}, B_i, B_4 та іншими операторами алгебри (1):

$$
\begin{aligned}
&[A_{jk}, A_{i4}]_- = -\delta_{ji} A_{k4} + \delta_{ki} A_{j4}, \quad && [A_{ik}, B_4]_- = 0, \\
&[A_{i4}, B_i]_- = -B_4, && [B_i, B_4]_- = A_{i4},
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

$$
[A_{i4}, B_k]_- = 0, \qquad \text{якщо} \quad k \neq i; \ k \neq 4,
\tag{3.2}
$$

$$
[A_{i4}, A_{j4}]_- = -A_{ij}, \qquad [A_{i4}, B_4]_- = B_i.
\tag{4}
$$

Український фізичний журнал, 1966, № 8, С. 907–908.

[1]Це припущення, як буде видно нижче, зроблено лише заради спрощення.

Розглянемо систему рівнянь

$$L_0\frac{\partial\Psi}{\partial x_0}+L_1\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}+L_2\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}+L_3\frac{\partial\Psi}{\partial x_3}+\varkappa\Psi=0, \tag{5}$$

де L_0, L_1, L_2, L_3 — матриці, $\varkappa$ — стала величина; Ψ — функція, яка перетворюється за звідним представленням групи LO_3, яке розкладається в пряму суму незвідних представлень. Якщо в (3) зробити заміну $A_{i4}\to L_i$, $B_4\to L_0$, то можна переконатись, що при цьому співвідношення (3) збігатимуться з умовою релятивістської інваріантності рівняння (5) (див. [4], стор. 278).

Цей факт дозволяє зразу написати остаточний результат:

$$B_4\xi^{l_0,l_1}_{l,m}=b_l^{l_0+1}\xi^{l_0+1,l_1}_{l,m}+b_l^{l_0-1}\xi^{l_0-1,l_1}_{l,m}+b_l^{l_1+1}\xi^{l_0,l_1+1}_{l,m}+b_l^{l_1-1}\xi^{l_0,l_1-1}_{l,m}, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
b_l^{l_0+1}&=c_1\sqrt{(l+l_0+1)(l-l_0)}, && l\ge l_0+1,\\
b_l^{l_0-1}&=c_2\sqrt{(l+l_0)(l-l_0+1)}, && l\ge l_0,\\
b_l^{l_1-1}&=c_3\sqrt{(l+l_1)(l-l_1+1)}, && l\ge l_0,\\
b_l^{l_1+1}&=c_4\sqrt{(l+l_1+1)(l-l_1)}, && l\ge l_0,
\end{aligned} \tag{7}$$

де c_1, c_2, c_3, c_4 — довільні сталі, які можуть бути визначені з умови (4):

$$A_{i4}\xi^{l_0,l_1}_{l,m}=-[B_i,B_4]\xi^{l_0,l_1}_{l,m}. \tag{8}$$

Цікаво зазначити, що якщо R є прямою сумою двох просторів[2], в яких реалізуються незвідні представлення групи LO_3 з індексами $l_0=1/2$, $l_1=3/2$ і $l_0=-1/2$, $l_1=3/2$, то $A_{i4}=c\gamma_i$, $B_4=c\gamma_0$; якщо покласти $c_1=c_2=c$, то

$$A_{ik}=\mathrm{const}\cdot\gamma_i\gamma_k,\qquad B_i=\mathrm{const}\cdot\gamma_0\gamma_i, \tag{9}$$

де γ_0, γ_i — матриці Дірака.

Отже, матриці γ_μ, $\gamma_\mu\gamma_\nu$ $(\mu,\nu=0,1,2,3)$ реалізують чотиривимірне представлення алгебри (1). Зауважимо, в чому можна переконатись, що матриці γ_μ, $\gamma_\mu\gamma_\nu$, $\gamma_\mu\gamma_5$, γ_5 реалізують чотиривимірне представлення алгебри LO_5.

Незвідні представлення групи LO_{n+1} будуються аналогічно, при цьому замість системи (5) слід використовувати більш загальну систему рівнянь [5].

1. Thomas L.H., *Ann. Math.*, 1941, **42**, 113.
2. Newton T.D., *Ann. Math.*, 1950, **51**, 730.
3. Наймарк М.А., Линейные представлення группы Лоренца, М., 1958.
4. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я., Представления группы вращений й группы Лоренца, М., 1958.
5. Соколик Г.А., *ДАН СССР*, 1957, **114**, 1206.
6. Соколик Г.А., Групповые методы в теории элементарных частиц, Атомиздат, 1965.

[2] Незвідні представлення групи LO_4, які задані в $R=\sum\limits_{i=1}^{n}\oplus R_i^{l_0^i,l_1^i}$, будуть скінченновимірними лише в тому випадку, коли всі індекси l_0^i, l_1^i одночасно цілі або півцілі.