Унитарная симметрия и группа Пуанкаре

В.И. ФУЩИЧ

В настоящее время в ряде работ обсуждается вопрос об объединении группы Пуанкаре P с группой внутренних симметрий S (простая группа Ли) [1–5]. При этом прежде всего следует выяснить, не является ли данное объединение тривиальным. Наиболее убедительный результат в этом направлении получен Мишелем [3]. Однако и этот результат получен при довольно жестких ограничениях на группу G, являющуюся объединением групп P и S (предполагается, что каждый элемент $g \in G$ имеет вид $g = sp$, $s \in S$, $p \in P$). Но, как это видно из работ [4, 5] и др., при объединении двух групп $G \supset PS$ содержит элементы, которые непредставимы в виде sp. Алгебра Ли такой группы всегда содержит генераторы, которые не принадлежат ни алгебре P, ни S. Поэтому естественно и в этом случае выяснить вопрос о тривиальности или не тривиальности данного объединения.

В этой заметке найдены условия, при которых алгебра, содержащая, кроме генераторов алгебр P и S, добавочные генераторы, является тривиальным объединением P и S.

Пусть генераторами алгебры G являются генераторы алгебр P и S, а также генераторы H'_l и E'_γ, удовлетворяющие условиям:

$$[H'_l, H'_m] = 0 \qquad (l, m = 1, 2, \ldots, k), \tag{1}$$

$$\left[E'_\gamma, E'_\nu\right] \neq 0 \qquad (\gamma, \nu = 1, 2, \ldots, r). \tag{2}$$

Кроме того, будем предполагать, что для произвольного γ можно указать такое l , при котором

$$\left[E'_\gamma, H'_m\right] = 0 \qquad \text{для} \quad m \neq l, \qquad \left[E'_\gamma, H'_l\right] \neq 0. \tag{3}$$

Генераторы алгебр P и S удовлетворяют условиям:

$$[P_\rho, P_\sigma] = \lambda^\tau_{\rho\sigma} P_\tau \qquad (\tau, \rho, \sigma = 1, 2, \ldots, 10), \tag{4}$$

$$[H_i, H_j] = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \qquad [H_i, E_\alpha] = r_i(\alpha) E_\alpha,$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}]_- = \sum_i r_i(\alpha) H_i \qquad \text{или} \qquad \sum_{\substack{\text{по простым}\\ \text{корням}}} [E_\alpha, E_{-\alpha}]\, r_i(\alpha) = H_i, \tag{5}$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} \qquad (\alpha \neq -\beta), \qquad [H_i, P_\rho] = 0. \tag{6}$$

Докажем, что $[E_\alpha, P_\rho] = 0$, т.е. объединение G будет физически тривиальным и никаких массовых формул нельзя получить в одном из следующих трех случаев:

$$\mathbf{1}. \qquad [H_j, H'_l] = A^m_{jl}, \qquad \left[P_\rho, E'_\gamma\right]_- = B^\nu_{\rho\gamma} E'_\nu, \qquad \left[E'_\gamma, E_\alpha\right]_- = 0. \tag{7}$$

ЖЭТФ, Письма в редакцию, 1966, **2**, № 4, С. 157–160.

Доказательство. При указанных допущениях о группе G

$$[E_\alpha, P_\rho]_- = a^\beta_{\alpha\rho} E_\beta + b^j_{\alpha\rho} H_j + c^\tau_{\alpha\rho} P_\tau + d^l_{\alpha\rho} H'_l + f^\gamma_{\alpha\rho} E'_\gamma. \tag{8}$$

Поскольку G, по предположению, — группа Ли, то имеет место тождество Якоби

$$\begin{aligned} J(E_\alpha, P_\rho, H_i) &\equiv [[E_\alpha, P_\rho], H_i] + [[P_\rho, H_i], E_\alpha] + [[H_i, E_\alpha], P_\rho] = \\ &= a^\beta_{\alpha\rho} (r_i(\alpha) - r_i(\beta)) E_\beta + d^l_{\alpha\rho} [H'_l, H_i] + f^\gamma_{\alpha\rho} [E'_\gamma, H_i] + \\ &+ r_i(\alpha) \left(b^j_{\alpha\rho} H_j + c^\tau_{\alpha\rho} P_\tau + d^l_{\alpha\rho} H'_l + f^\gamma_{\alpha\rho} E'_\gamma \right) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Из (9), с учетом условий (5) и (7), следует, что

$$a_{\alpha\rho} = \delta^\beta_\alpha a_{\alpha\rho}, \qquad b^j_{\alpha\rho} = 0, \qquad c^\tau_{\alpha\rho} = 0, \qquad f^\gamma_{\alpha\rho} = 0. \tag{10}$$

Далее рассмотрим следующее тождество Якоби:

$$\begin{aligned} J\left(E_\alpha, P_\rho, E'_\gamma\right) &= a^\beta_{\alpha\rho} \left[E_\beta, E'_\gamma\right] + b^j_{\alpha\rho} \left[H_j, E'_\gamma\right] + \\ &+ c^\tau_{\alpha\rho} \left[P_\rho, E'_\gamma\right] + d^l_{\alpha\rho} \left[H'_l, E'_\gamma\right] + f^\nu_{\alpha\rho} \left[E'_\nu, E'_\gamma\right] = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Учитывая (3) и (10), из (11) следует, что

$$d^l_{\alpha\rho} = 0. \tag{12}$$

Для доказательства того, что $a_{\alpha\rho} = 0$, достаточно использовать тождество Якоби

$$J(P_\rho, P_\sigma, E_\alpha) \equiv 0 \tag{13}$$

и свойства структурных констант $\lambda^\tau_{\alpha\rho}$ (см. [1]).

2. $$\left[E'_\gamma, H_i\right] = D^\nu_{\gamma i} E'_\nu, \qquad [P_\rho, H'_l]_- = C^m_{\rho l} H'_m, \qquad [H'_l, E_\alpha] = 0. \tag{14}$$

3. Если в G существует хоть один генератор H'_l, который коммутирует с генераторами P и S, то и в этом случае $[E_\alpha, P_\rho] = 0$.

Для доказательства этих утверждений нужно вместо тождества (11) использовать тождество

$$J\left(E_\alpha, P_\rho, H'_l\right) \equiv 0. \tag{15}$$

В заключение отметим, что если условие (6) выполняется не для всех i то, как это показано в [2], можно построить нетривиальное объединение G, генераторами которого будут только P_ρ, H_i и E_α.

1. Coester F., Hamermesh M., MoGlinn, *Phys. Rev.*, 1964, **135**, B450.
2. Ottson U., Kihlberg A., Hilsson J., Preprint, Gothenburg, 1964.
3. Michel L., *Phys. Rev. B*, 1965, **137**, 405.
4. Gürsey F., Pais A., Radicati L., *Phys. Rev. Lett.*, 1964, **13**, 239.
5. Кадышевский В.Г., Мурадян Р.М., Тавхелидзе А.Н., Тодоров И.Т., Препринт ОИЯИ, Д-1929, 1964.