

Об аналитических свойствах некоторых вершинных амплитуд в теории возмущений

В.И. ФУЩИЧ

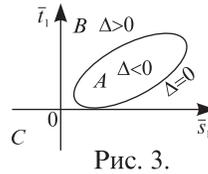
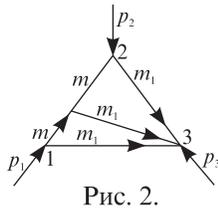
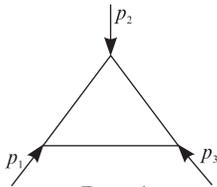
1. Исходя из аксиом теории поля, Ямамота [1] показал, что вершинная амплитуда как функция квадратов внешних импульсов $p_1^2 \equiv \bar{s}$ и $p_3^2 \equiv \bar{t}$ не имеет комплексных особенностей ($\text{Im } \bar{s} \neq 0, \text{Im } \bar{t} \neq 0$), если квадрат третьего внешнего импульса отрицателен ($p_2^2 \equiv \bar{u} < 0$). Более того, им доказано представление Мандельштама относительно этих переменных для $p_2^2 < 0$.

Представляет интерес исследование аналитических свойств вершинных амплитуд Фейнмана, поскольку знание аналитических свойств этих амплитуд, как будет видно ниже, позволяет изучить аналитическую структуру амплитуд рассеяния и рождения в произвольном порядке теории возмущений для определенного класса диаграмм. К настоящему времени детально изучены особенности диаграммы рис. 1 [2, 3].

Отметим, что уже амплитуда такой, сравнительно простой диаграммы не имеет представления Мандельштама, когда $\bar{u} > 0^*$.

В разделе 2 и 3 показано, что амплитуды, соответствующие диаграммам рис. 2 и 3, не имеют комплексных особенностей относительно переменных \bar{s} и \bar{t} при определенных ограничениях на массы виртуальных частиц и квадрат импульса p_2^2 .

В четвертом разделе показано, как с помощью интегрального представления для вершинной амплитуды (например, представления Мандельштама) можно исследовать аналитические свойства амплитуд, соответствующих диаграммам типа рис. 4, описывающих процессы рассеяния частиц.



2. Особенности амплитуды Фейнмана диаграммы рис. 2 находятся на поверхности Ландау [4]

$$\xi_3 = (1 - 2\gamma^2) \left(\xi_1 \xi_2 - \sqrt{(1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2^2)} \right) + 2\gamma \sqrt{1 - \gamma^2} \left(\xi_1 \sqrt{1 - \xi_1^2} + \xi_2 \sqrt{1 - \xi_2^2} \right), \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{s} &= m^2 + m_1^2 - 2mm_1\xi_1, & \bar{u} &= m^2 + m_1^2 - 2mm_1\xi_2, \\ \bar{t} &= 3m_1^2 + 2m_1^2(\eta_{34} + \eta_{45} - \xi_3), & \eta_{34} &= \sqrt{(1 - \gamma^2)(1 - \xi_1^2)} - \gamma\xi_1, \\ \eta_{45} &= \sqrt{(1 - \gamma^2)(1 - \xi_2^2)} - \gamma\xi_2, & \gamma &= \frac{m_1}{2m}. \end{aligned}$$

Укр. мат. журнал, 1965, 17, № 3, С. 137–141.

*При определенных условиях на массы виртуальных частиц.

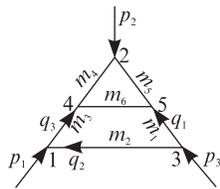


Рис. 4.

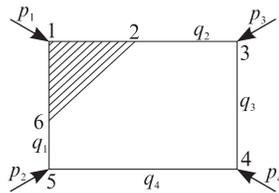


Рис. 5.

Рассмотрим случай, когда $\gamma = 1$, и, кроме того, ради простоты, положим $\bar{u} = 5m^2$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$\sigma^{(3)} = 4(5m^2 - \bar{s})^2 + (22m^2 - 2\bar{s} - \bar{t})^2 - 64m^2 = 0. \quad (2)$$

Далее, воспользуемся идеей работы [5], т.е. уравнение (2) представим следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sigma^{(3)} &= 8(\bar{s}_1^2 - \bar{s}_2^2) + 4(\bar{s}_1 \bar{t}_1 - \bar{s}_2 \bar{t}_2) + \bar{t}_1^2 - \bar{t}_2^2 - \\ &- 128m^2 \bar{s}_1 - 44m^2 \bar{t}_1 + 520m^4 = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\operatorname{Im} \sigma^{(3)} = 2(4\bar{s}_1 + \bar{t}_1 - 32m^2)\bar{s}_2 + (\bar{t}_1 + 2\bar{s}_1 - 22m^2)\bar{t}_2 = 0, \quad (3.2)$$

где

$$\bar{s}_1 = \operatorname{Re} \bar{s}, \quad \bar{s}_2 = \operatorname{Im} \bar{s} \neq 0, \quad \bar{t}_1 = \operatorname{Re} \bar{t}, \quad \bar{t}_2 = \operatorname{Im} \bar{t} \neq 0,$$

и решим эту систему уравнений относительно \bar{s}_2 . Тогда получим, что

$$\bar{s}_2 = \pm \sqrt{\frac{\Delta(\bar{s}_1, \bar{t}_1)}{(\beta + 2)^2 + 4}}, \quad (4)$$

$$\Delta(\bar{s}_1, \bar{t}_1) = 8\bar{s}_1^2 + 4\bar{s}_1 \bar{t}_1 + \bar{t}_1^2 - 128m^2 \bar{s}_1 - 44m^2 \bar{t}_1 + 520m^4,$$

$$\beta = \frac{2(4\bar{s}_1 + \bar{t}_1 - 32m^2)}{22m^2 - 2\bar{s}_1 - \bar{t}_1}. \quad (5)$$

Из (4) следует, что только те \bar{s} и \bar{t} могут быть комплексными особыми точками амплитуды, для которых $\Delta > 0$, т.е. точки, в которых действительные части (\bar{s}_1 и \bar{t}_1) лежат вне эллипса $\Delta = 0$ (рис. 3).

Теперь используем тот факт, что амплитуда Фейнмана диаграммы рис. 2 не имеет особенностей в области, где $\bar{s}_1 < 0$, $\bar{t}_1 < 0$, а $\bar{s}_2 \neq 0$ и $\bar{t}_2 \neq 0$ (в дальнейшем обозначим эту область через \tilde{C}) [4, 6]. Поскольку точки $\bar{s}, \bar{t} \in \tilde{C}$ удовлетворяют уравнениям (3.1) и (3.2), то это означает, что они не являются на самом деле особыми точками амплитуды (эти особенности лежат не на физическом листе). Другими словами, это означает, что контур интегрирования по параметру α , если вклад в амплитуду от указанной диаграммы представить в виде интегралов Фейнмана, не защемляется, когда \bar{s} и $\bar{t} \in \tilde{C}$.

Итак, для аналитического продолжения амплитуды из области \tilde{C} на все другие точки пространства (\bar{s}, \bar{t}) достаточно использовать лемму Идена–Тарского [7] (см. лемму 2а). Чтобы полностью закончить доказательство приведенного выше утверждения, необходимо еще показать, что амплитуды, соответствующие диаграммам,

которые получаются из диаграммы рис. 2 “стягиванием” линий (1,4) или (2,4) в точку, не имеют комплексных особенностей. Последнее станет очевидным, если заметить, что при этом мы получим треугольные диаграммы, а, как известно, амплитуды таких диаграмм не имеют особенностей в области, где $\bar{s}_2 \neq 0$ и $\bar{t}_2 \neq 0$. В этом можно и непосредственно убедиться, если повторить только что приведенные рассуждения для этих диаграмм.

3. Исследуем аналитические свойства амплитуды диаграммы рис. 4. Запишем вклад в амплитуду от этой диаграммы в виде

$$T^{(3)}(\bar{s}, \bar{t}, \bar{u}) = \int dq_1 \frac{V(q_2^2, q_3^2, \bar{u})}{\prod_{i=1}^3 q_i^2 - m_i^2}, \quad (6)$$

где $V(q_2^2, q_3^2, \bar{u})$ — вершинная функция треугольника (4, 2, 5). Для этой функции справедливо представление Мандельштама [2] (при $\bar{u} > 0$):

$$V(q_2^2, q_3^2, \bar{u}) = \int_{a_0 \geq (m_5 + m_6)^2}^{\infty} d\mu_1^2 \int_{b_0 \geq (m_4 + m_6)^2}^{\infty} d\mu_2^2 \frac{\rho(\mu_1^2, \mu_2^2, \bar{u})}{(q_2^2 - \mu_1^2)(q_3^2 - \mu_2^2)}. \quad (7)$$

Подставив (7) в (6) и при этом заменив порядок интегрирования (предполагая, что эта операция законна), в α -представлении $T^{(3)}(\bar{s}, \bar{t}, \bar{u})$ можно представить следующим образом:

$$T^{(3)}(\bar{s}, \bar{t}, \bar{u}) = \int_{a_0}^{\infty} d\mu_1^2 \int_{b_0}^{\infty} d\mu_2^2 \int_0^1 d\alpha \frac{\rho(\mu_1^2, \mu_2^2, \bar{u}) \delta\left(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i\right)}{\{D^{(3)}\}^3}, \quad (8)$$

$$D^{(3)} = \alpha_1(\bar{t} - \mu_1^2) + \alpha_2(\bar{s} - \mu_2^2) - \alpha_3 m_1^2 + \alpha_4(\bar{t} - m_2^2) + \alpha_5(\bar{s} - m_3^2) - (\alpha_1 + \alpha_4)^2 \bar{t} - (\alpha_2 + \alpha_5)^2 \bar{s} + (\alpha_2 + \alpha_5)(\alpha_1 + \alpha_4)(\bar{u} - \bar{s} - \bar{t}). \quad (9)$$

Для нахождения особенностей $T^{(3)}(\bar{s}, \bar{t}, \bar{u})$ используем уравнения Ландау

$$D^{(3)}(\bar{s}, \bar{t}, \bar{u}, \alpha) = 0, \quad (10.1)$$

$$\frac{\partial D^{(3)}(\bar{s}, \bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 1, \dots, 5, \quad \sum_{i=1}^5 \alpha_i = 1. \quad (10.2)$$

Выразив из уравнений (10.2) α_5 и α_4 через \bar{s} , \bar{t} , \bar{u} , α_1 , α_2 , α_3 и подставив их в (10.1), получим уравнение поверхности сингулярностей, которая, вообще говоря, не совпадает с поверхностью Ландау (каждая точка поверхности Ландау принадлежит этой поверхности, но обратное утверждение неверно). Используя уравнение этой поверхности, покажем, что $T^{(3)}(\bar{s}, \bar{t}, \bar{u})$ не имеет особенностей, если $\bar{s}_2 \neq 0$, $\bar{t} \neq 0$, а $\bar{u} < 0$.

Уравнение поверхности сингулярностей имеет вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_1^{(3)} &= a\bar{s}^2 + 2b\bar{s}\bar{t} + c\bar{t}^2 + 2d\bar{s} + 2e\bar{t} + f = 0, \\
a &= c = \alpha_3^2, \quad b = -\alpha_3^2, \\
d &= -\alpha_3[m_3^2 - m_2^2 + \bar{u}(1 - 2\alpha_1 - \alpha_3)] + 2(1 - \alpha_1 - \alpha_3)\alpha_3\bar{u}, \\
e &= \alpha_3[m_3^2 - m_2^2 + \bar{u}(1 - 2\alpha_1 - \alpha_3)] + 2\alpha_1\alpha_3\bar{u}, \\
f &= [m_3^2 + \bar{u}(1 - 2\alpha_1 - \alpha_3) - m_2^2]^2 + \\
&\quad + 4\bar{u}\{-\alpha_1\mu_1^2 - \alpha_2\mu_2^2 - \alpha_3m_1^2 + \alpha_2m_3^2 + (1 - \alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1\bar{u} - m_3^2)\}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Далее, повторяя рассуждения раздела 2, находим, что только те комплексные точки \bar{s} , \bar{t} могут быть особыми, для которых

$$\bar{t}_2 = \beta_1\bar{s}_2, \tag{12}$$

а

$$\bar{s}_2 = \pm \sqrt{\frac{\Delta_1(\bar{s}_1, \bar{t}_1, \alpha)}{(\sqrt{a} + \beta_1\sqrt{c})^2}}, \tag{13}$$

где

$$\Delta_1 = a\bar{s}_1^2 + 2b\bar{s}_1\bar{t}_1 + c\bar{t}_1^2 + 2d\bar{s}_1 + 2e\bar{t}_1 + f, \quad \beta_1 = -\frac{a\bar{s}_1 + b\bar{t}_1 + d}{c\bar{t}_1 + b\bar{s}_1 + e}. \tag{14}$$

Для $\mu_2^2 \geq m_3^2$ парабола $\Delta_1 = 0$ (линия пересечения поверхности $\sigma_1^{(3)}$ с плоскостью \bar{s}_1, \bar{t}_1) лежит всегда в области, где $\bar{s}_1 \geq 0$, $\bar{t}_1 \geq 0$. Поскольку поверхность сингулярностей $\sigma_1^{(3)}$ “находится над областью C ”, то это дает возможность аналитически продолжить амплитуду $T^{(3)}(\bar{s}, \bar{t}, \bar{u})$, как и раньше, из \tilde{C} на все другие точки пространства (\bar{s}, \bar{t}) , для которых $\bar{s}_2 \neq 0$ и $\bar{t}_2 \neq 0$.

Мы не рассматриваем случаев, когда некоторые из параметров α равны нулю, так как при этом сохраняются все сформулированные выше выводы.

До сих пор предполагалось, что $\bar{u} < 0$. Отметим, что такие же результаты получаются и для $\bar{u} > 0$, если при этом

$$\frac{\bar{u} - m_4^2 - m_5^2}{2m_4m_5} < -1. \tag{15}$$

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, нужно вместо (7) использовать модифицированное представление Мандельштама для функции $V(q_2^2, q_3^2, \bar{u})$, которое получено в работе [2] (см. формулу (22)).

Из приведенного следует, что если предположить справедливость представления (7) для диаграмм лесничного типа с n внутренними линиями, то амплитуда Фейнмана для диаграммы такого же типа с $n + 1$ внутренней линией не имеет комплексных особенностей.

4. В этом разделе рассматриваются особенности амплитуды Фейнмана диаграммы рис. 5, когда массы виртуальных и реальных частиц одинаковы, за исключением массы частицы с импульсом p_1 .

Вклад в амплитуду рассеяния от этой диаграммы запишем в виде

$$T^{(4)}(s, t) = \int dq_1 \frac{V(p_1^2, q_1^2, q_1^2)}{\prod_{i=1}^4 q_i^2 - m_i^2}, \quad (16)$$

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 + p_3)^2.$$

Используя интегральное представление (7), как и в разделе 3, можно показать, что

$$T^{(4)}(s, t) = \int_{a_0}^{\infty} d\mu_1^2 \int_{b_0}^{\infty} d\mu_2^2 \int_0^1 d\alpha \frac{\rho(p_1^2, \mu_1^2, \mu_2^2) \delta\left(1 - \sum_{i=1}^6 \alpha_i\right)}{\{D^{(4)}(\alpha; s, t)\}^4}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} D^{(4)}(s, t; \alpha) = & \alpha_6(\alpha_2 + \alpha_4)s + \alpha_5(\alpha_1 + \alpha_3)t - \alpha_1\mu_1^2 - \\ & - \alpha_2(p_1^2 - \mu_2^2) - \alpha_3m^2 + \alpha_4(p_1^2 - m^2) - \alpha_5m^2 - (\alpha_2 + \alpha_4)^2p_1^2 - \\ & - \alpha_6^2m^2 - \alpha_5(\alpha_2 + \alpha_4)(p_1 - m^2) - \alpha_6(\alpha_2 + \alpha_4)(p_1^2 + m^2). \end{aligned} \quad (18)$$

Доказательство отсутствия комплексных особенностей в $T^{(4)}(s, t)$ сводится к повторению выкладок раздела 3, и поэтому мы его здесь не приводим. Однако отметим, что амплитуда $T_{\text{red}}^{(4)}(s, t)$ диаграммы, которая получается из диаграммы рис. 5 “стягиванием” линий (2, 3) и (5, 6) в точку, имеет такой же знаменатель $D_{\text{red}}^{(4)}(\alpha; s, t)$, как и амплитуда диаграммы четвертого порядка (квадрат) с переменными массами μ_1 и μ_2 . Аналитические свойства этой диаграммы детально изучены Тарским и Владимировым [7, 8]. Воспользовавшись их результатами, легко убедиться, что $T_{\text{red}}^{(4)}(s, t)$ не имеет комплексных особенностей, если $s_2 = \text{Im } s \neq 0$, $t_2 = \text{Im } t \neq 0$.

Таким образом, знание аналитических свойств вершинных амплитуд, а точнее, их интегральных представлений (Мандельстама или Бергмана–Вейля [3]) дает возможность изучать аналитические свойства амплитуд рассеяния и рождения, соответствующих определенным классам диаграмм, в произвольном порядке теории возмущений.

1. Yamamoto K., *Prog. Theor. Phys.*, 1961, **25**, 720.
2. Fronsdal C., Norton R., *J. Math. Phys.*, 1963, **5**, 100.
3. Симонов Ю.А., *ЖЭТФ*, 1962, **43**, 2263.
4. Тодоров И., Препринт ОИЯИ (докторск. диссерт.), 1963.
5. Коломыцев В.И., Фушич В.И., *УМЖ*, 1964, № 4.
6. Nakanisi N., *Sup. Prog. Theor. Phys.*, 1961, № 18, 1.
7. Tarski J., *J. Math. Phys.*, 1960, **1**, 149.
8. Владимиров В.С., *УМЖ*, 1960, № 2.