Аналітичні властивості амплітуд народження і метод Чу–Лоу

В.І. ФУЩИЧ

The author investigated the analytical properties of the contribution to the production amplitude from the diagrams of fig. 1 for the processes $\pi + N \rightarrow N + 2\pi$ (taking into account all possible permutations of external lines). The conditions are presented under which the contribution to the production amplitude from these diagrams are analytical in the region bounded by an extrapolation ellipse. The "threshold" and "triangular" properties of the type 7 diagram are discussed in detail.

Исследуются аналитические свойства вклада в амплитуду рождения от диаграмм рисунка для процесса $\pi + N \rightarrow N + 2\pi$ (с учетом всех возможных перестановок внешних линий). Выписаны условия, при которых вклад в амплитуду рождения от этих диаграмм аналитичен в области, ограниченной эллипсом экстраполяции. Детально рассмотрены "пороговые" и "треугольные" особенности диаграмм типа 7.

В роботі [1] був запропонований метод, за допомогою якого можна знайти, наприклад, повний переріз процесу $\pi + \pi \to \pi + \pi$ (відомо, що безпосередньо виміряти переріз такого процесу в даний час неможливо), знаючи деяку функцію f[t(z)] від повного перерізу непружного процесу $\pi + N \to N + \pi + \pi$. Цей метод базується на екстраполяції функції f[t(z)], яка задається у фізичній області $z \in [-1,1]$, на точки, які знаходяться за межами цього відрізка, до точки $t(z) = \mu^2$, де μ — маса π -мезона. Зрозуміло, що така процедура може бути строго обгрунтована лише в тому випадку, якщо амплітуда народження (або деяка її комбінація) аналітична в області, обмеженій еліпсом з фокусами ±1, і якщо при цьому точка $t(z) = \mu^2$ належить цій області. Далі цей еліпс називатимемо еліпсом екстраполяції.



Український фізичний журнал, 1964, 9, № 3, С. 277-282.

Виходячи з аксіом теорії поля, не вдається довести аналітичність амплітуди народження [2] у вищезгаданій області. Тому цікаво дослідити аналітичні властивості амплітуди народження як функції t для діаграм рисунка. Діаграми цього типу при деяких обмеженнях на маси [3] мажорують всі інші діаграми, якщо інваріанти, від яких залежить внесок в амплітуду народження, дійсні. Природно вважати, що ці діаграми дадуть найближчі особливості не тільки при дійсних t, але й при комплексних. В роботі виписані умови, при яких внесок в амплітуду народження від діаграм рисунка аналітичний в області, обмеженій еліпсом екстраполяції (враховуються всі діаграми, які можна одержати перестановкою зовнішніх ліній). Детально розглядаються "порогові" і "трикутні" особливості діаграми 7.

1. На рисунку зображені діаграми процесу народження псевдоскалярного π -мезона в реакції $N + \pi \rightarrow N + 2\pi$ (всі інші діаграми даного процесу відрізнятимуться від діаграм, наведених на рисунку, тільки перестановкою зовнішніх ліній). Амплітуда такого процесу залежить від п'яти незалежних інваріантів:

$$s_{12} = (p_1 + p_2)^2, \qquad s_{34} = (p_3 + p_4)^2, \qquad s_{45} = (p_4 + p_5)^2, t_{25} = (p_2 - p_5)^2, \qquad t_{13} \equiv t = (p_1 - p_3)^2,$$
(1)

де p_1, p_3 — імпульси нуклона, p_2, p_4, p_5 — імпульси мезонів. Крім цих інваріантів зручно ввести ще п'ять інваріантів: $s_{35}, t_{15}, t_{23}, t_{14}, t_{24}$.

Між цими і незалежними інваріантами можна встановити такі співвідношення:

$$s_{35} = s_{12} - s_{34} - s_{45} + m^2 + 2\mu^2, \qquad t_{15} = s_{34} - s_{12} - t_{25} + m^2 + 2\mu^2, t_{14} = t_{25} - t - s_{34} + 2m^2 + \mu^2, \qquad t_{23} = s_{45} - s_{12} - t + 2m^2 + \mu^2, t_{24} = t - t_{25} - s_{45} + 3\mu^2.$$
(2)

Як відомо, умови Ландау [4] для вищенаведених діаграм мають вигляд

$$\sum_{i=1}^{5} \alpha_i q_i = 0, \tag{3}$$

де q_i — внутрішній імпульс, який зіставляється внутрішній лінії діаграми, взятий на масовій оболонці $q_i^2 = m^2$ (μ^2 або $4\mu^2$). Використовуючи зв'язок між зовнішніми та внутрішніми імпульсами діаграми, одержимо такі рівняння для знаходження особливостей внеску в амплітуду народження від діаграм рисунка, а також від діаграм з переставленими зовнішніми лініями:

$$D_{1i}(s_{12}, s_{34}, s_{45}, t_{25}, t) = 0, \qquad D_{2i}(s_{12}, \dots, t) = 0,$$

$$D_{3i}(s_{12}, \dots, t) = 0, \qquad D_{4i}(s_{12}, \dots, t) = 0, \qquad D_{5i}(s_{12}, \dots, t) = 0,$$

$$D_{6i}(s_{12}, \dots, t) = 0, \qquad D_{7i}(s_{12}, \dots, t) = 0, \qquad i = 1, \dots, 6.$$
(4)

Явні вирази для D_{1i}, \ldots, D_{7i} наведені в додатку.

Особливості діаграм рисунка, згідно з даними [5], можна розділити на: а) "порогові" (точки розгалуження), коли три параметри Фейнмана дорівнюють нулю; в) "трикутні" (точки розгалуження), коли два параметри Фейнмана дорівнюють нулю; с) "квадратні" (точки розгалуження), коли один параметр Фейнмана дорівнює нулю; d) "власні" (полюси), коли жодний з параметрів Фейнмана не дорівнює нулю. **2.** У випадку народження зв'язок між $z = \cos \theta = \frac{\vec{p_1} \vec{p_3}}{|\vec{p_1}||\vec{p_3}|}$ і t буде задаватись таким співвідношенням:

$$z = \frac{t - 2m^2 + 2p_{10}p_{30}}{\sqrt{(p_{10}^2 - m^2)(p_{30}^2 - m^2)}},$$

$$p_{10} = \frac{s_{12} + m^2 - \mu^2}{2\sqrt{s_{12}}}, \qquad p_{30} = \frac{s_{12} - s_{45} + m^2}{2\sqrt{s_{12}}}.$$
(5)

Рівняння еліпса екстраполяції в площині z має вигляд

$$z = \operatorname{ch}(\beta + i\theta), \qquad \beta = \operatorname{arcch} z_{\mu}, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,$$
(6)

$$z_{\mu} = \frac{\mu^2 - 2m^2 + 2p_{10}p_{30}}{\sqrt{(p_{10}^2 - m^2)(p_{30}^2 - m^2)}}.$$
(7)

Оскільки між z і t існує лінійний зв'язок, то еліпс (6) при перетворенні (5) переходить також в еліпс в площині t. Точки перетину цього еліпса з дійсною віссю в площині t такі:

Re
$$t_a = \mu^2$$
, Re $t_b = 4m^2 - \mu^2 - \left(1 + \frac{m^2 - \mu^2}{s_{12}}\right)(s_{12} - s_{45} + m^2)$. (8)

Величина малої півосі еліпса екстраполяції

Im
$$t_c = 2\sqrt{(p_{10}^2 - m^2)(p_{30}^2 - m^2)(z_{\mu}^2 - 1)}.$$
 (9)

Для того, щоб екстраполяцію Чу і Лоу [1] можна було обгрунтувати (якщо обмежитись однополюсною діаграмою [6] та діаграмами рисунка), необхідно, щоб корені рівнянь (4) знаходилися за межами еліпса (6) при умові, що

$$s_{12} > (m+2\mu)^2, \qquad s_{45} > 4\mu^2, \qquad s_{34} > (m+\mu)^2, \qquad t_{25} < 0.$$
 (10)

Виписати обмеження, що накладаються на коефіцієнти рівнянь (4), при яких корені цих рівнянь (відносно t) будуть знаходитися за межами еліпса (6), якщо конкретно не задані значення s_{12} , s_{45} , s_{34} та t_{25} дуже громіздка задача. Тому ми випишемо ці обмеження лише для рівняння $D_{7i} = 0$, вважаючи, що діаграма 7 не має "квадратних" і "власних" особливостей.

"Порогові" особливості знаходитимуться за межами еліпса екстраполяції, якщо

$$t_{25} - s_{34} - (m \pm \mu)^2 + 2m^2 + \mu^2 < \operatorname{Re} t_b,$$

$$s_{45} - s_{12} - (m \pm \mu)^2 + 2m^2 + \mu^2 < \operatorname{Re} t_b.$$
(11)

"Трикутні" особливості будуть в тих точках, для яких

$$A_i^1 t^2 + B_i^1 t + C_i^1 = 0, \qquad A_i^2 t_{14}^2 t_{14}^2 + B_i^2 t_{14} + C_i^2 = 0,$$

$$A_i^3 t_{23}^2 + B_i^3 t_{23} + C_i^3 = 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$
(12)

Явні вирази для А, В і С наведені в додатку.

Випишемо умови того, що "трикутні" особливості не будуть знаходитись в області, обмеженій (6):

$$\operatorname{Re} t^{k} > \operatorname{Re} t_{a}, \qquad 2m^{2} + \mu^{2} + t_{25} - s_{34} - \operatorname{Re} t_{14}^{k} > \operatorname{Re} t_{a}, 2m^{2} + \mu^{2} + s_{45} - s_{12} - \operatorname{Re} t_{23}^{k} > \operatorname{Re} t_{a},$$
(13.1)

або

$$\operatorname{Re} t^{k} < \operatorname{Re} t_{b}, \qquad 2m^{2} + \mu^{2} + t_{25} - s_{34} - \operatorname{Re} t_{14}^{k} < \operatorname{Re} t_{b}, 2m^{2} + \mu^{2} + s_{45} - s_{12} - \operatorname{Re} t_{23}^{k} < \operatorname{Re} t_{b},$$
(13.2)

або

$$|\operatorname{Im} t^k| > \operatorname{Im} t_c, \qquad |\operatorname{Im} t_{14}^k| > \operatorname{Im} t_c, \qquad |\operatorname{Im} t_{23}^k| > \operatorname{Im} t_c, \qquad (13.3)$$

де t^k , t^k_{14} , t^k_{23} — корені рівнянь (12). Таким чином, внесок в амплітуду народження від усіх діаграм типу 7 не буде мати "порогових" і "трикутних" особливостей всередині еліпса (6), якщо мають місце співвідношення (11) і (13).

Для одержання умов того, що "квадратні" та "власні" особливості не знаходяться всередині еліпса екстраполяції, потрібно обчислити детермінанти четвертого і п'ятого порядку (див. додаток (Д.1)) і провести аналогічні міркування, як і у випадку "порогових" і "трикутних" особливостей.

Додаток

Наведемо вирази для
$$D_{1i}, \dots, D_{7i}$$
:

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 2\mu^2 & 4\mu^2 & -\mu^2 & 5\mu^2 - t & 2\mu^2 - t_{25} \\ 4\mu^2 & 8\mu^2 & s_{12} - m^2 - \mu^2 & 8\mu^2 - s_{45} & 4\mu^2 \\ -\mu^2 & s_{12} - m^2 - \mu^2 & 2m^2 & -4\mu^2 & s_{34} - m^2 - \mu^2 \\ 5\mu^2 - t & 8\mu^2 - s_{45} & -4\mu^2 & 8\mu^2 & 4\mu^2 \\ 2\mu^2 - t_{25} & 4\mu^2 & s_{34} - m^2 - \mu^2 & 4\mu^2 & 2\mu^2 \end{vmatrix} \end{vmatrix},$$

$$D_{21} = \begin{vmatrix} 8\mu^2 & 4\mu^2 & -4\mu^2 & 5\mu^2 - t & 8\mu^2 - t_{25} \\ 4\mu^2 & 2\mu^2 & s_{12} - m^2 - \mu^2 & 2\mu^2 - s_{45} & 4\mu^2 \\ -4\mu^2 & s_{12} - m^2 - \mu^2 & 2m^2 & -\mu^2 & s_{34} - m^2 - 4\mu^2 \\ 5\mu^2 - t & 2\mu^2 - s_{45} & -\mu^2 & 2\mu^2 & 4\mu^2 \\ 8\mu^2 - t_{25} & 4\mu^2 & s_{34} - m^2 - 4\mu^2 & 4\mu^2 & 8\mu^2 \end{vmatrix} \end{vmatrix},$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & t_{23} - m^2 - \mu^2 & t_{15} - m^2 - 4\mu^2 & -\mu^2 \\ 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 & -\mu^2 & 2\mu^2 & 4\mu^2 & s_{12} - m^2 - \mu^2 \\ t_{23} - m^2 - \mu^2 & 2\mu^2 & 4\mu^2 & 8\mu^2 & 4\mu^2 \\ -\mu^2 & s_{12} - m^2 - \mu^2 & 2\mu^2 - s_{45} & 4\mu^2 & 2\mu^2 - s_{45} \\ t_{15} - m^2 - 4\mu^2 & s_{34} - m^2 - 4\mu^2 & 4\mu^2 & 8\mu^2 & 4\mu^2 \\ -\mu^2 & s_{12} - m^2 - \mu^2 & 2\mu^2 - s_{45} & 4\mu^2 & 2\mu^2 \\ D_{41} = \begin{vmatrix} 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 - -\mu^2 & 4\mu^2 & 8\mu^2 - 4\mu^2 \\ t_{23} - m^2 - 4\mu^2 & -4\mu^2 & 8\mu^2 & 4\mu^2 & 8\mu^2 - s_{45} \\ t_{15} - m^2 - 4\mu^2 & -4\mu^2 & 8\mu^2 & 4\mu^2 & 8\mu^2 - s_{45} \\ t_{15} - m^2 - 4\mu^2 & -4\mu^2 & 8\mu^2 & 4\mu^2 & 8\mu^2 - s_{45} \\ t_{15} - m^2 - 4\mu^2 & -4\mu^2 & 8\mu^2 & 4\mu^2 & 8\mu^2 - s_{45} \\ t_{15} - m^2 - 4\mu^2 & s_{34} - m^2 - \mu^2 & 4\mu^2 & 8\mu^2 - s_{45} \\ t_{15} - m^2 - 4\mu^2 & s_{34} - m^2 - \mu^2 & 4\mu^2 & 8\mu^2 - s_{45} \\ t_{15} - m^2 - 4\mu^2 & s_{34} - m^2 - \mu^2 & 4\mu^2 & 8\mu^2 - s_{45} \\ t_{15} - m^2 - 4\mu^2 & s_{34} - m^2 - \mu^2 & 4\mu^2 & 8\mu^2 - s_{45} \\ t_{15} - m^2 - 4\mu^2 & s_{34} - m^2 - \mu^2 & 4\mu^2 & 8\mu^2 - s_{45} \\ t_{15} - m^2 - 4\mu^2 & s_{34} - m^2 - \mu^2 & 4\mu^2 & 8\mu^2 - s_{45} \\ t_{15} - m^2 - 4\mu^2 & s_{12} - m^2 - 4\mu^2 & 8\mu^2 - s_{45} \\ t_{15} - m^2 - 4\mu^2 & s_{12} - m^2 - 4\mu^2 & 8\mu^2 - s_{45} \\ t_{15} - m^2 - 4\mu^2 & s_{12} - m^2 - 4\mu^2 & 8\mu^2 - s_{45} \\ t_{15} - m^2 - 4\mu^2 & s_{12} - m^2 - 4\mu^2 & 8\mu^2 - s_{45} \\ t_{15} - m^2 - 4\mu^2 & s_{12} - m^2 - 4\mu^2 & 8\mu^2 \\ t_{15} - t_{15} - t_{15} - t_{15} - t_$$

$$D_{51} = \begin{vmatrix} 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 - t_{24} & t_{15} - m^2 - \mu^2 & -4\mu^2 \\ 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 & 2m^2 & -\mu^2 & s_{34} - m^2 - 4\mu^2 \\ 2m^2 - t_{24} & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 & -\mu^2 & s_{35} - m^2 - 4\mu^2 \\ t_{15} - m^2 - \mu^2 & s_{34} - m^2 - \mu^2 & -\mu^2 & 2\mu^2 & 4\mu^2 \\ -4\mu^2 & s_{12} - m^2 - \mu^2 & s_{35} - m^2 - \mu^2 & 4\mu^2 & 8\mu^2 \end{vmatrix} \end{vmatrix},$$

$$D_{61} = \begin{vmatrix} 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 - t_{24} & t_{15} - m^2 - 4\mu^2 & -\mu^2 \\ 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 - \mu^2 & s_{34} - m^2 - 4\mu^2 & s_{12} - m^2 - \mu^2 \\ 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 - -4\mu^2 & 8\mu^2 & 4\mu^2 \\ -\mu^2 & s_{12} - m^2 - \mu^2 & s_{35} - m^2 - \mu^2 & 8\mu^2 & 4\mu^2 \\ -\mu^2 & s_{12} - m^2 - \mu^2 & s_{35} - m^2 - \mu^2 & 4\mu^2 & 2\mu^2 \\ 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 - t_{25} & 2m^2 - t_{27} & 4\mu^2 & 2\mu^2 \\ 2m^2 - t_{25} & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 - s_{45} & s_{12} - m^2 - \mu^2 \\ 2m^2 - t_{25} & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 - \mu^2 & 2\mu^2 - s_{45} \\ 2m^2 - t & 2m^2 - s_{45} & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 - \mu^2 & 2\mu^2 \\ -\mu^2 & s_{12} - m^2 - \mu^2 & s_{34} - m^2 - \mu^2 & 2\mu^2 \\ -\mu^2 & s_{12} - m^2 - \mu^2 & s_{34} - m^2 - \mu^2 & 2\mu^2 \\ D_{12} = D_{11}(t_{25} \rightarrow t_{24}, s_{34} \rightarrow s_{45}), \quad D_{13} = D_{11}(s_{12} \rightarrow t_{15}, s_{45} \rightarrow t_{24}), \\ D_{14} = D_{12}(s_{12} \rightarrow t_{14}, s_{45} \rightarrow t_{25}), \quad D_{15} = D_{13}(t_{25} \rightarrow s_{45}, s_{34} \rightarrow t_{23}), \quad (II.1.1)$$

 $D_{16} = D_{15}(t_{15} \to t_{14}, \ t_{24} \to t_{25}).$

Вирази для D_{22}, \ldots, D_{26} одержуються D_{21} точно такою ж заміною (стрілка означає відповідну заміну), як і вирази для D_{12}, \ldots, D_{16} з D_{11} .

 $D_{32} = D_{31}(t_{15} \to t_{14}, s_{34} \to s_{35}),$ $D_{33} = D_{31}(t_{23} \to s_{34}, t_{15} \to s_{12}, s_{34} \to s_{35}, s_{12} \to t_{14}, s_{45} \to t_{25}),$ $D_{34} = D_{31}(t_{23} \to s_{34}, s_{34} \to t_{23}, s_{12} \to t_{14}, s_{45} \to t_{25}),$ $D_{35} = D_{31}(t_{23} \to s_{35}, t_{15} \to t_{14}, s_{34} \to t_{23}, s_{12} \to t_{15}, s_{45} \to t_{24}),$ $D_{36} = D_{31}(t_{23} \to s_{35}, t_{15} \to s_{12}, s_{12} \to t_{15}, s_{45} \to t_{24}).$ (Д.1.2)

Вирази для D_{42},\ldots,D_{46} одержуються D_{41} точно такою ж заміною, як і вирази для D_{32},\ldots,D_{36} з $D_{31}.$

$$D_{52} = D_{51}(t_{24} \to t_{25}, t_{15} \to t_{14}, s_{34} \to s_{35}, s_{35} \to s_{34}),$$

$$D_{53} = D_{51}(s_{34} \to t_{23}, s_{12} \to t_{14}),$$

$$D_{54} = D_{51}(t_{24} \to t_{25}, t_{15} \to t_{14}, s_{34} \to t_{23}, s_{12} \to t_{15}, s_{35} \to s_{34}),$$

$$D_{55} = D_{51}(t_{24} \to s_{45}, t_{15} \to s_{12}, s_{12} \to t_{15}, s_{35} \to t_{23}),$$

$$D_{56} = D_{51}(t_{24} \to s_{45}, t_{15} \to s_{12}, s_{34} \to s_{35}, s_{12} \to t_{14}, s_{35} \to t_{23}).$$
(Д.1.3)

Вирази для D_{62},\ldots,D_{66} одержуються з D_{61} точно такою ж заміною, як і вирази для D_{52},\ldots,D_{56} з $D_{51}.$

$$D_{72} = D_{71}(t_{25} \to t_{24}, s_{34} \to s_{35}), \qquad D_{73} = D_{71}(s_{45} \to t_{24}, s_{12} \to t_{15}),$$

$$D_{74} = D_{71}(t_{25} \to t_{24}, s_{45} \to t_{25}, s_{12} \to t_{14}, s_{34} \to s_{35}),$$

$$D_{75} = D_{71}(t_{25} \to s_{45}, s_{12} \to t_{15}, s_{45} \to t_{24}, s_{34} \to t_{23}),$$

$$D_{76} = D_{71}(t_{25} \to s_{45}, s_{45} \to t_{25}, s_{12} \to t_{14}, s_{34} \to t_{23}).$$
(Д.1.4)

Явні вирази для А, В і С мають вигляд:

$$A_i^1 = A_i^2 = A_i^3 = 1, \qquad B_1^1 = -4m^2 + \frac{(2m^2 - \mu^2)(2m^2 - t_{25})}{m^2},$$

$$\begin{split} C_1^1 &= (\mu^2 - t_{25})^2, \qquad B_2^1 = -4m^2 + 3\mu^2 - t_{25} - s_{45}, \\ C_2^1 &= 2m^2(t_{25} + s_{45} - 3\mu^2) + m^2\mu^2 + \frac{m^2}{\mu^2}(t_{25} + s_{45} - 3\mu^2)^2, \\ B_3^1 &= -4m^2 + \frac{(s_{45} - \mu^2)(\mu^2 - t_{25})}{\mu^2}, \qquad C_3^1 = \frac{m^2}{\mu^2}(2\mu^2 - s_{45} - t_{25})^2, \\ B_1^2 &= -2(m^2 + \mu^2) + \frac{\mu^2}{m^2}(2m^2 - \mu^2), \qquad B_2^2 = -2(m^2 + \mu^2) - \frac{(t_{25} - \mu^2)(s_{35} - m^2)}{\mu^2}, \\ C_1^2 &= (m^2 - \mu^2)^2 + \mu^4 - \frac{\mu^2}{m^2}(2m^2 - \mu^2)(m^2 + \mu^2) + \frac{\mu^2}{m^2}(2m^2 - \mu^2)^2, \\ C_2^2 &= (m^2 - \mu^2)^2 + \frac{(t_{25} - \mu^2)(s_{35} - m^2)(m^2 + \mu^2)}{\mu^2} + \frac{m^2}{\mu^2}(s_{35} - m^2)^2 + (t_{25} - \mu^2)^2, \\ B_3^2 &= -2(m^2 + \mu^2) + \frac{\mu^2(2m^2 - t_{25})}{m^2}, \qquad B_1^3 = -2(m^2 + \mu^2) + \frac{\mu^2(2m^2 - \mu^2)}{m^2}, \\ C_3^2 &= (m^2 - \mu^2)^2 + \mu^4 - \frac{\mu^2(2m^2 - t_{25})(m^2 + \mu^2)}{m^2} + \frac{\mu^2(2m^2 - t_{25})^2}{m^2}, \\ C_1^3 &= (m^2 - \mu^2)^2 + \mu^4 - \frac{\mu^2(2m^2 - \mu^2)(m^2 + \mu^2)}{m^2} + \frac{\mu^2(2m^2 - t_{25})^2}{m^2}, \\ C_2^3 &= (m^2 - \mu^2)^2 + (\frac{t_{15} - m^2)(s_{45} - \mu^2)(m^2 + \mu^2)}{m^2} + \frac{m^2}{m^2}(s_{45} - \mu^2)^2 + (t_{15} - m^2)^2, \\ B_2^3 &= -2(m^2 + \mu^2) - \frac{(t_{15} - m^2)(s_{45} - m^2)}{\mu^2}, \qquad B_3^3 = B_3^2(t_{25} \rightarrow s_{45}), \quad C_3^3 = C_3^2(t_{25} \rightarrow s_{45}). \end{split}$$

Примітка при коректурі. Після того, як робота була здана до друку, ми, використовуючи рівняння Ландау і теореми Гурвіца про корені многочленів, знайшли достаті умови, при яких особливості довільної діаграми лежать за межами еліпса екстраполяції.

- 1. Chew G., Low F., Phys. Rev., 1959, 113, 1640.
- 2. Ascoli R., Minguzzi A., Phys. Rev., 1960, 118, 1935.
- 3. Wu T.T., Phys. Rev., 1961, 123, 673.
- 4. Ландау Л.Д., ЖЭТФ, 1959, **37**, 62.
- 5. Cook L., Tarski J., J. Math. Phys., 1962, 3, 1.
- 6. Фущич В.И., Укр. мат. журн., 1963, 15, № 2, 227.