

Про полюси амплітуди народження для процесу $\pi + d \rightarrow d + \pi + \pi$

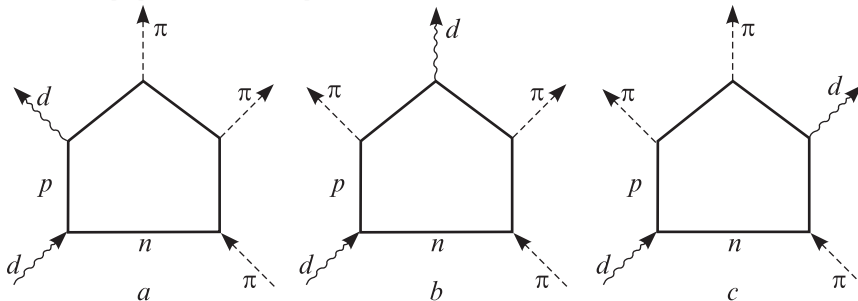
В.І. ФУЩИЧ

The author studies the contribution poles in the generation amplitude from the diagrams of the drawing, as well as from diagrams obtained from the diagrams of the drawing by transposing the external meson lines, for the process $\pi + d \rightarrow d + \pi + \pi$ in respect to the invariant t_{13} . Values are found for other invariants (s_{12} , s_{34} , s_{45} and t_{25}) with which the poles lie close to the physical region.

Исследуются полюса вклада в амплитуду рождения от диаграмм рисунка, а также от диаграмм, которые получают из диаграмм рисунка перестановкой внешних мезонных линий, для процесса $\pi + d \rightarrow d + \pi + \pi$ относительно инварианта t_{13} . Найдены значения других инвариантов (s_{12} , s_{34} , s_{45} и t_{25}), при которых полюса лежат вблизи физической области.

З робіт Ландау і Каткосського [1, 2] випливає, що вклад в амплітуду народження від діаграм, зображених на рисунку, має прості полюси відносно одного з інваріантів (наприклад, t_{13}), від яких залежить амплітуда, коли жодний з параметрів Фейнмана не дорівнює нулю.

Оскільки амплітуда має полюси, то природно припустити, що їх можна експериментально виявити. Так, наприклад, вони можуть впливати на величину експериментально вимірюваного перерізу процесів народження (звичайно, при цьому припускається, що “справжня” амплітуда відповідних процесів має такі ж особливості, як і амплітуда в теорії збурень). Іден [3] запропонував дослідити з цією метою процес $\pi + d \rightarrow d + \pi + \pi$. Такий вибір пов’язаний з тим, що амплітуда такого процесу не має полюсів типу Чу–Лоу [4] (в точці $t = \mu^2$) і цим самим полегшує інтерпретацію експериментальних даних.



Щоб експериментально виявити вплив полюсів на величину перерізів вищезазначеного процесу, необхідно детально дослідити їх положення (в площині t) і вказати, при накладанні яких умов на інші інваріанти можна чекати експериментального ефекту. Далі ми проведемо таке дослідження. Кук і Тарський [5] знайшли положення полюса відносно одного інваріанта для діаграми a (не враховуючи діаграм, які одержуються з діаграми a перестановкою мезонних ліній) при конкретних значеннях інших інваріантів.

1. Як відомо, амплітуда простого процесу народження залежить від п'яти незалежних інваріантів. Виберемо такі незалежні інваріанти:

$$\begin{aligned} s_{12} &= (p_1 + p_2)^2, & s_{34} &= (p_3 + p_4)^2, & s_{45} &= (p_4 + p_5)^2, \\ t_{25} &= (p_2 - p_5)^2, & t_{13} &\equiv t = (p_1 - p_3)^2, \end{aligned} \quad (1)$$

де p_1, p_3 — імпульси дейтрона, p_2, p_4 та p_5 — імпульси мезонів. Крім цих інваріантів зручно ввести ще п'ять інваріантів: $s_{35} = (p_3 + p_5)^2$, $t_{15} = (p_1 - p_5)^2$, $t_{23} = (p_2 - p_3)^2$, $t_{14} = (p_1 - p_4)^2$ та $t_{24} = (p_2 - p_4)^2$. Між цими і незалежними інваріантами можна встановити такі співвідношення:

$$\begin{aligned} s_{35} &= s_{12} - s_{34} - s_{45} + M^2 + 2\mu^2, & t_{15} &= s_{34} - s_{12} - t_{25} + M^2 + 2\mu^2, \\ t_{14} &= t_{25} - t - s_{34} + 2M^2 + \mu^2, & t_{23} &= s_{45} - s_{12} - t + 2M^2 + \mu^2, \\ t_{24} &= t - t_{25} - s_{45} + 3\mu^2, \end{aligned} \quad (2)$$

де M — маса дейтрона, μ — маса π -мезона.

Будемо досліджувати положення полюсів відносно змінної t . Зрозуміло, що полюс лежить поза фізичною областю зміни інваріанта t , а саме, поза відрізком $[t^-, t^+]$ (випадок, коли полюс лежить всередині цього відрізка, означає, що він знаходиться не на фізичному листі), де

$$\begin{aligned} t^- &= 2(M^2 - p_{10}p_{30}) - \sqrt{(p_{10}^2 - M^2)(p_{30}^2 - M^2)}, \\ t^+ &= 2(M^2 - p_{10}p_{30}) + \sqrt{(p_{10}^2 - M^2)(p_{30}^2 - M^2)}, \\ p_{10} &= \frac{s_{12} + M^2 - \mu^2}{2\sqrt{s_{12}}}, & p_{30} &= \frac{s_{12} - s_{45} + M^2}{2\sqrt{s_{12}}}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$p_{20} = \frac{s_{12} - M^2 + \mu^2}{2\sqrt{s_{12}}}, \quad p_{50} = \frac{s_{12} - s_{34} + \mu^2}{2\sqrt{s_{12}}}. \quad (4)$$

Отже, полюс може впливати на величину перерізу, якщо він лежить на дійсній осі ($\text{Re } t$) і поблизу відрізка $[t^-, t^+]$.

2. Умови Ландау [1] для вищенаведених діаграм мають такий вигляд:

$$\sum_{i=1}^5 \alpha_i q_i = 0, \quad (5)$$

де q_i — імпульс, взятий на масовій оболонці $q_i^2 = m^2$ (m — маса нуклона), який зіставляється внутрішній лінії діаграми. Використовуючи зв'язок між зовнішніми та внутрішніми імпульсами діаграм, одержимо рівняння для знаходження положення полюсів вкладу в амплітуду народження від діаграм, зображених на рисунку, а також від діаграм, які одержуються з діаграм рисунка перестановкою мезонних ліній:

$$\begin{aligned} D_{1i}(s_{12}, s_{34}, s_{45}, t_{25}, t) &= 0, & D_{2i}(s_{12}, \dots, t) &= 0, \\ D_{3i}(s_{12}, \dots, t) &= 0, & i &= 1, \dots, 6. \end{aligned} \quad (6)$$

Явні вирази для D_{1i} , D_{2i} , D_{3i} наведені в додатку.

Тепер знайдемо положення полюсів, зумовлених вкладом в амплітуду від діаграм a , b , c ; ці полюси будуть в точках

$$\begin{aligned} t_{11}^k &= 2m^2 + \frac{A_{11}^{12} \pm \sqrt{A_{11}^{11}A_{11}^{22}}}{D_{11}^{1,2}}, \\ t_{21}^k &= 2m^2 - 3\mu^2 + t_{25} + s_{45} + \frac{A_{21}^{12} \pm \sqrt{A_{21}^{11}A_{21}^{22}}}{D_{21}^{1,2}}, \\ t_{31}^k &= 2M^2 - 2m^2 + \mu^2 + s_{45} - s_{12} + \frac{A_{31}^{12} \pm \sqrt{A_{31}^{11}A_{31}^{22}}}{D_{31}^{1,2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Явні вирази для $A_{11}^{11}, \dots, A_{31}^{22}$, та $D_{11}^{1,2}, \dots, D_{31}^{1,2}$ наведені в додатку (див. формули (Д6)–(Д8)).

З (7) випливає, що корені рівнянь для D_{11} , D_{21} , D_{31} будуть дійсні, якщо

$$A_{11}^{11}A_{11}^{22} \geq 0, \quad A_{21}^{11}A_{21}^{22} \geq 0, \quad A_{31}^{11}A_{31}^{22} \geq 0. \quad (8)$$

Крім цього з (7) видно, що при збільшенні s_{12} полюси віддаляються від фізичної області. Отже, полюси амплітуди народження будуть розташовані поблизу (на відстані порядку m^2) фізичної області (відносно t) при малих значеннях s_{12} , а саме, коли $s_{12} \sim 10m^2$.

s_{12}	s_{34}	s_{45}	t_{25}	t^-	t^+	t_{11}^k	t_{21}^k	t_{31}^k
9,2	5	0,2	-0,2	-2,610	-0,0454	4,08	3,94	-7,395
						4,55	8,01	-5,212
9,4	5	0,3	-0,2	-2,730	-0,0140	4,06	4,06	-8,158
						4,62	8,04	-5,304
9,6	5	0,4	-0,3	-2,715	-0,030	4,10	4,08	-8,695
						4,91	7,74	-5,520
10	5	0,5	-0,3	-2,696	-0,052	4,09	4,21	-9,828
						4,95	7,90	-6,131

В таблиці наведені значення $t_{11}^k, t_{21}^k, t_{31}^k$ (в одиницях мас нуклона) при $s_{12} \sim 10$, а всі інші інваріанти фіксовані у фізичній області, тобто виконуються умови

$$s_{34} > (M + \mu)^2, \quad s_{45} > 4\mu^2, \quad t_{25} < 0. \quad (9)$$

Верхні цифри у стовпцях 7–9 таблиці відповідають значенням t_{11}^k, t_{21}^k і t_{31}^k із знаком плюс перед коренем в (7), а нижні — із знаком мінус перед коренем в (7).

Таким чином, крива залежності експериментально вимірюваного перерізу $\pi + d \rightarrow d + \pi + \pi$ від $\cos \theta = \frac{\bar{p}_1 \bar{p}_3}{|\bar{p}_1| |\bar{p}_3|}$ ($\cos \theta$ — лінійна функція t) повинна зростати, якщо $\theta \rightarrow 180^\circ$ (або 0°) і інші інваріанти такі: $s_{12} \sim 10$, $s_{45} \sim 0,4$, $s_{34} \sim 5$, $t_{25} \sim -0,2$.

Додаток

Наведемо явні вирази D_{1i}, D_{2i}, D_{3i} :

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 2m^2 & 2m^2 - t & 2m^2 - t_{25} & 2m^2 - \mu^2 & M^2 - 2m^2 \\ 2m^2 - t & 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 - s_{45} & M^2 - 2m^2 \\ 2m^2 - t_{25} & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & s_{34} - 2m^2 \\ 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 - s_{45} & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 & s_{12} - 2m^2 \\ M^2 - \mu^2 & M^2 - 2m^2 & s_{34} - 2m^2 & s_{12} - 2m^2 & 2m^2 \end{vmatrix}, \quad (Д1)$$

$$\begin{aligned}
D_{12} &= D_{11}(t_{25} \rightarrow t_{21}, s_{34} \rightarrow s_{35}), \\
D_{13} &= D_{11}(s_{12} \rightarrow t_{15}, s_{45} \rightarrow t_{24}), \\
D_{14} &= D_{11}(t_{25} \rightarrow t_{24}, s_{12} \rightarrow t_{14}, s_{45} \rightarrow t_{25}, s_{34} \rightarrow s_{35}), \\
D_{15} &= D_{11}(t_{25} \rightarrow s_{45}, s_{12} \rightarrow t_{15}, s_{45} \rightarrow t_{25}, s_{34} \rightarrow t_{23}), \\
D_{16} &= D_{11}(t_{25} \rightarrow t_{45}, s_{12} \rightarrow t_{14}, s_{45} \rightarrow t_{25}, s_{34} \rightarrow t_{23}), \\
D_{21} &= \begin{vmatrix} 2m^2 & 2m^2 - t_{24} & 2m^2 - \mu^2 & t_{15} - 2m^2 & M^2 - 2m^2 \\ 2m^2 - t_{24} & 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & M^2 - 2m^2 & s_{35} - 2m^2 \\ 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 & s_{34} - 2m^2 & s_{12} - 2m^2 \\ t_{15} - 2m^2 & M^2 - 2m^2 & s_{34} - 2m^2 & 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 \\ M^2 - 2m^2 & s_{35} - 2m^2 & s_{12} - 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 \end{vmatrix}, \quad (\text{Д2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{22} &= D_{21}(t_{24} \rightarrow t_{25}, t_{15} \rightarrow t_{14}, s_{34} \rightarrow s_{35}, s_{35} \rightarrow s_{34}), \\
D_{23} &= D_{21}(s_{34} \rightarrow t_{23}, s_{12} \rightarrow t_{14}), \\
D_{24} &= D_{21}(t_{24} \rightarrow t_{25}, t_{15} \rightarrow t_{14}, s_{34} \rightarrow t_{23}, s_{12} \rightarrow s_{15}, s_{35} \rightarrow s_{34}), \\
D_{25} &= D_{21}(t_{24} \rightarrow s_{45}, t_{15} \rightarrow s_{12}, s_{12} \rightarrow t_{15}, s_{35} \rightarrow t_{23}), \\
D_{26} &= D_{21}(t_{24} \rightarrow s_{45}, t_{15} \rightarrow s_{12}, s_{34} \rightarrow s_{35}, s_{12} \rightarrow t_{14}, s_{35} \rightarrow t_{23}), \\
D_{31} &= \begin{vmatrix} 2m^2 & t_{23} - 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & t_{15} - 2m^2 & M^2 - 2m^2 \\ t_{23} - 2m^2 & 2m^2 & M^2 - 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 - s_{45} \\ 2m^2 - \mu^2 & M^2 - 2m^2 & 2m^2 & s_{34} - 2m^2 & s_{12} - 2m^2 \\ t_{15} - 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & s_{34} - 2m^2 & 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 \\ M^2 - 2m^2 & 2m^2 - s_{45} & s_{12} - 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 \end{vmatrix}, \quad (\text{Д3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{32} &= D_{31}(t_{15} \rightarrow t_{14}, s_{34} \rightarrow s_{35}), \\
D_{33} &= D_{31}(t_{23} \rightarrow s_{34}, t_{15} \rightarrow s_{12}, s_{34} \rightarrow s_{35}, s_{12} \rightarrow t_{14}, s_{45} \rightarrow t_{25}), \\
D_{34} &= D_{31}(t_{23} \rightarrow s_{34}, s_{34} \rightarrow t_{23}, s_{12} \rightarrow t_{14}, s_{45} \rightarrow t_{25}), \\
D_{35} &= D_{31}(t_{23} \rightarrow s_{35}, t_{15} \rightarrow t_{14}, s_{34} \rightarrow t_{23}, s_{12} \rightarrow t_{15}, s_{45} \rightarrow t_{24}), \\
D_{36} &= D_{31}(t_{23} \rightarrow s_{35}, t_{15} \rightarrow s_{12}, s_{12} \rightarrow t_{15}, s_{45} \rightarrow t_{24}),
\end{aligned}$$

Стрілки означають відповідну заміну.

Зазначимо, що всі детермінанти симетричні і, крім того, змінна t входить у детермінанти D_{11} , D_{21} , D_{31} (враховуючи співвідношення (2)) у лівий верхній кут. Саме це і дає можливість досить просто знайти корені рівняння (6) при $i = 1$, якщо використати таку детермінантну тотожність [6] (див. додаток):

$$D_{11}^{1,2} D_{11} = A_{11}^{11} A_{11}^{22} - (A_{11}^{12})^2, \quad (\text{Д4})$$

де

$$D_{11} = a_{11}(2m^2 - t)^2 + b_{11}(2m^2 - t) + c_{11},$$

$D_{11}^{1,2}$ — детермінант, який одержується з (Д1), якщо викреслити в цьому детермінанті перші два рядки і перші два стовпці; $(-1)^{i+j} A_{11}^{ij}$ — детермінант, який одержується з (Д1), якщо в ньому викреслити i -й рядок та j -й стовпчик.

з (Д4) випливає, що

$$a_{11} = -D_{11}^{1,2}, \quad b_{11} = -2A_{11}^{12} \quad (t = 2m^2), \quad b_{11}^2 - 4a_{11}c_{11} = 4A_{11}^{11}A_{11}^{22}. \quad (\text{Д5})$$

Аналогічні співвідношення можна записати для D_{21} та D_{31} .

Використовуючи співвідношення (Д4), (Д5), можна одержати такі вирази для $A_{11}^{11}, \dots, A_{31}^{22}$ та $D_{11}^{1,2}, D_{21}^{1,2}, D_{31}^{1,2}$:

$$\begin{aligned} A_{11}^{11} &= s_{45}(s_{34} - 4m^2)[4m^2(s_{12} - s_{34}) + s_{34}s_{45}]; \\ A_{11}^{22} &= (s_{12} - 4m^2)t_{25}[s_{12}t_{25} - 4m^2(s_{12} - s_{34})]; \\ A_{11}^{12} &= 2m^2(s_{12} - s_{34})[2m^2(s_{34} - 4m^2) - (s_{12} - 4m^2)(2m^2 - t_{25})] + \\ &\quad + s_{45}[t_{25}(s_{12} - 4m^2)(s_{34} - 4m^2) + 2m^2(s_{34} - 4m^2)(s_{34} + t_{25} - s_{12})]; \end{aligned} \quad (\text{Д6})$$

$$\begin{aligned} A_{21}^{11} &= (s_{34} - 4m^2)(s_{35} - 4m^2)[2m^2(s_{34} - 2s_{12} + 2s_{35} - 4m^2) + \\ &\quad + (s_{34} - 4m^2)(s_{35} - 2m^2)]; \\ A_{21}^{22} &= (s_{12} - 4m^2)(t_{15} - 4m^2)[2m^2(s_{12} - 2s_{34} + 2t_{15} - 4m^2) + \\ &\quad + (t_{15} - 2m^2)(s_{12} - 2m^2)]; \end{aligned} \quad (\text{Д7})$$

$$\begin{aligned} A_{21}^{12} &= (4m^2 - t_{15})[(s_{12} - 2m^2)(s_{34} - 4m^2)(4m^2 - s_{35}) + \\ &\quad + 2m^2(s_{12} - 4m^2)(s_{12} - s_{34} - s_{35} + 4m^2)] + 2m^2(s_{34} - s_{12}) \times \\ &\quad \times [2m^2(s_{12} - 4m^2) - (s_{35} - 2m^2)(s_{34} - 4m^2)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{31}^{11} &= s_{45}(s_{34} - 4m^2)[(s_{45} - 2m^2)(s_{34} - 4m^2) + \\ &\quad + 2m^2(2s_{12} + 2s_{45} - s_{34} - 4m^2)]; \\ A_{31}^{22} &= A_{21}^{22}; \\ A_{31}^{12} &= (4m^2 - t_{15})[s_{45}(s_{34} - 4m^2)(s_{12} - 2m^2) + 2m^2(s_{12} - 4m^2) \times \\ &\quad \times (s_{12} + s_{45} - s_{34})] - 2m^2(s_{12} - s_{34})(2m^2(s_{12} - 4m^2) + \\ &\quad + (s_{34} - 4m^2)(s_{45} - 2m^2)]; \end{aligned} \quad (\text{Д8})$$

$$D_{11}^{1,2} = D_{21}^{1,2} = D_{31}^{1,2} = -2m^2(s_{12} - s_{34})^2.$$

При обчисленні $t_{11}^k, t_{21}^k, t_{31}^k$ ми прийняли, що

$$M = 2m, \quad \text{а} \quad 2m^2 + \mu \cong 2m^2.$$

1. Landau L.D., *Nucl. Phys.*, 1959, **13**, 181.
2. Cutkasky L.F., *J. Math. Phys.*, 1960, **1**, 429.
3. Eden R.J., Proceedings of the 1960 Annual International Conference on High-Energy Physics at Rochester, P. 219.
4. Chew G.F., Low F.E., *Phys. Rev.*, 1959, **113**, 1640.
5. Cook L.F., Tarski J., *J. Math. Phys.*, 1962, **3**, 1.
6. Tarski J., *J. Math. Phys.*, 1960, **1**, 149.