Аналітичні властивості узагальнених петльових діаграм

В.І. ФУЩИЧ

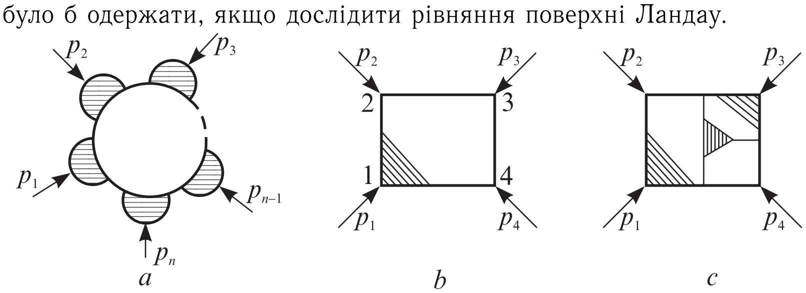
A method is proposed for finding the singularity surface for diagrams of fig. 1 type. An equation is obtained for the singularity surface for diagrams of type b in any order of the theory of perturbations. The equation of the singularity surface is obtained, using the integral reprsentation for the vertex of functions [2] and [3], as well as Landau's condition.

Пропонується метод знаходження поверхні сингулярності для діаграм, що наведені на рисунку. Отримано рівняння поверхні сингулярності для діаграм типу b в довільному порядку теорії збурень. Рівняння поверхні сингулярності ми отримали, використовуючи інтегральне представлення для вершинної функции [2] і [3], а також умову Ландау.

Для знаходження сингулярностей внеску в амплітуду розсіювання або породження від довільної діаграми Фейнмана доводиться розв'язувати рівняння Ландау. Така задача досить легко розв'язується для простих діаграм. Однак для діаграм з великим числом внутрішніх ліній рівняння Ландау практично не можна розв'язати. Тому постає питання: як одержати рівняння поверхні сингулярності діаграми Фейнмана в довільному порядку теорії збурень?

У зв'язку з цим слід відмітити роботу [1], де одержано параметричні рівняння поверхні сингулярності для власних особливостей діаграми, виходячи з рівнянь Ландау.

В даній статті пропонується метод, за допомогою якого можна одержати рівняння поверхні сингулярності для узагальнених петльових діаграм (рисунок) в довільному порядку теорії збурень. Відмітимо, що область аналітичності, яку можна одержати з цього рівняння, буде меншою, ніж область аналітичності, яку можна було б одержати, якщо дослідити рівняння поверхні Ландау.



Для простоти розглянемо діаграму b. Всі міркування, приведені для цієї діаграми, як буде видно нижче, легко переносяться на діаграми з числом зовнішніх ліній більше ніж чотири, тобто на діаграми типа a.

Доповіді Академії наук України, 1964, № 1, С. 7–9.

Припустимо, що всі частинки — бозони, і в кожному вузлі діаграми сходяться три лінії. Вклад в амплітуду розсіювання від діаграми b запишемо в такому вигляді:

$$T^{(4)} = \int dq_1 \prod_{i=1}^{4} \frac{V_1\left(M_1^2, q_1^2, q_4^2\right)}{q_i^2 - m_i^2}, \tag{1}$$

де $V_1\left(M_1^2, q_1^2, q_4^2\right)$ — вершинна функція, яка зіставляється з вершиною *1*; $M_i^2 = p_i^2$. Далі використаємо інтегральне зображення для $V_1\left(M_1^2, q_1^2, q_4^2\right)$ яке було одержано в роботах [2] і [3]. Тоді вираз (1) перепишеться так:

$$T^{(4)} = \int_0^1 d\beta \int_{\eta_0}^{\infty} d\eta\, \varphi(\beta,\eta) \int dq_1 \frac{1}{[\beta q_1^2 + (1-\beta)q_4^2 - \eta] \prod\limits_{i=1}^{4}(q_i^2 - m_i^2)}, \tag{2}$$

$\varphi(\beta,\eta)$ — довільна, взагалі кажучи, узагальнена функція, $\eta_0 > 0$; точне значення η_0 наведене в роботі [3]. Інтегруючи по q_1, одержимо

$$T^{(4)} = \int_0^1 d\beta \int_{\eta_0}^{\infty} d\eta\, \varphi(\beta,\eta) \int_0^1 d\alpha_1 \ \ldots \int_0^1 d\alpha_5 \frac{\delta\left(1 - \sum\limits_{i=1}^{5}\alpha_i\right)}{\{D\}^3}, \tag{3}$$

де

$$\begin{aligned}
&D = a - b,\\
&a = -\alpha_1\eta + \alpha_1(1-\beta)M_2^2 - m_1^2\alpha_2 + \alpha_3(M_2^2 - m_2^2) + \\
&\qquad + \alpha_4(u - 2m_3^2) + \alpha_5(M_1^2 - m_4^2),\\
&b = \alpha_1^2(1-\beta)^2 M_1^2 + \alpha_3^2 M_2^2 + \alpha_4^2 u + \alpha_5^2 M_1^2 - \alpha_1(1-\beta)[\alpha_3(s - 2m^2) - \\
&\qquad - \alpha_4 u - 2M_1^2\alpha_5] + \alpha_3[\alpha_4(u + M_2^2 - M_3^2) - \alpha_5(s - 2m^2)] + \alpha_4\alpha_5 u.
\end{aligned} \tag{4}$$

Рівняння типу Ландау для $T^{(4)}$ —

$$D = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha_i} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{5}\alpha_i = 0. \tag{6}$$

Для знаходження явного вигляду рівняння поверхні сингулярності необхідно розв'язати лінійну неоднорідну систему п'яти рівнянь (6) і розв'язок підставити в (5). Одержане рівняння для s, t, u і буде рівнянням поверхні сингулярності. У випадку, коли зовнішні і внутрішні маси дорівнюють (m), рівняння поверхні сингулярності має вигляд

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(1-\beta)(u - 2m^2)s + (m^2\beta - \eta) + [m^2(1 - \beta + 2\lambda) - 2\lambda\eta]t = \\
&\qquad = m^2[m^2(3\beta - 2) - \eta],
\end{aligned} \tag{7}$$

$0 \le \beta < 1$, $\eta \ge \eta_0$, λ — довільний параметр, який з'явився тому, що детермінант системи (6) дорівнює нулю.

Очевидно, що аналогічний метод можна застосувати і для діаграм типу c, але при цьому потрібно використати більш складне інтегральне зображення для вершинної функції [2, 3] (формули (16.6) і (11) відповідно).

На закінчення наведемо без доведення таке твердження: вклад в амплітуду породження від діаграми типу a не має власних особливостей, якщо число зовнішніх ліній $n \ge 6$, тобто для вивчення аналітичних властивостей діаграм a досить вивчити її редуковані діаграми, які одержуються з неї викресленням однієї з внутрішніх ліній q_i. Це твердження можна довести методом Брауна [4].

1. Логунов А.А., Тодоров И.Т., Черников Н.А., *Годишник на Софийския университет*, 1962, **55**, 117.
2. Nakanishi N., *Suppl. Progr. Theor. Phys.*, 1961, **18**, 1.
3. Лю И-чень, Тодоров И.Т., *ДАН СССР*, 1963, **148**, 806.
4. Brown L.M., *Nuovo Cim.*, 1961, **22**, 178.