Аналитические свойства амплитуд рождения в одночастичном приближении как функции двух переменных

В.И. ФУЩИЧ

1. Исследованию аналитических свойств амплитуд рождения как по теории возмущений, так и на основе аксиом теории поля посвящено в последнее время довольно много работ [1–4]. Это связано, во-первых, с попыткой учета высших вкладов в условие унитарности, во-вторых, с различными приближенными методами (метод Чу и Лоу, одночастичные приближения), которые основываются на аналитических свойствах амплитуд рождения.

Зная аналитические свойства амплитуд рождения, можно судить о возможности применения метода Чу и Лоу [5]. Этот метод, как известно, основан на экстраполяции функции $f(s,t)$, которая определенным образом связана с вкладом в амплитуду рождения от диаграммы рис. 1 [5], заданной в физической области относительно переменной t ($t \le 0$) при фиксированном s, до точки $t = \mu^2$, где μ — масса π-мезона, если рассматривается процесс $\pi + n \to n + \pi + \pi$.

Очевидно, что для допустимости такой экстраполяционной процедуры функция $f(s,t)$ должна быть аналитичной в области $t \le \mu^2$.

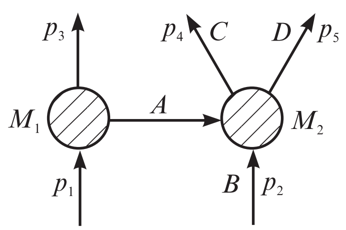

Рис. 1.

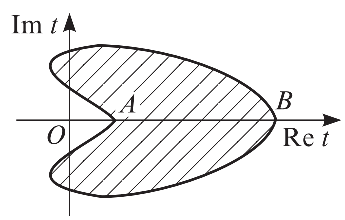

Рис. 2.

В настоящей заметке исследуются аналитические свойства амплитуды простого рождения как функции двух переменных (t и t_{24}) в одночастичном приближении, т.е. вклада в амплитуду рождения от диаграммы рис. 1; обсуждается вопрос о применимости метода Чу и Лоу для процесса $\pi + n \to n + \pi + \pi$. Исследование проводится с помощью интегрального представления Йоста–Лемана–Дайсона.

2. Вклад в амплитуду рождения от диаграммы рис. 1 запишется следующим образом:

$$T^{(5)} = V\left(p_1^2, p_3^2, t\right) T^{(4)}\left(p_2^2, p_4^2, p_5^2, t, t_{24}, s_{45}\right) \frac{1}{t-\mu^2}, \tag{1}$$

где $s_{45} = (p_4 + p_5)^2 \equiv s$, $t_{24} = (p_2 - p_4)^2$, $t_{13} = (p_1 - p_3)^2 \equiv t$.

Укр. мат. журн., 1963, **15**, № 2, С. 227–232.

Из (1) видно, что областью аналитичности T^5, например, относительно переменной t, будет пересечение областей аналитичности функций $V(t)$ и $T^4(t)$. Поэтому для полноты изложения придется остановиться на аналитических свойствах вершинной функции $V(t)$. В дальнейшем будем предполагать, что $p_1^2 = p_3^2 = m^2$ — масса нуклона, а все другие частицы — мезоны.

Хорошо известно, что, исходя из аксиом теории поля (лоренцвариантности, причинности и спектральности), удается доказать дисперсионные соотношения только для $\mu > \left(\sqrt{2}-1\right)m$, т.е. для нефизических масс. Это означает, что в комплексной окрестности точки $t = 4\mu^2$ функция $V(t)$ может иметь особенности. Эти особенности были исследованы Эмме [6] с помощью так называемого "прямого представления" вершинной функции, т.е.

$$
\begin{gathered}
V(z_1, 4z_2, t) = \int\limits_0^1 d\xi \int\limits_{\xi-1}^{\xi+1} d\eta \int\limits_{k_1}^{\infty} dk \times \\
\times \frac{\rho(k, \xi, \eta, 4z_2)}{\left[2k^2 + 2(1+\xi^2-\eta^2)z_2^2 - (z_1+t) + \eta(z_1-t)\right]^2 - \xi^2\lambda(z_1, 4z_2, t)},
\end{gathered}
\tag{2}
$$

где

$$
k_1 = \max\left\{0;\ a - z_2\left[(1+\eta)^2-\xi^2\right]^{1/2};\ c - z_2\left[(1-\eta)^2-\xi^2\right]^{1/2}\right\}. \tag{3}
$$

В нашем частном случае $a = b = m+\mu$, $c = 2\mu$, $2z_2 = m$.

Приравняв знаменатель выражения (2) к нулю, получим множество точек в плоскости t, в которых $V(t)$ может иметь особенности. Это множество будет следующим:

$$
\operatorname{Re} t = 2z_2 \frac{(1+\eta)\left[\gamma^2 - (1-\eta)^2 - \xi^2\right] - 4\xi^2}{(1+\eta)^2 - \xi^2}, \tag{4}
$$

$$
\operatorname{Im} t = -(\operatorname{Re} t)^2 + \frac{\left\{\operatorname{Re} t\left[(1+\eta)^2-\xi^2\right] + 8\xi^2 z_2\right\}^2}{(1+\eta)^2\left[(1+\eta)^2-\xi^2\right]}, \tag{5}
$$

где $\gamma \geq \dfrac{k_1}{z_2}$.

Приведем качественную картину области аналитичности. Координаты точек $(\operatorname{Re} t)_A = \dfrac{4m\mu^2}{2m-\mu}$ и $(\operatorname{Re} t)_B = \dfrac{m^2(2m+\mu)}{2\mu}$ (см. рис. 2).

Здесь важно отметить, что $V(t)$ аналитична вдоль отрицательной части действительной оси, включая точку $t = 2\mu^2$. Однако появление комплексных особенностей вблизи точки $t = \mu^2$ может отрицательно повлиять на практическое осуществление экстраполяционной процедуры Чу–Лоу.

3. Исследуем теперь аналитические свойства функции T^4. Амплитуду процесса $A + B \to C + D$ можно записать в виде

$$
T^{(4)} = -\int dx\ \exp\left[i\frac{p_1-p_3-p_2}{2}x\right] \langle p_4 p_5\ \text{out}\left|R'(A)\left(\frac{x}{2}\right)A\left(-\frac{x}{2}\right)0\right\rangle. \tag{6}
$$

Следует особо подчеркнуть, что выражение (6) определяет T^4 не только для тех векторов $p_1 - p_3 \equiv k$ и p_2, которые лежат на массовой оболочке, но и для тех векторов, для которых интеграл (6) существует. Это обстоятельство дает возможность рассматривать $(p_1 - p_3)^2 = t$ как независимую комплексную переменную.

С помощью аналогичных рассуждений, как и в [7] для случая упругого рассеяния, имеем:

$$T^{(4)} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{du\, d\varkappa^2\, \varphi(u, \varkappa^2, p_4, p_5)}{\left[\frac{1}{2}(k - p_2) - u\right]^2 - \varkappa^2}, \tag{7}$$

где φ — весовая функция, обращающаяся в нуль вне области $0 \le u \le \dfrac{s^{1/2}}{2}$; $-\dfrac{s^{1/2}}{2} + u \le u_0 \le \dfrac{s^{1/2}}{2} - u$;

$$\varkappa \ge \max\left[0;\; m_1 - \sqrt{\left(\frac{s^{1/2}}{2} - u_0\right)^2 - u^2};\; m_2 - \sqrt{\left(\frac{s^{1/2}}{2} - u_0\right)^2 - u^2}\right]. \tag{8}$$

Выбрав систему центра масс $\vec{p}_4 + \vec{p}_5 = 0$ и вводя полярные координаты

$$\vec{p}_4 = |\vec{p}_4|\,(1,0,0), \quad \vec{k} = K(\cos\theta, \sin\theta, 0), \quad \vec{u} = u(\sin\beta\cos\alpha, \sin\beta\sin\alpha, \cos\beta),$$

перепишем выражение (7) в виде:

$$T = -\frac{1}{4\pi K(s,t)} \int du_0 \int u du \int d\varkappa^2 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta \frac{\varphi\left(u_0, u^2, \cos\alpha\sin\beta, \varkappa^2, s\right)}{X(s,t) - \cos(\theta - \alpha)}, \tag{9}$$

где

$$X(s,t) = \frac{K^2(s,t) + u^2 + \varkappa^2 - \left(u_0 + \frac{\mu^2 - t}{2s^{1/2}}\right)^2}{2K(s,t) u \sin\beta}, \tag{10}$$

$$K^2 = \frac{(s + \mu^2 - t)^2 - 4\mu^2 s}{4s}. \tag{11}$$

Поскольку вся зависимость от t и $\cos\theta$ (s — фиксировано) выделена в знаменателе, то $T^{(4)}$ может иметь особенности за счет нулей знаменателя выражения (9), а также при тех t, для которых $K(s,t) = 0$, т.е. при

$$t = \left(s^{1/2} \pm \mu\right)^2. \tag{12}$$

Для определения области аналитичности $T^{(4)}$ рассмотрим такие случаи:

1) $-1 \le \cos\theta \le 1$, t — комплексное;

2) $-\infty \le t < m^2$, $\cos\theta$ — комплексное;

3) t и $\cos\theta$ — комплексные.

1) В этом случае знаменатель выражения (9) может обращаться в нуль, когда

$$-1 \leq X(s,t) \leq 1. \tag{13}$$

Чтобы найти границу области аналитичности относительно переменной t, необходимо из (10) выразить t как функцию $X, u_0, u, \varkappa^2, \sin\beta$ и найти минимальное t, при котором знаменатель может еще обращаться в нуль, причем следует учесть условия (8) и (13). В работе Дремина [8] было проведено такое детальное исследование для мнимой части амплитуды мезон-нуклонного упругого рассеяния на нулевой угол. Так как знаменатель выражения (9) совпадает с одним из знаменателей работы [8] [см. формулу (5)], то мы приведем здесь только окончательный результат — вид границы области аналитичности (в единицах μ) с учетом, что в нашем случае $m_1 = m_2 = 2\mu$, и при условии (12).

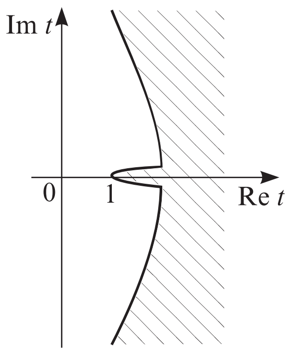

Рис. 3.

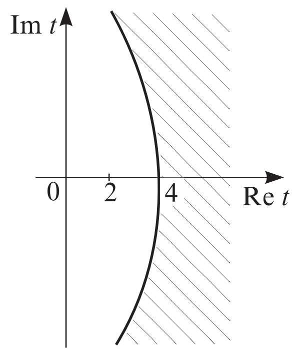

Рис. 4.

Из приведенных рисунков 3 и 4[1] вытекает, что при $s \geq 9\mu^2$ между физической областью переменной t $(t \leq 0)$ и полюсом в точке $t = \mu^2$ $T^{(5)}$ не имеет других особенностей на действительной оси, а это означает, что и функция $f(s,t)$ не будет иметь особенностей в этой же области.

2) Если t фиксировано в вышеуказанной области, то $T^{(4)}$ как функция[2] $\cos\theta$ аналитична в эллипсе с полуосями $x_0(s,t)$, $\sqrt{x_0^2(s,t)-1}$, где

$$x_0(s,t) = \left\{1 + \frac{(m_1^2 - t)(m_2^2 - \mu^2)}{K^2(s,t)\,[s-(m_1-m_2)^2]}\right\}. \tag{14}$$

Областью аналитичности $T^{(4)}$ в трехмерном пространстве переменных Re t, Re $\cos\theta$ и Im $\cos\theta$ будет область, приведенная на рис. 5. Уравнением верхней части поверхности $(0 \leq \mathrm{Re}\, t \leq m_1^2)$, приведенной на рис. 5, является поверхность эллипсоида

$$\frac{(\mathrm{Re}\,\cos\theta)^2}{\tilde{x}_0^2} + \frac{(\mathrm{Im}\,\cos\theta)^2}{\tilde{x}_0^2 - 1} + \frac{\mathrm{Re}\, t}{m_1^4} = 1, \tag{15}$$

а уравнением нижней части $(-\infty \leq \mathrm{Re}\, t \leq 0)$ — уравнение поверхности эллипсоида

$$\frac{(\mathrm{Re}\,\cos\theta)^2}{\tilde{x}_0^2} + \frac{(\mathrm{Im}\,\cos\theta)^2}{\tilde{x}_0^2 - 1} + \frac{(\mathrm{Re}\, t)^2}{\infty} = 1, \tag{16}$$

[1]На рис. 3 незаштрихованная область — область аналитичности $T^{(4)}$ при $s = 4\mu^2$ вблизи точки $t = \mu^2$, на рис. 4 — вид области аналитичности $T^{(4)}$ при $s \geq 9\mu^2$ вблизи точки $t = \mu^2$.

[2]$\cos\theta$ — линейная функция t_{24}.

где

$$\tilde{x}_0 = \left\{ 1 + \frac{m_1^2(m_2^2 - \mu^2)}{K^2(s,0)\,[s - (m_1 - m_2)^2]} \right\}. \tag{17}$$

Следует заметить, что все эти рассуждения справедливы при таких s, при которых $K^2(s,t) > 0$ и $s > (m_1 - m_2)^2$.

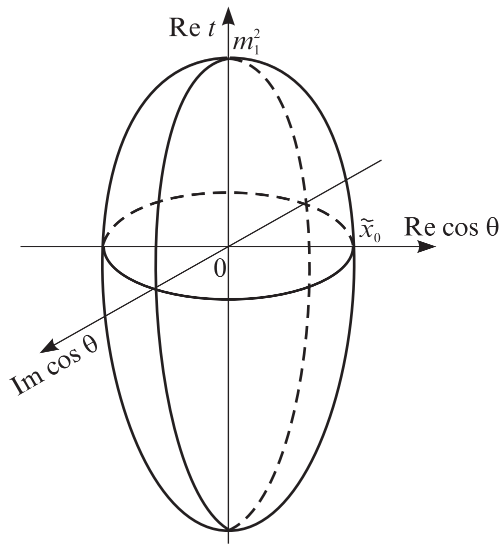

Рис. 5

3) Чтобы избавиться от неоднозначности в знаменателе выражения (9) $\sqrt{K^2}$, установим область аналитичности не для самой функции $T^{(4)}$, а для некоторой комбинации ее, а именно:

$$\tilde{T}^{(4)} = T^{(4)}[s, \cos(\theta - \pi), t] - T^{(4)}[s, \cos\theta, t]. \tag{18}$$

После несложных выкладок получаем, что $T^{(4)}$ будет аналитической функцией комплексных переменных t и $\cos\theta$ для множества тех точек, для которых имеют место условия:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{Re}\ \cos\theta)^4 - 6(\mathrm{Re}\ \cos\theta)^2(\mathrm{Im}\ \cos\theta)^2 + (\mathrm{Im}\ \cos\theta)^2 + (\mathrm{Re}\ X^2)^2 - (\mathrm{Im}\ X^2)^2 - \\
&\quad -2\ \mathrm{Re}\ X^2 \left\{ \left[(\mathrm{Re}\ \cos\theta)^2 - (\mathrm{Im}\ \cos\theta)^2 \right] \cos 2\alpha + \sin^2\alpha \right\} + \\
&\quad +4\ \mathrm{Im}\ X^2\ \mathrm{Re}\ \cos\theta\ \mathrm{Im}\ \cos\theta \cos 2\alpha - 2\left[(\mathrm{Re}\ \cos\theta)^2 - (\mathrm{Im}\ \cos\theta)^2 \right] \sin^2\alpha \neq 0, \\
&(\mathrm{Re}\ X^2)(\mathrm{Im}\ X)^2 - 2(\mathrm{Re}\ \cos\theta)(\mathrm{Im}\ \cos\theta)\ \mathrm{Re}\ X^2 \cos 2\alpha - \\
&\quad -\mathrm{Im}\ X^2 \left\{ \left[(\mathrm{Re}\ \cos\theta)^2 - (\mathrm{Im}\ \cos\theta)^2 \right] \cos 2\alpha + \sin^2\alpha \right\} - \\
&\quad -2(\mathrm{Re}\ \cos\theta)(\mathrm{Im}\ \cos\theta) \sin^2\alpha \neq 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

4. Для полного ответа на вопрос о применимости метода Чу и Лоу необходимо было бы исследовать аналитические свойства амплитуд рождения в высших приближениях (двухчастичном, трехчастичном и т.д.), но поскольку такая задача связана с принципиальными трудностями, то обычно ограничиваются только диаграммами в одночастичном приближении, т.е. полагают, что особенности, которые могут возникнуть при учете высших приближений, лежат намного выше, чем полюс в точке $t = \mu^2$ функции $T^{(5)}$. Такое приближение, по-видимому, применимо, как это указано в [5], при малых передачах импульса (порядка μ). Однако, если ограничиться только диаграммой рис. 1, то особенности $T^{(5)}$, которые могут возникнуть за счет вершин M_1 и M_2, лежат выше полюса в точке $t = \mu^2$ для процесса $\pi + n \to n + \pi + \pi$ при $s \geq 9\mu^2$ и $t_{24} \leq 0$ (физическая область), можно заключить, что и функция $f(s,t)$ при $s \geq 9\mu^2$ будет аналитична в области $t \leq 2\mu^2$, т.е. метод Чу и Лоу применим для вышеуказанного процесса.

Полученные области аналитичности функции $T^{(5)}$ относительно переменных t и t_{24} значительно больше областей аналитичности, которые были получены Асколи [3], что естественно, поскольку нами рассмотрено только одночастичное приближение полной амплитуды рождения.

Эти результаты могут быть обобщены на случай, когда из вершины M_2 выходит n линий.

1. Tarsky J., *J. Math. Phys.*, 1962, **3**, 1.
2. Ascoli R., Minguzzi A., *Phys. Rev.*, 1960, **118**, 1435.
3. Ascoli R., *Nuvo Cim.*, 1960, **18**, 754.
4. Kim Y.S., *Phys. Rev.*, 1961, **124**, 1632.
5. Chew G.F., Low F.E., *Phys. Rev.*, 1959, 1640.
6. Oehme R., *Phys. Rev.*, 1960, **117**, 1151.
7. Lehman H., *Nuovo Cim.*, 1958, **10**, 579.
8. Дремин И.М., *ЖЭТФ*, 1961, **41**, 821.