# Зміст / Contents

# До одного випадку розкладу функцій за власними функціями рівняння Штурма-Ліувілля

**Т.В. Авдєєва, Л.М. Іллічева**
Національний технічний університет України "КПІ", Київ, Україна
Київська держ. академія водного транспорту ім. П. Конашевича-Сагайдачного, Україна
*Avdeeva_t1@rambler.ru, m_ilicheva@ukr.net*

Розглядаються диференційні рівняння Штурма-Ліувілля виду: $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0$.

Розв'язками рівняння є власні функції рівняння Штурма-Ліувілля. Довільна функція при деяких граничних умовах на відрізку $(a,b)$ розкладається в ряд за вказаними функціями. Нехай $\varphi(x,\lambda_n)$ – розв'язок рівняння Ш.-Л.; $\varphi_0$, $\chi_0$ – незалежні початкові рішення рівняння; $\varpi=W(\varphi_0,\chi_0)$ - вронскіан функцій; $\lambda_n$ - нулі функції $\varpi$; $k_n$ - стала, яка визначається за формулою:

$$k_n=\cos\beta\ \cos(b\sqrt{\lambda_n})\{1+\lambda_n tg^2\beta\}.$$

Розклад за власними функціями має вигляд:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k_n}{\varpi'(\lambda_n)}\varphi(x,\lambda_n)\int_a^b\varphi(y,\lambda_n)f(y)dy.$$

Нехай $\alpha=0$, $a=0$, $b>0$. Тоді одержимо таке зображення:

$$f(x)=\frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\lambda_n tg^2\beta}{1+\lambda_n tg^2\beta+\frac{tg\beta}{b}}\sin(x\sqrt{\lambda_n})\int_0^b\sin(y\sqrt{\lambda_n})f(y)dy.$$

Якщо $tg\beta=-b$, зображення матиме вигляд:

$$f(x)=\frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\lambda_n b^2}\right)\sin(x\sqrt{\lambda_n})\int_0^b\sin(y\sqrt{\lambda_n})f(y)dy.$$

1. Э.Ч. Титчмарш. Разложения по собственным функциям, связанным с дифференциальными уравнениями 2-го порядка. — М.: Изд. Иностранная литература, 1964. — 275 с.

# Теоремы вложения в метрических пространствах $L_\psi$

**Т.А. Агошкова**
Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта, Украина
*tanya_agoshkova@mail.ru*

Пусть $f(x),\ x=(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m,\ m\in\mathbb{N}$ – действительнозначные функции, имеющие период 1 по каждой переменной; $T^m=[0,1)^m$ – основной тор периодов; $L_0\equiv L_0(T^m)$ – множество всех таких функций, которые почти всюду на $T^m$ конечны и измеримы; $\Omega$ – множество функций $\psi:R^+\to R^+$, являющихся модулем непрерывности ($\psi\neq 0$).

$L_\psi\equiv L_\psi(T^m)=\left[f\in L_0(T^m):\ \|f\|_\psi:=\int\limits_{T^m}\psi\left(|f(x)|\right)dx<\infty\right]$ – метрическое пространство; $H_\psi^\omega(T^m)=[f\in L_\psi(T^m):\ \omega(f,h)_\psi\le\omega(t)]$; $\omega(f,h)_\psi=\sup\limits_{\|t\|_\infty\le h}\|\ \triangle_t\ f\|_\psi$ – модуль непрерывности функции $f$ в пространстве $L_\psi$ при $h\in\mathbb{R}^1_+$, $\|t\|_\infty:=\max\limits_{1\le i\le m}|t_i|$, $\triangle_t\ f(x)=$

$f_t(x) - f(x)$, $f_t(x) = f(x_1 + t_1, \ldots, x_m + t_m)$, $t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$; $M_\psi(s) = \sup\limits_{0<t<\infty} \frac{\psi(st)}{\psi(t)}$ – функция растяжения функции $\psi(t)$ для $s \in (0, \infty)$; $\gamma_\psi$ – нижний показатель растяжения функции $\psi(t)$ [1].

Доказаны теоремы вложения $H_\psi^\omega(T^m) \subset L_1(T^m)$ и $H_\psi^\omega(T^m) \subset L_q(T^m)$.

**Теорема 1.** *Пусть $\gamma_\psi > 0$ и $f \in L_\psi(T^m)$ такая, что конечен интеграл* $\int\limits_0^1 \frac{M_\psi(t)}{t} \cdot \frac{\omega\left(f,\ t^{\frac{1}{m}}\right)_\psi}{t} dt < \infty$. *Тогда $f \in L_1(T^m)$ и для всех $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ выполняется неравенство:*

$$\psi\left(\frac{\omega(f,h)_1}{h}\right) \leq C \int\limits_0^{h^{m-1}} \frac{M_\psi(t)}{t} \cdot \frac{\omega\left(f, (ht)^{\frac{1}{m}}\right)_\psi}{ht} dt,$$

*где константа $C$ зависит от $\psi$, $f$, $m$.*

Теорема 1 при $m = 1$ доказана Пичуговым С.А. [2]. А в случае когда $\psi(t) = t^p$, $m = 1$, $0 < p < 1$, $p < q < \frac{p}{1-p}$ Стороженко Э.А. доказала вложение $H_p^\omega(T^1) \subset L_q(T^1)$ [3].

Функцию $\varphi(t)$ на полуоси $[0, \infty)$ называют квазивогнутой [1], если: $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t)$ положительна и возрастает при $t > 0$, $\frac{\varphi(t)}{t}$ убывает при $t > 0$.

**Теорема 2.** *Пусть $\psi\left(y^{\frac{1}{q}}\right)$ – квазивогнутая функция, $q \in (0;1)$, $\gamma_\psi > 0$ и $f \in L_\psi(T^m)$ такая, что конечен интеграл* $\int\limits_0^1 \frac{M_\psi\left(t^{\frac{1}{q}}\right)}{t} \cdot \frac{\omega\left(f,\ t^{\frac{1}{m}}\right)_\psi}{t} dt < \infty$. *Тогда $f \in L_q(T^m)$ и для всех $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ выполняется неравенство:*

$$\psi\left(\left(\frac{\omega(f,h)_q}{h}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \leq C \int\limits_0^{h^{m-1}} \frac{M_\psi\left(t^{\frac{1}{q}}\right)}{t} \cdot \frac{\omega\left(f, (ht)^{\frac{1}{m}}\right)_\psi}{ht} dt,$$

*где константа $C$ зависит от $\psi$, $f$, $m$.*


1. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. - М: Наука, 1978.

2. Пичугов С.А. Гладкость функций в метрических пространствах $L_\psi$, в печати.

3. Стороженко Э.А. О некоторых теоремах вложения, Матем. заметки, 1976, 19:2, С. 187–200.


# О производных сопряженных тригонометрических полиномов в $L_0$


**А.Н. Адамов**

Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова, Украина

*alex.1985@mail.ru*


Пусть $\mathrm{T}_n$ - множество тригонометрических полиномов $T_n(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$порядка $n$ с коэффициентами $a_k$ из поля $\mathrm{C}$ комплексных чисел. Полином $\tilde{T}_n(t) = i\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k e^{ikt} - \sum\limits_{k=1}^{n} a_{-k} e^{-ikt}\right)$ называют сопряженным для $T_n$. Определим функционал $\|f\|_p$, $0 \leq p \leq \infty$ на отрезке $[0,\ 2\pi]$ обычным образом:

$$\|f\|_\infty = ess \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} f(t), \|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, 0 < p < \infty,$$

$$\|f\|_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|f(t)|\,dt\right)$$

В 1928 году Г.Сеге [1] доказал первое неравенство, связывающее нормы производной сопряженного тригонометрического полинома с нормой самого полинома, А. Зигмунд распространил (1959 - [2, т. II, глава X, (3.25)]) его на нормы $\|\cdot\|_p$ при $1 \le p \le \infty$:

$$\left\|\tilde{T}_n^{(r)}\right\|_p \le n^r \|T_n\|_p, \quad T_n \in \mathrm{T}_n, \quad r \ge 1, \quad 1 \le p \le \infty \tag{1}$$

Исследованию неравенства (1) при $0 \le p < 1$ посвящена статья В.В.Арестова [3], и результат при $p = 0$ выглядит так:

$$\left\|\tilde{T}_n^{(r)}\right\|_0 \le \left\|\tilde{h}_n^{(r)}\right\|_0 \|T_n\|_0, \quad r \ge 0, \quad \text{где} \quad h_n(t) = 2^n(1+\cos t)^n \tag{2}$$

Дальнейшие неравенства посвящены оценке величины $\left\|\tilde{h}_n^{(r)}\right\|_0$. Если $r$ достаточно велико, то есть $r \ge n \ln 2n$, то $\left\|\tilde{h}_n^{(r)}\right\|_0 = n^r$ . Если $1 \le r < n\ln 2n$, то $\left\|\tilde{h}_n^{(r)}\right\|_0 \le 2n^r C_{2n}^{n+1}$, а если $r = 0$, то $\frac{1}{n} C_{2n}^{n+1} \le \left\|\tilde{h}_n\right\|_0 \le 2C_{2n}^{n+1}$.

Нами получены [4] новые оценки константы в неравенстве (2):

Для $1 \le r < \frac{n}{2}$ получаем $\left\|\tilde{h}_n^{(r)}\right\|_0 \le B_r C_{2n}^{n+1}$ (где $B_r$ зависит **только** от $r$).

Для $r = 0$ имеем $\exp\left(-\frac{1.58+1.98\ln n}{\sqrt{n}}\right) \le \frac{\|\tilde{h}_n\|_0}{C_{2n}^{n+1}} \le \left(1+\frac{3}{n+2}\right)\exp\left(\frac{0.56}{\sqrt{n}}\left(3+\ln\frac{n}{2}\right)\right)$, где $n \ge 50$


1. G. Szegö . Über einen satz des Hern Serge Bernstein, Schrift. Königsberg. Gelehrten Gesellschaft, 1928, 5:4, P. 59–70.

2. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды. — М.: Мир, 1965, Т. 1, 2.

3. В. В. Арестов. Неравенство Сеге для производных сопряженного тригонометрического полинома в $L_0$, Матем. заметки, 1994, 56:6, С. 10–26.

4. А. Н. Адамов. О сопряженных тригонометрических полиномах в $L_0$. — Вiсник Донецького нацiонального унiверситету, сер. А: природничi науки, 2011, №2.


# Об $M$–членных приближениях класса Бесова


**Г. Акишев**

Карагандинский государственный университет, Казахстан

*akishev@ksu.kz*


Пусть $\overline{x} = (x_1, ..., x_m) \in I^m = [0, 2\pi)^m$. Через $L_{\bar{p}}(\mathbb{I}^m)$ обозначим пространство Лебега $2\pi$-периодических функций $f(\bar{x})$ с нормой

$$\|f\|_{\bar{p}} = \left[\int_0^{2\pi}\left[\cdots\left[\int_0^{2\pi}|f(\bar{x})|^{p_1}dx_1\right]^{\frac{p_2}{p_1}}\cdots\right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}}dx_m\right]^{\frac{1}{p_m}} < +\infty,$$

где $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $1 \le p_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$. Для функции $f \in L_1(I^m)$ и числа $s \in \mathbb{Z}_+$ введем обозначение

$$f_0(\bar{x}) = a_0(f), \quad f_{(s)}(\bar{x}) = \sum_{2^{s-1} \le \max|k_j| < 2^s} a_{\bar{k}}(f) e^{i\langle \bar{k}, \bar{x}\rangle}, \quad s = 1, 2, ...,$$

где $a_{\overline{n}}(f)$ – коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(I^m)$ по кратной тригонометрической системе $\{e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}\}_{\bar{n}\in\mathbb{Z}^m}$. Рассматриваются классы Никольского, Бесова. Пусть $1 < p_j < +\infty, j = 1,...,m$ и $r > 0$, $1 \le \theta \le +\infty$

$$B^r_{\bar{p},\theta} = \Big\{ f \in L_{\overline{p}}(I^m) : \Big( \sum_{s\in\mathbb{Z}_+} 2^{sr\theta} \left\| f_{(s)} \right\|^{\theta}_{\bar{p}} \Big)^{\frac{1}{\theta}} \le 1 \Big\},$$

$e_M(f)_{\bar{p}}$ — наилучшее $M$ — членное приближение функции $f \in L_{\bar{p}}(I^m)$ по тригонометрической системе. Для заданного класса $F \subset L_{\bar{p}}(I^m)$ положим $e_M(F)_{\bar{q}} = \sup_{f\in F} e_M(f)_{\bar{q}}$. Оценки величины $e_M(F)_q$ для класса $F = B^r_{p,\theta}$ в изотропном пространстве Лебега установлены в [1] – [3]. В докладе будут представлены оценки величины $e_M(F)_{\bar{p}}$ класса $F = B^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}}$ в пространствах со смешанными нормами. В частности

**Теорема.** *Пусть* $\bar{p} = (p_1,...,p_m)$, $\bar{q} = (q_1,...,q_m)$, $1 < p_j \le 2 < q_j < \infty$, $j = 1,...,m$, $1 \le \theta \le \infty$. *Если* $\sum\limits_{j=1}^{m}(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}) < r < \sum\limits_{j=1}^{m}\frac{1}{p_j}$, *то*

$$e_M\left(B^r_{\bar{p},\theta}\right)_{\bar{q}} \asymp M^{-(2\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{1}{q_j})^{-1}(r-\sum\limits_{j=1}^{m}(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}))}.$$

*Если* $r = \sum\limits_{j=1}^{m}\frac{1}{p_j}$, *то*

$$e_M\left(B^r_{\bar{p},\theta}\right)_{\bar{q}} \asymp M^{-\frac{1}{2}}\left(\log M\right)^{1-\frac{1}{\theta}}$$

*Если* $r > \sum\limits_{j=1}^{m}\frac{1}{p_j}$, *то*

$$e_M\left(B^r_{\bar{p},\theta}\right)_{\bar{q}} \asymp M^{-\frac{1}{m}(r+\sum\limits_{j=1}^{m}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_j}))}$$


1. De Vore R.A., Temlyakov V.N. Nonlinear approximation by trigonometric sums, Journal Fourier analysis and applications, 1995, 2:2, P. 29–48.

2. Romanyuk A.S. Approximative characteristics of the isotropic classes of periodic functions of many variables, Ukrain. Mathem. Journal, 2009, 61:4, P. 613–626.

3. Stasyuk S.A. Best m– term trigonometric approximation for the classes $B^r_{r,\theta}$ of functions of low smoothness, Ukrain. Mathem. Journal, 2010, 62:1, P. 114–122.


# Достатні умови збіжності двовимірних неперервних дробів спеціального вигляду з дійсними елементами


**Тамара Антонова, Ольга Сусь**

Інститут прикладних проблем механіки і математики

ім.Я.С.Підстригача НАН України, Львів

*tamara_antonova@ukr.net, olja_sus@ukr.net*


Одним з багатовимірних узагальнень неперервних дробів є двовимірні неперервні дроби (ДНД), які є ефективним апаратом наближення функцій двох змінних [1].

У повідомленні розглядаються результати дослідження властивостей ДНД вигляду

$$\Phi_0 + \underset{i=1}{\overset{\infty}{D}} \frac{a_{i,i}}{1+\Phi_i}, \ \ \Phi_k = \underset{j=1}{\overset{\infty}{D}} \frac{(-1)^{j-1}a_{k+j,k}}{1} + \underset{j=1}{\overset{\infty}{D}} \frac{(-1)^{j-1}a_{k,k+j}}{1}, \ \ k=0,1,\ldots, \tag{1}$$

частинні чисельники якого задовольняють умови

$$a_{i+j,i} \geq 0, \ \ a_{i,i+j} \geq 0, \ \ a_{j,j} \geq 0, \ \ i=0,1,\ldots, \ \ j=1,2,\ldots\ . \tag{2}$$

Наближення вигляду

$$f_n = \Phi_0^{(n)} + \underset{i=1}{\overset{n}{D}} \frac{a_{i,i}}{1+\Phi_i^{(n-i)}}, \ \ n=1,2,\ldots, \tag{3}$$

називаються звичайними наближеннями ДНД (1), а наближення

$$\tilde{f}_n = \Phi_0^{(n)} + \underset{i=1}{\overset{[\frac{n}{2}]}{D}} \frac{a_{i,i}}{1+\Phi_i^{(n-2i)}}, \ \ n=1,2,\ldots, \tag{4}$$

— фігурними наближеннями ДНД (1), де

$$\Phi_i^{(0)}=0, \ \ \Phi_i^{(k)} = \underset{j=1}{\overset{k}{D}} \frac{(-1)^{j-1}a_{i+j,i}}{1} + \underset{j=1}{\overset{k}{D}} \frac{(-1)^{j-1}a_{i,i+j}}{1}, \ \ i=0,1,\ldots, \ k=1,2,\ldots\ .$$

Для ДНД (1), (2) їх звичайних та фігурних наближень (3), (4) відповідно встановлено [2] достатні умови збіжності послідовностей наближень $\{f_n\}$ та $\{\tilde{f}_n\}$, $n=1,2,\ldots$, і виконання рівностей

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n, \ \ n=1,2,\ldots\ .$$


1. Кучмінська Х.Й. Двовимірні неперервні дроби. — Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2010.

2. Антонова Т.М., Сусь О.М. Достатні умови збіжності двовимірних неперервних дробів спеціального вигляду з дійсними елементами, Наук. вісник Ужгород. нац. ун-ту. Сер. матем. і інформ., 2010, 21, С. 4—18.


# Задача приближения неограниченных функционалов в гильбертовом пространстве и некоторые ее приложения


**В.Ф. Бабенко, Р.О. Биличенко**

Днепропетровский национальный университет им. О.Гончара, Украина

*babenko.vladislav@gmail.com, bilichenkoroma@rambler.ru*


Пусть $H$ — гильбертово пространство, $A_1, A_2, ..., A_n$ — линейные, неограниченные, попарно перестановочные самосопряженные операторы в $H$, $D(A_i)$ — область определения оператора $A_i$, $i=\overline{1,n}$, $E_s$ – совместное разложение единицы операторов $A_1, A_2, ..., A_n$, [1, гл. 6, §5], $s=(s_1,\ldots,s_n)\in\mathbb{R}^n$.

Для чисел $r_1,\ldots,r_n\in\mathbb{N}$ и $\tau_1,\ldots,\tau_n>0$ определим класс $Q$ элементов пространства $H$ следующим образом:

$$Q = \left\{ x \in \bigcap_{i=1}^{n} D(A_i^{r_i}) \ : \ \sum_{i=1}^{n} \tau_i \|A_i^{r_i}\|^2 \leq 1 \right\}.$$

Если $f \in H$ и $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N},\ k_i < r_i,\ i = \overline{1,n}$, положим

$$F_f(x) := (f,\ A_1^{r_1} \ldots A_n^{r_n} x),\ x \in \bigcap_{i=1}^{n} D(A_i^{r_i}).$$

Нами рассмотрена задача наилучшего приближения функционала $F_f$ на классе $Q$ линейными ограниченными функционалами, т.е. задача отыскания величины

$$U_N := \inf_{g \in H, \|g\| \le N} \sup_{x \in Q} |F_f(x) - g(x)|, \quad N > 0.$$

Доказана

**Теорема.** *Если числа $N$ и $h > 0$ связаны соотношением*

$$N = \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{i=1}^{n} s_i^{2k_i}}{\left(1 + h \sum_{i=1}^{n} \tau_i s_i^{2r_i}\right)^2} d\left(E_s f, f\right) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

*то*

$$U_N = h \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{i=1}^{n} s_i^{2k_i} \sum_{i=1}^{n} \tau_i s_i^{2r_i}}{\left(1 + h \sum_{i=1}^{n} \tau_i s_i^{2r_i}\right)^2} d\left(E_s f, f\right) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Пиведенную теорему можно рассматривать как обобщение результатов Л.В. Тайкова [2] о наилучших формулах численного дифференцирования.


1. Бирман М. Ш, Соломяк М. З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.

2. Тайков Л. В. Неравенства типа Колмогорова и формулы численного дифференцирования, Мат. заметки, 1967, 4:2, С. 223 – 238.


# Неравенства типа Бернштейна для сплайнов, заданных на действительной оси


**В.Ф. Бабенко, В.А.Зонтов**

Днепропетровский национальный университет им. О.Гончара, Украина

*babenko.vladislav@gmail.com, vladimir.zontov@gmail.com*


Через $S_{m,h}$, $m \in \mathbb{N}$, $h > 0$, обозначим пространство заданных на $\mathbb{R}$ полиномиальных сплайнов порядка $m$, минимального дефекта, с узлами $lh$, $l \in \mathbb{Z}$, а через $\tilde{S}_{m,n}$ обозначим линейное подпространство пространства $S_{m,\frac{\pi}{n}}$, состоящее из $2\pi$-периодических сплайнов.

Хорошо известны и играют важную роль в теории аппроксимации точные неравенства типа Бернштейна для периодических полиномиальных сплайнов в пространствах $L_\infty$, $L_1$, $L_2$ (см., например, [1]). В работах [2] (случай $k = m$) и [3] (общий случай) получены точные оценки типа Бернштейна для $L_2(\mathbb{R})$-нормы $k$-й производной сплайна из $S_{m,h} \bigcap L_2(\mathbb{R})$ через $L_2(\mathbb{R})$-норму самого сплайна:

$$\|s^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \left(\frac{\pi}{h}\right)^k \sqrt{\frac{K_{2(m-k)+1}}{K_{2m+1}}} \|s\|_{L_2(\mathbb{R})}, \tag{1}$$

где $K_m$ – константы Фавара.

Нами получены новые точные неравенства типа Бернштейна для разностей $\Delta_h^k(s,x)$ порядка $k$ с шагом $h$ непериодических сплайнов из $S_{m,h}$. Полученные неравенства аналогичны известным неравенствам для периодических сплайнов (см. [1, §6.3]) и уточняют неравенство (1).

**Теорема.** *Для любого сплайна $s \in S_{m,h} \bigcap L_2(\mathbb{R})$ и любого $h > 0$ при всех $k = 1, \dots, m-1$ справедливы точные неравенства:*

$$\|s^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \left(\frac{\pi}{2h}\right)^k \sqrt{\frac{K_{2(m-k)+1}}{K_{2m+1}}} \|\Delta_h^k(s)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \left(\frac{\pi}{h}\right)^k \sqrt{\frac{K_{2(m-k)+1}}{K_{2m+1}}} \|s\|_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{2}$$

.

Получены также некоторые точные неравенства типа Бернштейна для разностей сплайнов $s \in S_{m,h}$ с шагом, отличным от $h$.

1. Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. - Киев: Наукова думка, 1992.

2. В. Ф. Бабенко, С. А. Спектор. Неравенства типа Бернштейна для сплайнов в пространстве $L_2(R)$, Вiсник Днiпропетровського унiверситету, 2008, 16:6, С. 21-27.

3. В. Ф. Бабенко, В. А. Зонтов. Неравенства типа Бернштейна для сплайнов, заданных на действительной оси, Укр. мат. журнал, 2011, 63:5, С. 603-611.

# О ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НОРМОЙ ФУНКЦИИ И НОРМАМИ ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ ПОРЯДКА $k$, $r-2$ И $r$, $0 < k < r-2$.

**В.Ф. Бабенко, О.В. Коваленко**

Днепропетровский национальный университет им. О.Гончара, Украина

*babenko.vladislav@gmail.com, olegkovalenko90@gmail.com*

Через $L_\infty(\mathbb{R})$ будем обозначать пространство измеримых и существенно ограниченных функций $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|x\| = \|x\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \operatorname{ess\,sup}\left\{|x(t)| : t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Для натурального $r$ через $L_\infty^r(\mathbb{R})$ обозначим пространство функций $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, что производная $x^{(r-1)}$, $x^{(0)} = x$, локально абсолютно непрерывна, и $x^{(r)} \in L_\infty(\mathbb{R})$. Пусть также $L_{\infty,\infty}^r(\mathbb{R}) := L_\infty^r(\mathbb{R}) \bigcap L_\infty(\mathbb{R})$.

А.Н. Колмогоров сформулировал следующую задачу.

**Задача Колмогорова.** *Пусть задана система целых чисел $0 \le k_1 < k_2 < ... < k_d = r$. Найти необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять система положительных чисел $M_{k_1}, ..., M_{k_d}$, для того, чтобы существовала функция $x \in L_{\infty,\infty}^r(\mathbb{R})$, такая, что*

$$\left\|x^{(k_i)}\right\| = M_{k_i},\ i = 1, ..., d.$$

Решение этой задачи для трех чисел в случае, когда $X = L_{\infty,\infty}^r(\mathbb{R})$ было дано самим Колмогоровым [1]. По поводу дальнейших результатов см. [2] гл. 9.

Нами получено решение сформулированной выше задачи Колмогорова в случае, когда $d = 4$ и $0 = k_1 < k_2 < k_3 = r-2$, $k_4 = r$.

1. А.Н. Колмогоров. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале, Избр. тр. Математика, механика, 1985, С. 252–263.

2. В.Ф. Бабенко, Н.П.Корнейчук, В.А. Кофанов, С.А. Пичугов. Неравенства для производных и их приложения. — К.: Наукова думка, 2003.

# Неравенства типа Надя для функций многих переменных

**В.Ф. Бабенко, Д.А. Левченко**
Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара, Украина
*babenko.vladislav@gmail.com, spline_2009@ukr.net*

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$. Обозначим через $L_s(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le s \le \infty)$ пространство функций $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ суммируемых в $s-$ой степени (существенно ограниченных при $s = \infty$) с нормой

$$\|f\|_s = \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^s dx \right)^{\frac{1}{s}}, \ 1 \le s < \infty$$

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup} \left\{ |f(x)|, \ x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Пусть $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $f^{(\mathbf{e}_k)}(x)$ производную функции $f$ по переменной $x_k$, понимаемую в обобщенном смысле. Положим $\nabla f(x) = \left(f^{(\mathbf{e}_1)}(x), \ldots, f^{(\mathbf{e}_n)}(x)\right)$. Через $L^{\mathbf{e}_k}_{s,\infty}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le s \le \infty$, обозначим пространство функций $f \in L_s(\mathbb{R}^n)$ таких, что $f^{(\mathbf{e}_k)} \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Для $f \in \bigcap\limits_{k=1}^n L^{\mathbf{e}_k}_{s,\infty}(\mathbb{R}^n)$ положим

$$\|\nabla f\|_{2,\infty} = \text{ess sup} \left\{ |\nabla f(x)|, \ x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Нами получен ряд аналогов неравенства Надя [1] для функций многих переменных. В частности, доказана

**Теорема.** *Для любых $1 \le q < p < \infty$ и произвольной функции $f \in \bigcap\limits_{k=1}^n L^{\mathbf{e_k}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ справедливо точное неравенство*

$$\|f\|_q \le \frac{\|\varphi\|_q}{\|\varphi\|_p^\alpha} \|f\|_p^\alpha \|\nabla f\|_{2,\infty}^{1-\alpha},$$

*где*

$$\alpha = \frac{1 + 1/q}{1 + 1/p + 1/q}, \ \varphi(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \le 1, \\ 0 & , \ |x| > 1. \end{cases}$$

1. Sz.-Nagy B. Uber Integralungleichungen zwischen einer Function und ihrer Ableitung, Acta Sci. Math., 1941, 10, P. 64–74.

# О неравенствах типа Ландау-Колмогорова для дробных производных функций, заданных на оси и полуоси

**В.Ф. Бабенко, Н.В. Парфинович, Д.С. Скороходов, М.С. Чурилова**
Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара, Украина
*babenko.vladislav@gmail.com, nparfinovich@yandex.ru,*
*dmitriy.skorokhodov@gmail.com, churilova-m@yandex.ru*

Для функций, заданных на $G=\mathbb{R}$ или $G=\mathbb{R}_+$ производные Маршо порядка $\alpha>0$ определяются равенством [1]:

$$D^\alpha_\pm f(x) = -\frac{1}{\Gamma\left(-\alpha\right)A_l\left(\alpha\right)}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\left(\Delta^l_{\pm t}f\right)(x)}{t^{1+\alpha}}dt, \quad l>\alpha,$$

(для полуоси только производная $D^\alpha_- f$), где $\left(\Delta^l_{\pm t}f\right)(x) = \sum\limits_{k=0}^{l}(-1)^k\left(\begin{array}{c} l \\ k \end{array}\right)f\left(x\mp kt\right)$, $A_l\left(\alpha\right)=\sum\limits_{k=0}^{l}(-1)^{k-1}\left(\begin{array}{c} l \\ k \end{array}\right)k^\alpha$ $\left(A_l\left(\alpha\right)=0,\, \alpha=1,2,\ldots,l-1\right)$. Усеченные производные $D^\alpha_{\pm,h}f$ определяются тем же равенством с $h$ в качестве нижнего предела интегрирования.

Пусть функция $N_{k,t}\left(u\right)=t^{k-1}N_k\left(u/t\right)$, $t>0$, $u\in\mathbb{R}$, где $N_k$ – B-сплайн [2], $E$ – идеальная решетка [3], $E^1$ – ассоциированное пространство. Нами доказана

**Теорема.** *Пусть $k\in\mathbb{N}$, $\alpha\in(0,k)\setminus\mathbb{N}$, тогда для любой функции $f$, определенной на $G$ и такой, что $f^{(k-1)}$ локально абсолютно непрерывна, $f^{(k)}\in E$, $\left\|f^{(k)}\left(\cdot+x\right)\right\|_E\le\left\|f^{(k)}\right\|_E$ $\forall x\in G$, и для любого $h>0$ имеет место неравенство*

$$\left\|D^\alpha_- f\right\|_\infty \le \left\|D^\alpha_{-,h}f\right\|_\infty + \frac{-1}{\Gamma(-\alpha)A_k\left(\alpha\right)}\left\|f^{(k)}\right\|_E\cdot\|g\|_{E^1},$$

*где*

$$g(u)=\int\limits_{\frac{u}{k}}^{h}\frac{N_{k,t}\left(u\right)}{t^{1+\alpha}}dt.$$

*Если $E^1$ – сепарабельное симметричное пространство и $G=\mathbb{R}_+$, неравенство точное.*

В случае $k=1,2$ получены также точные неравенства, оценивающие $\|D^\alpha_\pm f\|_\infty$ через $\|f\|_\infty$ и $\|f^{(k)}\|_E$.

В качестве приложения этой теоремы найдены точные условия вложения класса функций $f$ таких, что $f^{(k)}\in E$ в класс функций с ограниченной дробной производной. В докладе будет обсужден также ряд других приложений полученных неравенств.

1. С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.

2. К. Чуи. Введение в вэйвлеты. — М.: Мир, 2001.

3. С.Г. Крейн, Ю.И. Петунин, Е.М. Семенов. Интерполяция линейных операторов. — М.: Наука, 1978.

# Неравенства типа Джексона–Стечкина для $B^2$-почти периодических функций

**В.Ф. Бабенко, С.В. Савела**

Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара, Украина

*babenko.vladislav@gmail.com, ssvet05@mail.ru*

Для наилучших среднеквадратических приближений $2\pi$-периодических функций $f \in L_2$ тригонометрическими полиномами хорошо известны точные неравенства типа Джексона-Стечкина, полученные Н.И. Черных [1, 2]. В дальнейшем неравенства такого вида изучались для обобщенных модулей непрерывности (см., напр., [3-5]). Аналоги неравенств Н.И. Черных для почти периодических функций были получены в [6, 7]. Нами получен ряд новых точных неравенств типа Джексона-Стечкина с обобщенными модулями непрерывностидля почти периодических функций.

Рассмотрим почти периодические функции Безиковича класса $B^2$, показатели Фурье $\{\lambda_k\}$ которых имеют единственную предельную точку в бесконечности ($B^2$-п.п. функции).Для таких функций $f(x)$ ряды Фурье имеют вид: $f(x) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} A_k e^{i\lambda_k x}$ (см., напр., [6]). Через $G_{\lambda_n}$ обозначим множество $B^2$-п.п. функций, показатели Фурье которых принадлежат интервалу $(-\lambda_n, \lambda_n)$. Положим (см., напр., [6, 7])

$$E_{\lambda_n}(f) = \inf_{g \in G_{\lambda_n}} \left[ M\left\{ |f(x) - g(x)|^2 \right\} \right]^{1/2}.$$

Обозначим через $\Phi$ класс всех непрерывных $2\pi$-периодических неотрицательных ненулевых функций $\varphi$, $\varphi(0) = 0$. Для $\varphi \in \Phi$ положим $I(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(t)\,dt$. Обобщенный модуль непрерывности функции $f$ определяется соотношением $\omega_\varphi^2(f,\delta) = \sup\limits_{|t|\le\delta} \left( \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |A_k|^2 \varphi(\lambda_k t) \right)^{1/2}$.

Приведем пример полученного результата.

**Теорема.** *Для любой функции $\varphi \in \Phi$ существует $\gamma > 0$ такое, что для произвольной $B^2$-п.п. функций $f$ имеет место неравенство*

$$E_{\lambda_n}(f) \le I(\varphi)^{-1/2} \;\; \omega_\varphi(f; \gamma/\lambda_n).$$

При некоторых дополнительных условиях константа $I(\varphi)^{-1/2}$ неулучшаема.

1. Черных Н.И. О неравенстве Джексона в $L_2$, Труды МИАН, 1967, 88, С. 71–74.

2. Черных Н. И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в $L_2$, Матем. заметки, 1967, 2:5, С. 513–522.

3. Бабенко А.Г. О точной константе в неравенстве Джексона в $L_2$, Мат. заметки, 1986, 39:5, С. 651–664.

4. Васильев С.Н. Неравенство Джексона-Стечкина в $L_2[-\pi,\pi]$, Тр. ин-та матем. и механ. УрО РАН, 2001, 7:1, С. 75–84.

5. Васильев С. Н. Точное неравенство Джексона-Стечкина в $L_2$ с модулем непрерывности, порожденным произвольным конечно-разностным оператором с постоянными коэффициетами, Докл. РАН, 2002, 385:1, С. 11–14.

6. Притула Я. Г. О неравенстве Джексона для $B^2$-почти периодических функций, Известия ВУЗов. Математика, 1972, 123:8, С. 90–93.

7. Бабенко В.Ф., Савела С.В. Неравенства типа Джексона-Стечкина для $B^2$-почти периодических функций, Вiсник Днiпропетр. ун-ту. Математика, 2011, 19:6, С. 8–14.

# Геометрические характеристики треугольника в оценках погрешности аппроксимации производных при интерполяции функции двух переменных

**Н.В. Байдакова**

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеренбург, Россия

*baidakova@imm.uran.ru*

Рассматривается одна из из проблем интерполяции функции многочленом степени $n$ на треугольнике, связанная с методом конечных элементов (МКЭ). Известно, что при решении задач с помощью МКЭ часто приходится накладывать на триангуляцию "условие наименьшего угла" (ограничение снизу на наименьший угол треугольника из триангуляции исходной области). Это связано с тем, что в оценках сверху величин погрешности аппроксимации производных функции производными интерполяционных многочленов, определенных на элементе триангуляции (треугольнике), присутствует синус наименьшего угла треугольника в знаменателе. Ранее рядом авторов было показано, что влияние наименьшего угла можно ослабить (что не означает, что его можно исключить полностью во всех случаях).

Автором для достаточно широкого класса интерполяционных условий получены оценки снизу, которые показывают, что задача выбора таких условий, которые одновременно обеспечивали бы независимость оценок сверху аппроксимации производных от синуса наименьшего угла треугольника в знаменателе и гладкость порядка $m$ ($m \geq 1$) результирующей кусочно-полиномиальной функции при локальных способах интерполирования на триангулированной области, не может быть решена положительно.

Для некоторых $n$ и $m$ приводятся примеры, показывающие неулучшаемость полученных оценок снизу.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы совместных исследований УрО РАН и СО РАН (проект 12-С-1-1018) и РФФИ (проект 11-01-00347).

# Про деякі властивості спарених множин значень та спарених множин елементів для гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду

**О.Є. Баран**

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів

*boe13@ukr.net*

При дослідженні збіжності неперервних дробів важливе місце займають критерії збіжності, які базуються на множинах значень та відповідних їм множинах елементів. Особлива увага приділяється вивченню спарених множин значень та відповідних їм спарених множин елементів. В загальному важко описати множини елементів для заданих множин значень. У роботі L. Lorentzen [1] встановлено деякі властивості спарених множин елементів для певним чином заданих спарених множин значень неперервних дробів вигляду

$$\mathop{D}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1},$$

де елементи дробу $a_k$ є комплексними числами.

Для гіллястого ланцюгового дробу (ГЛД) з комплексними елементами вигляду

$$\mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{1},$$

де $i(k) = i_1 i_2 \dots i_k$ – мультиіндекс, $i_0 = N$, означено спарені множини значень і відповідні їм спарені множини елементів, та досліджено деякі властивості цих множин, які є багатовимірними узагальненнями результатів, встановлених L. Lorentzen [1] для неперервних дробів.

1. L. Lorentzen. Convergence criteria for continued fractions $\mathrm{K}(a_n/1)$ based on value sets, Contemporary Mathematics, 1999, 236, P. 205–255.

# Критерий полноты двойной системы степеней с вырождающимися коэффициентами

**Б.Т. Билалов, Ф.А. Гулиева**

Институт Математики и Механики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан

*bilalov.bilal@gmail.com*

Рассматривается система степеней

$$\{A^+(t)\nu^+(t)\varphi^n(t); A^-(t)\nu^-(t)\hat{\varphi}^n(t)\}_{n\geq 0}, \tag{1}$$

где $A^+(t) \equiv |A^{\pm}(t)|e^{i\alpha^{\pm}(t)}$ и $\varphi(t)$ комплекснозначные на $[a,b]$ функции, $\nu^{\pm}(t)$ вырож- дающиеся коэффициенты $\nu^{\pm}(t) \equiv \prod_{k=1}^{r^{\pm}} |t - t_k^{\pm}|^{\beta_k^{\pm}}, \{t_k^{\pm}\}_1^{r^{\pm}} \subset [a,b]$.

Примем следующие предположения:

1.$[A^+(t)]^{\pm}; [A^-(t)]^{\pm}; [\varphi'(t)]^{\pm 1} \in L_\infty$ $(L_\infty \equiv L_\infty(a,b))$;

2.$\Gamma = \varphi\{[a,b]\}$ — *замкнутая* $(\varphi(a) = \varphi(b))$, *спрямляемая, простая кривая Жордана. Gamma — либо кривая Радона (т.е. угол* $\theta_0(\varphi(t))$ *между касательной в точке* $\varphi = \varphi(t)$ *к кривой Gamma и действительной осью есть функция ограниченной вариацией на* $[a,b]$*), либо кусочно-Ляпуновская кривая. Gamma имеет конечное число угловых точек без заострений. Обозначим через* $\{\varphi_k\}_1^r$, *точки разрыва функции* $\arg\varphi'(t)$ *на* $[a,b]$.

$|\arg\varphi'(\varphi_k + 0) - \arg\varphi'(\varphi_k - 0)| < \pi$.

Рассмотрим систему n

$$\{\widetilde{A}(e^{ix})e^{inx}; \widetilde{B}(e^{ix})e^{-inx}\}_{n\geq 0}, \tag{2}$$

где коэффициенты $\widetilde{A}(\xi)$ и $\widetilde{B}(\xi)$ выражается через данные системы (1). При определенных условиях на коэффициенты и функции $\varphi(t)$, устанавливается, что система (1) полна в $L_p(a,b)$ только тогда, когда система (2) полна в $L_p(-\pi,\pi)$. Затем используя результаты работы [6] получается критерий полноты системы (1) в $L_p(a,b), 1 < p < +\infty$.

1. Казьмин Ю.А. Замыкание линейной оболочки одной системы функций, Сиб. мат. журн., 1977, 18:4, С. 799-805.

2. Тумаркин А.Г. О полноте и минимальности некоторых систем функций, Сиб. мат. журн., 1983, 24:1.

3. Любарский Ю.И. Свойства систем линейных комбинаций степеней, Алгебра и анализ, 1989, 1:6, С. 1-69.

4. Билалов Б.Т. Необходимое и достаточное условие полноты и минимальности системы вида $\{A\varphi^n; B\hat{\varphi}^n\}$, Докл. РАН, 1992, 322:6, С. 1019-1021.

5. Билалов Б.Т. Базисные свойства систем степеней в Lp, Сиб. мат. журн., 2006, 47:1, С. 1-12.

6. Велиев С.Г. Базисы из подмножеств собственных функций двух разрывных дифференциальных операторов, Мат. физика, анализ, геометрия, 2005, 12:2, С. 148-157.

# Обобщенное понятие базиса и пространство коэффициентов

**Б.Т. Билалов, Т.И. Наджафов**

Институт Математики и Механики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан

Нахичеванский Государственный Университет, Нахичевань, Азербайджан

*bilalov.bilal@gmail.com*

Пусть $X, Y$ — банаховы пространства, а $L(X;Y)$ — банахово пространство ограниченных операторов действующих из $X$ в $Y$. Пусть $\Gamma \subset C$ — кусочно-гладкая кривая. Через $L_p(\Gamma; L(X)), (L_p(\Gamma; X)), p \geq 1$, обозначаем лебегово пространство $L(X)$ $(X)$-значных функций на $\Gamma$ с нормой

$$\|f\|_p = \left( \int_\Gamma \|f(t)\|^p |dt| \right)^{1/p},$$

где $f : \Gamma \to L(X)$ $(f : \Gamma \to X)$. Пусть $M \subset L_p(\Gamma; L(X))$.

*$J$-оболочкой множества $M$ в $L_p(\Gamma; L(X))$ назовем*

$$L_J[M] \equiv \left\{ x(\cdot) : x(\cdot) = \sum_{k=1}^{n} T_k(\cdot) x_k, \{T_k(\cdot)\} \subset M, \{x_k\} \subset X \right\}.$$

Исходя из этого понятия определяются соответствующие понятия $\omega J$-линейно независимости, $J$-полноты, $J$-биортогональности и $J$-базисности в $L_p(\Gamma; X)$.

**Свойство (А).** *Система $\{T_n(\cdot)\}_{n\in N} \subset L_p(\Gamma; L(X))$ удовлетворяет условию: $\exists T_n^{-1}(t)$, п.в. $t \in \Gamma, \forall n \in N$ и $\{T_n^{-1}(\cdot)\}_{n\in N} \subset L_q(\Gamma; L(X))$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Пусть $S_{\bar{T}} \equiv \{T_n(\cdot)\}_{n\in N} \subset L_p(\Gamma; L(X))$ некоторая система. Определим

$$K_{\bar{T}} \equiv \left\{ \{f_n\}_{n\in N} \subset X : \text{ ряд } \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\cdot) f_n \text{ сходится в } L_p(\Gamma; X) \right\}.$$

Рассмотрим оператор $K : K_{\bar{T}} \to L_p(\Gamma; X) :\ K\bar{f} = \sum_{n=1}^{\infty} T(\cdot) f_n,\ \bar{f} \equiv \{f_n\}_{n\in N}$. Справедлива

**Теорема 1.** *Пусть система $S_{\bar{T}} \equiv \{T_n(\cdot)\}_{n\in N} \subset L_p(\Gamma; L(X)),\ p \geq 1$, обладает Свойством (А). Тогда ей соответствует банахово пространство коэффициентов $K_{\bar{T}}$ и коэффициентный оператор $K \in L(K_{\bar{T}}; L_p(\Gamma; X)),\ \|K\| = 1$. Если при этом система $S_{\bar{T}}$ $\omega J$-линейно независима или имеет $J$-биортогональную систему, то $\exists K^{-1}$. Кроме того, если $ImK$ замкнуто, то $K^{-1} \in L(ImK; K_{\bar{T}})$.*

**Теорема 2.** *Пусть система $\{T_n(\cdot)\}_{n\in N} \subset L_p(\Gamma; L(X)),\ p \geq 1$, обладает Свойством (А) и $K$ соответствующий коэффициентный оператор $K : K_{\bar{T}} \to L_p(\Gamma; X)$. Тогда она образует $J$-базис в $L_p(\Gamma; X)$ только тогда, когда $K$ является изоморфизмом в $L(K_{\bar{T}}; L_p(\Gamma; X))$.*

Следует отметить, что рассмотренные понятия диктуются результатами работ [1-3].

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. — М.: Физматгиз, 1959. — 628 с.

2. Солдатов А.П. Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай, Изв. АН СССР, сер.мат., 1991, 55:5, С. 1070-1100.

3. Солдатов А.П. Эллиптические системы второго порядка в полуплоскости, Известия РАН, 2006, 70:6, С. 161-192.

# Оптимальный выбор параметров натяжения при выпуклой интерполяции обобщенными сплайнами

**В.В. Богданов**

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

*bogdanov@math.nsc.ru*

Рассматривается задача интерполяции нелокальными обобщенными сплайнами, сохраняющими качественные характеристики данных (монотонность и выпуклость). Алгоритмы построения наиболее популярных сплайнов невысокой степени опираются на свойства трехдиагональных систем относительно параметров сплайна. В качестве таких параметров чаще всего выступают неизвестные значения первых или вторых производных сплайна в узлах, характеризующие форму графиков. Свойства матрицы сплайновой системы для определения этих значений характеризуют возможности сохранения сплайном формы данных.

Классический кубический сплайн с двумя непрерывными производными является во многих смыслах идеальным объектом, однако его применение не всегда обеспечивает сохранение формы данных [1], в том числе монотонности и выпуклости. Чтобы исправить этот недостаток с минимальными затратами (и в том же классе гладкости) в классическую конструкцию сплайна вводятся дополнительные параметры управления формой, которые влияют на матрицу сплайновой системы, позволяя менять ее свойства. Вместе с тем, естественным является желание при обобщении минимально уходить от классического вида. А так как обобщенный сплайн остается нелокальным, выбор управляющих параметров представляет определенную проблему. При больших значениях параметров появляется избыточное натяжение, а при малых не всегда удается добиться выпуклости сплайна.

Работ, посвященных выбору параметров обобщенных сплайнов, достаточно. Обычно они посвящены применению различных итерационных процедур вычисления подходящих параметров. В качестве альтернативы в докладе предлагается метод автоматического поиска параметров обобщения, гарантирующих сохранение нелокальным обобщенным сплайном выпуклости данных. Интересно, что при таком выборе параметров обобщенный сплайн отличается от классического лишь на тех участках данных, которые не удовлетворяют условиям выпуклости классического сплайна [2,3]. Таким образом, результирующий сплайн минимально отличается от классического кубического и совпадает с ним, если для последнего выполняются достаточные условия выпуклости.

Работа выполнена при финансовой поддержке программ Интеграционных проектов СО РАН и УрО РАН (проект 2012-32) и РФФИ (проект 11-07-00447).

1. Богданов В. В. Достаточные условия комонотонной интерполяции кубическими сплайнами класса C2, Мат. труды, 2011, 14:2, С. 3-13.

2. Miroshnichenko V.L. Convex and monotone spline interpolation, Constructive Theory of Function'84. Proc. Intern. Conf., Varna, — Sofia: Publishing House of Bulgarian Academy of Sciences, 1984, P. 610–620.

3. Богданов В.В., Волков Ю.С. Выбор параметров обобщенных кубических сплайнов при выпуклой интерполяции, Сиб. журн. вычисл. математики, Сиб. отд-ние, Новосибирск, 2006, 9:1, С. 5–22.

# Оцінка швидкості збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду

**Д.І. Боднар, М.М. Бубняк, О.Я. Ковальчук**
Тернопільський національний економічний університет, Україна
*dmytro_bodnar@hotmail.com, maria.bubnyak@gmail.com, olhakov@gmail.com*

Розглянемо 1-періодичний гіллястий ланцюговий дріб вигляду

$$\left(1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{c_{i_k}}{1}\right)^{-1}=\left(1+\sum_{i_1=1}^{N}\cfrac{c_{i_1}}{1+\sum\limits_{i_2=1}^{i_1}\cfrac{c_{i_2}}{1+\ddots}}\right)^{-1}, \tag{1}$$

де $c_j \neq 0$ – комплексні числа ($j=\overline{1,N}$), $i_0 = N$ – фіксоване натуральне число.

Використовуючи формулу

$$F_n - F = \sum_{j=1}^{N}\frac{x_j - h_n(j)}{\prod_{k=1}^{j} x_k \cdot \prod_{k=j}^{N} h_n(k)},$$

де $F_n$ – $n$-підхідний дріб, $F$ – значення цього дробу, $x_j$ – притягувальні точки дробово-лінійних відображенн $t_j(\omega) = 1 + \dfrac{c_j/\prod_{k=1}^{j-1}x_k^2}{\omega}$ ($j=\overline{1,N}$; $x_0 = 1$),

$h_1(m) = 1$, $h_n(m) = 1 + \dfrac{c_m/R_n(m-1)R_{n-1}(m-1)}{1} + \ldots + \dfrac{c_m/R_1(m-1)R_0(m-1)}{1}$,

$R_n(m) = 1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j_k=1}^{j_{k-1}}\dfrac{c_{i_k}}{1}$ – $n$-ий залишок $m$-го порядку дробу (1) ($R_n(0) = 1$; $R_0(m) = 1$; $m=\overline{1,N}$; $n \geq 1$; $j_0 = m$), встановлено оцінку швидкості збіжності дробу (1), яку запишемо для випадку $N = 2$.

**Theorem.** *Нехай елементи дробу (1) при $N = 2$ належать областям $G_j$ ($c_j \in G_j$):*

$$G_j = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \arg\left(z + \frac{\prod\limits_{k=1}^{j-1} x_k^2}{4}\right)\right| < \pi \right\} \quad (j=\overline{1,2})$$

*і задовольняють умови $|c_1| \leq |x_1| - |x_1 - 1|$, $|c_2| < |x_1^2|(|x_2| - |x_2 - 1|)$,*

$$\frac{\sqrt{1+4c_1}|1+c_1|^2(|x_1| + |x_1 - 1| + |c_1|)}{(|x| - |x-1|)(|x_1| - |c_1|)^2} \leq |c_2|\left(|1+c_1||x_2| - |c_2|\right)\left(1 - \frac{|x_2 - 1|}{|x_2|}\right).$$

*Тоді має місце оцінка швидкості збіжності*

$$|F_n - F| \leq LP(n-1),$$

*де $L$– деяка стала, яка залежить від $x_1$, $x_2$, $P(n-1) = np^{n-1}$, $p = max\{p_1, p_2\}$, $\left|\dfrac{x_j - 1}{x_j}\right| < p_j < 1$ ($j=\overline{1,2}$).*

# Необхідні умови збіжності в середньому кратних тригонометричних рядів

**В.І. Бодрая, О.В. Іващук**

Київський національний університет технологій та дизайну, Україна

*ivashchuk@ukr.net*

Позначимо через $L_1$ простір $2\pi$ - періодичних по кожній змінній інтегровних функцій $f(x) = f(x_1; x_2)$ з нормою

$$\|f\|_1 = \int\limits_{T^2} |f(x)|\, dx < \infty.$$

Нехай $f \in L_1(T^2),\ T^2 = [0; 2\pi)^2$ і її ряд Фур'є має вигляд

$$S\left[f\right] = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} 2^{-\gamma_k} a_{k_1,k_1} cosk_1 x_1 cosk_2 x_2, \tag{1}$$

де $\gamma_k$ – число нулів у вектора $(k_1; k_2)$, а

$$S_n(f; x) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} 2^{-\gamma_k} a_{k_1,k_2} cosk_1 x_1 cosk_2 x_2 \tag{2}$$

$n-$та частинна сума ряду (1).

Кажуть, що ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається в середньому, якщо

$$\|f(x) - S_{n_1,n_2}(f; x)\|_1 \to 0, n_1 \to \infty, n_2 \to \infty.$$

Оскільки це співвідношення виконується не для всіх функцій $f \in L_1$. Тому важливою є задача про встановлення умов на коефіцієнти ряду Фур'є, при виконанні яких цей ряд буде збігатися в середньому.

**Теорема.** *Для збіжності в середньому ряду Фур'є (1) необхідно виконання умови*

$$\sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \frac{|a_{n_1+k_1,n_2+k_2}|}{k_1 k_2} \to 0, n_1 \to \infty, n_2 \to \infty,$$

*а для обмеженості в просторі $L_1$ частинних сум (2) необхідно виконання умови*

$$\sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \frac{|a_{n_1+k_1,n_2+k_2}|}{k_1 k_2} \le C.$$

# Приближение классов периодических функций двух переменных обобщенными суммами Зигмунда

**В.И. Бодрая, О.В. Ивацук**

Киевский национальный университет технологий и дизайна, Украина

*bodrayaviktoriya@mail.ru*

В работе [1] введены классы периодических функций двух переменных $C^{\psi,\overline{\psi}}_{2,\beta,\infty}$ и прямоугольные линейные средние рядов Фурье функций двух переменных $U_n(f;x;\Lambda)$, $x=(x_1,x_2)$.

Пусть $\varphi_i(t)$, $i=1,2$, – непрерывные, монотонно возрастающие при $t\geq 0$ такие, что $\varphi_i(0)=0$. Если величины $\lambda^{(n_i)}_{k_i}$, $k_i\leq n_i$, задаются соотношениями

$$\lambda^{(n_i)}_{k_i}=1-\frac{\varphi_i(k_i)}{\varphi_i(n_i)},$$

то многочлены $U_n(f;x;\Lambda)=Z^{\varphi}_n(f;x)$ будем называть обобщенными прямоугольными суммами Зигмунда.

Через $\mathfrak{M}$ обозначим множество функций $\psi(t)$, непрерывных при $t\geq 0$, монотонно убывающих, выпуклых вниз при $t\geq 1$ и удовлетворяющих условию $\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t)=0$.

Через $\mathfrak{M}'$ обозначим подмножество функций $\psi\in\mathfrak{M}$, для которых

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{\psi(t)}{t}dt<\infty.$$

Функции $\psi(t)$ поставим в соответствие функцию $\eta(t)=\eta(\psi,t)$, связанную при $t\geq 1$ с $\psi(t)$ соотношением $\psi(\eta(t))=\frac{1}{2}\psi(t)$. Положим $\mu(t)=\mu(\psi,t)=t/(\eta(t)-t)$.

Через $\mathfrak{M}'_0$ обозначим множество функций $\psi\in\mathfrak{M}'$, для которых величина $\mu(\psi,t)$ ограничена сверху.

Для верхних граней уклонений многочленов $Z^{\varphi}_n(f;x)$ на классах $C^{\psi,\overline{\psi}}_{2,\beta,\infty}$ получено утверждение.

**Теорема**. *Пусть* $\overline{\psi}_i\in\mathfrak{M}'_0$, $\psi_i\in\mathfrak{M}'_0$, *функции* $\psi_i(t)\varphi_i(t)$, $\overline{\psi}_i(t)\varphi_i(t)$, $i=1,2$, *монотонно возрастают и сохраняют характер выпуклости при* $t\geq 1$. *Тогда при* $n_i\to\infty$, $i=1,2$, *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi,\overline{\psi}}_{2,\beta,\infty};Z^{\varphi}_n\right)=\frac{2|\sin\frac{\beta_1\pi}{2}|}{\pi\varphi_1(n_1)}\int\limits_1^{n_1}\frac{\psi_1(t)\varphi_1(t)}{t}dt+\frac{2|\sin\frac{\beta_1\pi}{2}|}{\pi}\int\limits_{n_1}^{\infty}\frac{\psi_1(t)}{t}dt+$$

$$+\frac{2|\sin\frac{\beta_2\pi}{2}|}{\pi\varphi_2(n_2)}\int\limits_1^{n_2}\frac{\psi_2(t)\varphi_2(t)}{t}dt+\frac{2|\sin\frac{\beta_2\pi}{2}|}{\pi}\int\limits_{n_2}^{\infty}\frac{\psi_2(t)}{t}dt+$$

$$+O(1)\left(\psi_1(n_1)+\psi_2(n_2)+\prod_{j=1}^{2}\left[\frac{|\sin\frac{\overline{\beta}_j\pi}{2}|}{\varphi_j(n_j)}\int\limits_1^{n_j}\frac{\overline{\psi}_j(t)\varphi_j(t)}{t}dt+|\sin\frac{\overline{\beta}_j\pi}{2}|\int\limits_{n_j}^{\infty}\frac{\overline{\psi}_j(t)}{t}dt+\overline{\psi}_j(n_j)\right]\right).$$

1. Задерей П.В. Интегральные представления уклонений линейных средних рядов Фурье на классах дифференцируемых периодических функций двух переменных, Некоторые вопросы теории аппроксимации функций: Сб. научн. тр. / Отв. ред. В.К. Дзядык. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1985, С. 16 – 28.

# Абсолютная суммируемость методом Вороного интегралов с множителями

**Л.Г. Бойцун, Т.И. Рыбникова**

Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара, Украина,

*t.rybnikova@gmail.com*

Пусть функция $f(u)$ интегрируема на каждом конечном промежутке $[0, A]$, $A > 0$, и $S(t) = \int_0^t f(u)du$.

Пусть функция $p(t)$ интегрируема на $[0, y]$, $y > 0$ и $P(y) = \int_0^y p(t)dt \neq 0$.

Говорят, что интеграл $\int_0^\infty f(u)du$ абсолютно суммируется методом Вороного, $|W, p(y)|$ - суммируем, если $\int_0^\infty \tau'(y)dy < \infty$, где

$$\tau(y) = \frac{1}{P(y)} \int_0^y P(y-u)f(u)du = \frac{1}{P(y)} \int_0^y p(y-u)f(u)du$$

Интеграл Фурье функции $f(t) \in L(-\infty, \infty)$ есть

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty f(t) cosu(t-x)dt = \int_0^\infty A(u,x)du.$$

Устанавливаются достаточные условия, накладываемые на функцию $p(t)$, порождающую функциональный метод Вороного, и на функцию-множитель, при которых интеграл Фурье с множителем абсолютно суммируется указанным методом. Приведем одну из таких теорем.

**Теорема.** *Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $\lambda(y)$ такая, что $\lambda''(y) \geq 0$*

$$\int_0^\infty \frac{\lambda(y)}{y+1} (\ln(y+2))^{\frac{1}{2}}\, dy < \infty,$$

$$\int_0^y |f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)du = O\left(t\left(\ln\frac{1}{t}\right)^k\right), k > 0,$$

*тогда интеграл*

$$\int_0^\infty \frac{\lambda(y)A(y,t)P(y)}{(y+1)(\ln(2+y))^k} dy$$

*$|W, p(y)|$ - суммируем в $t = x$, где $p(y)$ и $-p'(y)$ – обе неотрицательные и невозрастающие функции.*

В случае, когда $p(t) = t^{\alpha-1}$, $\alpha > 0$, метод Вороного превращается в известный метод Чезаро порядка $\alpha$. Так что из полученных теорем получаем следствия об абсолютной суммируемости факторизованных интегралов Фурье методом Чезаро порядка $\alpha$.

# Властивості апроксимаційних характеристик в просторах $L_{p[a,b]}$, $p > 0$, як функцій змінної $p$

**Д.М. Бушев, Л.І. Філозоф**

Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк

Позначимо, через

$$L_{p[a,b]} = \left\{ f : \left( \|f\|_p = n(f,p) = \Big( \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \right) \wedge (p > 0) \wedge \right.$$

$$\wedge\Big(n(f,0)=\lim_{p\to 0+0} n(f,p)\Big)\Bigg\}$$

— лінійні простори функцій, які при $p \geq 1$ є нормованими, $F \subset L_{q[a,b]}$, $U_m \subset L_{q[a,b]}$, $A : L_{q[a,b]} \to L_{q[a,b]}$ — відповідно обмежений клас функцій, $m$–вимірний підпростір і довільний оператор в просторі $L_{q[a,b]}$, $n(F,p) = \sup\limits_{f\in F} \|f\|_p$, $E(f,U_m,p) = \inf\limits_{u\in U_m} \|f-u\|_p$, $E(F,U_m,p) = \sup\limits_{f\in F} E(f,U_m,p)$, $\mathcal{E}(f,A,p) = \|f - A(f)\|_p$, $\mathcal{E}(F,A,p) = \sup\limits_{f\in F} \mathcal{E}(f,A,p)$ — відповідно точна верхня межа множини $F$ в просторі $L_{p[a,b]}$, найкраще наближення функції $f \in L_{p[a,b]}$ і заданого класу $F \in L_{p[a,b]}$ $m$–вимірним підпростором $U_m$ і наближення цієї функції і класу заданим оператором $A$, який не залежить від $p$.

*Встановлено, що апроксимаційні характеристики в просторах $L_{p[a,b]}$ для даної функції $f \in L_{q[a,b]}$ і заданого класу $F \in L_{q[a,b]}$ є неспадними функціями на проміжку $[0,q]$ від змінної $p$, де $0 < q \leq \infty$. Функції $n(f,p)$ і $\mathcal{E}(f,A,p)$ — аналітичні на інтервалі $(0,q)$, функція $E(f,U_m,p)$ — неперервна на $[0,q]$ і функція $n(F,p)$, для компактної множини $F$, неперервна на $[0,q]$. Функція $E(f,U_m,p)$ строго зростаюча на $[0,q]$ тоді і тільки тоді, коли міра Лебега значень аргумента $x$, для якого $|f(x) - u^q(x)| = K$, менше $b-a$, тобто $m\Big\{x \in [a,b] : |f(x) - u^q(x)| = K\Big\} < b-a$, де $u^q(x) \in U_m$— многочлен найкращого наближення функції $f$ в просторі $L_{q[a,b]}$.*

Аналогічні твердження справедливі для просторів функцій, заданих на нескінченному проміжку, якщо сталу вагову функцію $1/(b-a)$ замінити додатною ваговою функцією, інтеграл від якої на цьому проміжку дорівнює 1, а також для відповідних просторів функцій багатьох змінних.

Властивості інших апроксимаційних характеристик для функцій і обмежених класів функцій з простору $L_{q[a,b]}$, які означаються за допомогою точних верхніх і нижніх меж, наприклад, найкращий метод наближення серед заданої множини методів, або поперечник по Колмогорову множини, будуть неспадними функціями на $[0,q]$.

Поведінка апроксимаційних характеристик, як функцій від змінної $p$, де $1 \leq p \leq \infty$, для класів згорток в просторах $2\pi$–періодичних функцій розглядалась в роботі [1]. Монотонність та неперервність функцій $n(f,p)$ на проміжку $[0,q]$ встановлена, наприклад, в [2, С. 173–176].


1. Бушев Д.Н., Ковальчук И.Р. О приближении классов сверток, Укр. мат. журн., 1993, 45:1, С. 26–31.

2. Харди Г.Г., Литтльвуд Дж. и Полиа Е. Неравенства. — Гос. изд. иностранной литературы, 1948. — 456 с.


# Оцінка наближення нескінченно диференційовних функцій інтерполяційними аналогами сум Валле Пуссена


**В.А. Войтович**

Інститут математики НАН України, Київ

*viktorvojtovich@gmail.com*


Розглянемо класи $2\pi$–періодичних функцій $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ та $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$ , що задаються наступним чином:

$$C^{\psi}_{\beta,\infty}=\left\{ f\in C: f(x)=\frac{a_0}{2}+\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\mathcal{D}_{\psi,\beta}dt, a_0\in\mathbb{R}, \|\varphi\|_\infty\le 1, \varphi\perp 1\right\},$$

$$C^{\psi}_{\beta}H_\omega=\left\{ f\in C: f(x)=\frac{a_0}{2}+\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\mathcal{D}_{\psi,\beta}dt, a_0\in\mathbb{R}, \omega(\varphi;t)\le\omega(t), \varphi\perp 1\right\},$$

де $\mathcal{D}_{\psi,\beta}(t)\sim\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos(kt+\frac{\pi\beta}{2})$, $\psi(k)>0$, $\beta\in\mathbb{R}$, $\omega(\varphi;t)$ — модуль неперервності функції $\varphi$, а $\omega(t)$ — фіксований модуль неперервності.

Через $\mathfrak{M}$ позначимо множину всіх додатніх, опуклих донизу функцій $\psi(t)$ таких, що $\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t)=0$. Наслідуючи О.І. Степанця [1, с. 94], кожній функції $\psi$ з множини $\mathfrak{M}$ поставимо у відповідність пару функцій $\eta(t)=\psi^{-1}(\psi(t)/2)$ і $\mu(t)=t/(\eta(t)-t)$ і через $\mathfrak{M}^{+}_{\infty}$ позначимо підмножину функцій $\psi$ з $\mathfrak{M}$, для яких величина $\mu(t)$ монотонно зростає і необмежена зверху.

Нехай $\tilde{S}_{n-1}(f;x)$ — тригонометричний поліном порядку $n-1$, що інтерполює неперервну функцію $f(x)$ в точках $x^{(n-1)}_k=\frac{2k\pi}{2n-1}$, $k\in\mathbb{Z}$. Через $\tilde{V}_{n,p}(f;x)$ позначимо інтерполяційні аналоги сум Валле Пуссена з параметрами $n$ і $p$, а саме $\tilde{V}_{n,p}(f;x)=\frac{1}{p}\sum\limits_{k=n-p}^{n-1}\tilde{S}^{(n-1)}_k(f;x)$, де $\tilde{S}^{(n-1)}_k(f;x)=\frac{a^{(n-1)}_0}{2}+\sum\limits_{i=1}^{k}(a^{(n-1)}_i\cos kx+b^{(n-1)}_i\sin kx)$, $a^{(n-1)}_i$ і $b^{(n-1)}_i$ — коефіцієнти Фур'є–Лагранжа функції $f$ за системою вузлів $x^{(n-1)}_k$.

Розглянемо задачу про відшукання асимптотичних рівностей для величин
$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty};\tilde{V}_{n,p};x)=\sup\limits_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}}|f(x)-\tilde{V}_{n,p}(f;x)|$.

**Теорема.** *Нехай $\psi\in\mathfrak{M}^{+}_{\infty}$, $\beta\in\mathbb{R}$, $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності, $p=p(n)$ — довільна послідовність така, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p}{\eta(n)-n}=0$. Тоді для довільного $x\in\mathbb{R}$ при $n\to\infty$*

$$\mathcal{E}\Big(C^{\psi}_{\beta,\infty};\tilde{V}_{n,p};x\Big)=\frac{8}{\pi^2}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\psi(n)\ln\frac{\eta(n)-n}{p}+O(1)\left(\psi(n)+\psi(3n-1)\ln\frac{\eta(n)-n}{p}\right),$$

$$\mathcal{E}\Big(C^{\psi}_{\beta}H_\omega;\tilde{V}_{n,p};x\Big)=\frac{4\theta_\omega}{\pi^2}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\psi(n)\ln\frac{\eta(n)-n}{p}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)dt+$$
$$+O(1)\omega\left(\frac{1}{n}\right)\left(\psi(n)+\psi(3n-1)\ln\frac{\eta(n)-n}{p}\right),$$

*де $\theta_\omega=\theta_\omega(n)\in\left[\frac{2}{3};1\right]$, причому $\theta_\omega=1$, коли $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, а $O(1)$ — величини, рівномірно обмежені по $n$, $p$, $\beta$ і $x$.*

1. Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций. — К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.

# Линейные положительные операторы, порожденные смешанными экспоненциальными статистическими структурами

**Ю.И. Волков**
Кировоградский гос. пед. ун-т, Украина
*yulysenko@i.ua*

Обозначим через $b_{n,k}(x), k=0,1,\ldots$ целочисельную статистическую структуру, зависящую от параметров $x \in X, n \in N$, и такую, что $b(x)b'_{n,k}(x) = (k-nx)b_{n,k}(x)$, где $b(x)$ неотрицательная функция. Примерами таких структур могут служить семества биномиальных распределений, распределений Пуассона, отрицательных биномиальных распределений.

Рассмотрим еще одну вспомогательную структуру, определяемую семейством плотностей $h_{n,k}(t), n \in N, t \in R, k = 0,1,\ldots,$ и такую, что $(at^2 + bt + c)h'_{n,k}(t) = (k - nt)h_{n,k}(t)$, где вектор $(a,b,c)$ может принимать значения $(-1,1,0),(1,1,0),(0,1,0),(1,0,0),(0,0,1),(1,0,1)$. Примерами таких структур могут служить семейства гамма и бета-распределений.

**Определение**. *Смешанной экспоненциальной статистической структурой называется семейство плотностей*

$$p_n(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(x)h_{n,k}(t), t \in R,$$

*зависящее от параметров* $x \in X, n \in N,$

Эта структура порождает положительные линейные операторы

$$P_n(f,x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(x)\int_{-\infty}^{\infty} f(t)h_{n,k}(t)dt,$$

где функция $f$ интегрируема на $(-\infty,\infty)$.

Изучаются аппроксимационные свойства операторов $P_n(f,x)$. Приведем один из примеров таких свойств.

**Теорема.** *Пусть* $f \in H^{\omega}$. *Тогда для* $n > 3a$

$$|P_n(f,x)-f(x)| \leq \omega(1/\sqrt{n})\Big(1+\frac{n}{n-3a}\Big(\frac{nx+b}{n-2a}\Big(b+\frac{a(nx+b)}{n-2a}\Big)+c+\frac{nb(x)}{n-2a}\Big)\Big)+\omega\Big(\Big|\frac{2ax+b}{n-2a}\Big|\Big).$$

Частные случаи операторов типа $P_n(f,x)$ изучались и изучаются многими авторами. Например, если положить

$$b_{n,k}(x) = (nx)^k e^{-nx}/k!,\ x \geq 0,\ h_{n,k}(t) = (nt)^{k+1}e^{-nt}/k!,\ t \geq 0,$$

то оператор $P_n(f,x)$ превращается в оператор Филлипса [1]; если взять

$$b_{n,k}(x) = C_n^k x^k(1-x)^{n-k},\ 0 \leq x \leq 1,\ h_{n,k}(t) = (n+1)C_n^k t^k(1-t)^{n-k},\ 0 \leq t \leq 1,$$

то получим операторы Бернштейна-Дуррмейера [2]; если взять

$$b_{n,k}(x) = (nx)^k e^{-nx}/k!,\ x \geq 0,\ h_{n,k}(t) = (n-1)C_{n+k}^k t^k(1+t)^{-n-k},\ t \geq 0,$$

то получим операторы Гупты-Эркуша [3].

1. Phillips R.S. An inversion formula for Laplase transforms and semi-groups of linear operators, Ann.of Math., 1954, 59, P. 325-356.

2. Durrmeier J.L. Une formule d'inversion, de la transformee de Laplace: Application a la Theorie des Moments, These de 3e Cycle, Faculte des Sciences de l'Universite de Paris, 1967.

3. Gupta V., Erkus E. On a hybrid family of smmation integral type operators, J. Inequal. Pure and Appl. Math.7(1), 2006, Art. 23.

# Наближення функцій із класів $L^{\psi}_{\beta}H_{\omega_p}$ лінійним методом спеціального вигляду

**Д.С. Волковницький**

Слов'янський державний педагогічний університет, Слов'янськ, Україна

*rwfdima5@mail.ru*

Нехай $L_p$, $1 \le p < \infty$ — простір $2\pi$-періодичних сумовних на $(-\pi;\pi)$ в $p$-му степені функцій $\varphi$ з нормою $\|\varphi\|_{L_p} = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$. Розглянемо множину $H_{\omega_p} = \{\varphi \in L_p : \omega_p(\varphi;t) \le \omega(t),\, t \ge 0\}$, $\; 1 \le p < \infty$, де $\omega_p(\varphi;t) = \sup\limits_{|h|\le t} \|\varphi(\cdot + h) - \varphi(\cdot)\|_{L_p}$, $\; \varphi \in L_p$, $\; t \ge 0$, $\omega(t)$ — фіксований модуль неперервності.

Нехай $f \in L_1$ і $S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ — ряд Фур'є функції $f$. Нехай, далі, $\psi(k) \ne 0$ — довільна функція натурального аргументу, $\beta$ — фіксоване дійсне число. Тоді, якщо ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$ є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то її, наслідуючи О.І. Степанця [1, с. 131], будемо називати $(\psi,\beta)$-похідною функції $f$ і позначати $f^{\psi}_{\beta}$, а множину всіх таких функцій $f$ позначатимемо через $L^{\psi}_{\beta}$. Якщо $f \in L^{\psi}_{\beta}$ і $f^{\psi}_{\beta} \in H_{\omega_p}$, то пишуть $f \in L^{\psi}_{\beta}H_{\omega_p}$.

В якості наближуючих агрегатів для функцій $f \in L^{\psi}_{\beta}H_{\omega_p}$ використано тригонометричні поліноми $U^*_{n-1}(f;x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left\{\lambda^{(n)}_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + \nu^{(n)}_k (a_k \sin kx - b_k \cos kx)\right\}$, де $\lambda^{(n)}_k = \lambda^{(n)}_k(\psi;\beta) = (\psi(k) - \psi(2n-k)) \cos\frac{\beta\pi}{2}$, $\nu^{(n)}_k = \nu^{(n)}_k(\psi;\beta) = (\psi(k) - \psi(2n-k)) \sin\frac{\beta\pi}{2}$, $k = 1, 2, ..., n-1$. Метод наближення $U^*_{n-1}$ для класів $L^{\psi}_{\beta}$ при $\psi(k) = q^k$, $q \in (0;1)$, вперше було розглянуто в роботі [2].

**Теорема.** *Нехай числова послідовність* $\psi(k) \in \mathcal{D}_q = \left\{\tau : \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\tau(k+1)}{\tau(k)} = q, \quad q \in [0;1]\right\}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \le p < \infty$ *і* $\omega(t)$ *— деякий модуль неперервності. Тоді для* $q \in (0;1)$ *при* $n \to \infty$ *має місце нерівність*

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta}H_{\omega_p}; U^*_{n-1})_{L_p} \le \frac{2\psi(n)}{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t dt + O(1) \left(\frac{\psi(n)\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{q^{n+1}\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{(1-q)^2 n}\right),$$

*а величина* $\varepsilon_n$ *означається співвідношенням* $\varepsilon_n := \sup\limits_{k\ge n} \left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|$. *Крім цього, для* $q \in$

$\in (0;1)$ *при* $n \to \infty$ *справедливою є рівність*

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta} H_{\omega_1}; U^{*}_{n-1})_{L_1} = \frac{2\psi(n)\theta_\omega}{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t dt + O(1) \left( \frac{\psi(n)\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{q^{n+1}\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{(1-q)^2 n} \right),$$

*де* $\frac{1}{2} \le \theta_\omega \le 1$, *причому* $\theta_\omega = 1$ *у випадку, коли* $\omega(t)$ *— опуклий модуль неперервності, а* $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно* $n$, $p$, $q$ *і* $\beta$.

1. Степанец А.И. Методы теории приближений: В 2 т. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Т.1. — 427 с.

2. Сердюк А.С., Соколенко І.В. Найкраще наближення інтегралів Пуассона функцій з класу $H_\omega$, Доповіді НАН України, 2010, 2, С. 33-37.

# Про різні типи неперервності операторів у просторі неперервних функцій

**Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна

Буковинський державний фінансово-економічний університет, Чернівці, Україна

*math.analysis.chnu@gmail.com*

При дослідженні задач про наближення нарізно і сукупно неперервних функцій [1, 2] виникла потреба розгляду різних типів неперервності операторів, що діють у просторі $C(T)$ неперервних функцій $x : T \to \mathbb{R}$, які визначені на топологічному просторі $T$. Символом $C_p(T)$ позначається простір $C(T)$ з топологією $\mathcal{T}_p$ поточкової збіжності на $T$. Для компактного простору $T$ через $C_u(T)$ ми позначаємо банахів простір $(C(T), \|\cdot\|)$ з рівномірною нормою $\|\cdot\|$, яка породжує топологію $\mathcal{T}_u$ рівномірної збіжності на $C(T)$.

Нехай $\alpha$ і $\beta$ – довільні елементи з множини $\{p, u\}$. Неперервний оператор $A : C_\alpha(T) \to C_\beta(T)$ ми називаємо *$\alpha\beta$-неперервним.* Оскільки $\mathcal{T}_p \subseteq \mathcal{T}_u$, то між введеними чотирма типами неперервності є такі зв'язки: $pu \Rightarrow pp \wedge uu$, $pp \Rightarrow up$ і $uu \Rightarrow up$.

Виявляється, що жодну з цих імплікацій не можна обернути.

**Теорема 1**. *Нехай* $T$ *– нескінченний компакт. Тоді* $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_u$ *і одиничний оператор* $I : C(T) \to C(T)$ *є* $pp$*-неперервним і* $uu$*-неперервним, але не є* $pu$*-неперервним.*

**Теорема 2**. *Нехай* $x_0(t) = 1$ *на* $[0,1]$, $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)dt$ *і* $Ax = f(x)x_0$ *на* $C[0,1]$. *Тоді* $f$ *– лінійний неперервний функціонал на* $C_u[0,1]$, *який розривний у кожній точці як функціонал на* $C_p[0,1]$, *а лінійний оператор* $A : C[0,1] \to [0,1]$ *є* $uu$*-неперервним,* $up$*-неперервним, але не* $pp$*-неперервним.*

Розглянемо функцію Шварца $sp : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, для якої $sp(t,s) = \frac{2ts}{t^2+s^2}$ при $(t,s) \ne (0,0)$ і $sp(0,0) = 0$, – класичний приклад нарізно неперервної і розривної в точці $(0,0)$ функції.

**Теорема 3**. *Оператор* $A : C[0,1] \to C[0,1]$, *який діє за правилом* $(Ax)(s) = sp(x(0), s)$, *де* $0 \le s \le 1$, *є* $pp$*-неперервним,* $up$*-неперервним, але не* $uu$*-неперервним.*

Але з теореми про замкнений графік [4, с.148] легко випливає

**Теорема 4**. *Кожний лінійний* $up$*-неперервний оператор* $A : C(T) \to C(T)$ *є* $uu$*-неперервним.*

1. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. Про наближення нарізно неперервних функцій, $2\pi$-періодичних відносно другої змінної, Карп. матем.публ., 2010, 2:1, С. 4-14.

2. Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В. Про наближення нарізно і сукупно неперервних функцій, Карп. матем.публ., 2010, 2:2, С. 11-21.

3. Маслюченко В.К. Лекції з функціонального аналізу. Ч.2. Лінійні оператори і функціонали. – Чернівці: ЧНУ Рута, 2010. – 192 с.

4. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.

# Апроксимація відображень зі значеннями у просторі неперервних функцій

**Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, О.Н. Нестеренко**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

Буковинський державний фінансово-економічний університет, Чернівці, Україна

*math.analysis.chnu@gmail.com*

Для компактного простору $Y$ символом $C_u(Y)$ позначим банаховий простір всіх неперервних функцій $g : Y \to \mathbb{R}$ з рівномірною нормою $\|g\| = \max\limits_{y\in Y} |g(y)|$, а через $C_p(Y)$ – той же простір з топологією поточкової збіжності.

Тут ми подамо теореми, які істотно розвивають результати праці [1], зокрема, дають відповідь на поставлене там питання. Перша теорема отримується з допомогою конструкції з праці [2].

**Теорема 1.** *Нехай $Y$ – метризовний компакт і $L$ – скрізь щільний лінійний підпростір простору $C_u(Y)$. Тоді існує послідовність скінченновимірних лінійних неперервних операторів $A_n : C_p(Y) \to C_u(Y)$, така, що $imA_n \subseteq L$ для кожного $n$ і $A_n g \to g$ в $C_u(Y)$ для кожного $g \in C_u(Y)$.*

З цієї теореми виводяться такі наслідки, в яких $X$ – топологічний простір, $Y$ – метризовний компакт, $L$ – скрізь щільний лінійний підпростір простору $C_u(Y)$ і $f^x(y) = f(x, y)$.

**Наслідок 1.**Для довільного неперервного відображення $\varphi : X \to C_p(Y)$ існує послідовність неперервних відображень $\varphi_n : X \to C_u(Y)$, така, що $\varphi_n(X) \subseteq L$ для кожного $n$ і $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ в $C_u(Y)$ для кожного $x \in X$.

**Наслідок 2.** Для довільної нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ існує послідовність сукупно неперервних функцій $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, така, що $f_n^x \in L$ для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $x \in X$, і $f_n^x \to f^x$ в $C_u(Y)$ для кожного $x \in X$.

В [1] було зауважено, що для довільного всюди щільного лінійного підпростору $L$ банахового простору $E$ з базисом Шаудера існує послідовність лінійних неперервних операторів $A_n : E \to L$, така, що $A_n g \to g$ в $E$ для кожного $g \in E$. Використовуючи деякі результати з теорії наближень [3], можна отримати і такий результат, в якому оператори $A_n$ не обов'язково лінійні.

**Теорема 2.** *Нехай $L$ – скрізь щільний лінійний підпростір сепарабельного нормованого простору $E$. Тоді існує така послідовність неперервних операторів $A_n : E \to L$, що $A_n x \to x$ в $E$ для кожного $x \in E$.*

1. Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В. Про наближення нарізно і сукупно неперервних функцій, Карп. матем. публ., 2010, 2:2, С. 11-21.

2. Власюк Г.А., Маслюченко В.К. Многочлени Бернштейна і нарізно неперервні функції, Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 336-337. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С. 52-59.

3. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. – М: Наука, 1976. – 320 с.

# Оценка среднего геометрического производной многочлена через равномерную норму многочлена на отрезке

**М.Р. Габдуллин**

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

*MrCoo1@ya.ru*

А. А. Марков [1] в 1889 году доказал, что на множестве $\mathcal{P}_n$, алгебраических многочленов степени не выше $n$ с действительными коэффициентами, справедливо неравенство $\|P'\|_\infty \leqslant n^2\|P\|_\infty$, $\|P\|_\infty = \max\{|P(x)| : x \in [-1,1]\}$. Экстремальным является многочлен Чебышёва 1-ого рода $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $x \in [-1,1]$. В 1982 году Б. Д. Боянов [2] получил следующее обобщение этого неравенства, а именно он доказал, что при всех $p \geqslant 1$

$$\|P'\|_p \leqslant M(n,p)\|P\|_\infty, \quad P \in \mathcal{P}_n, \tag{1}$$

с константой $M(n,p) = \|T_n'\|_p$. Здесь и ниже $\|P\|_p = \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |P(x)|^p dx\right)^{1/p}$.

Функционал $\|\cdot\|_p$ при $p \to 0+$ имеет предел

$$\|P\|_0 = \lim_{p\to 0+} \|P\|_p = \exp\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \ln|P(x)|dx\right),$$

который является средним геометрическим модуля $P$ на $[-1,1]$. В работе рассматривается задача о значении наилучшей константы в неравенстве (1) при $p = 0$:

$$\|P'\|_0 \leqslant M(n)\|P\|_\infty, \quad P \in \mathcal{P}_n.$$

Доказано, что $M(2) = \|T_2'\|_0 = 4/e$ и экстремальным также является многочлен Чебышёва $T_2$. В общем случае получен следующий результат.

**Теорема.** *Для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы оценки*

$$\frac{e}{8}n < M(n) < en.$$

1. Марков А.А. Об одном вопросе Д. И. Менделеева, Зап. Имп. акад. наук. Санкт-Петербург, 1889, 62, С. 1–24.

2. Bojanov B.D. An extension of the Markov inequality, J. Approx. Theory., 1982, 35:2, P. 181–190.

# О РЕГУЛЯРНОСТИ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ТЕЙЛОРА

**М.В. Гаевский, Т.В. Гориславец, П.В. Задерей**
Кировоградский государственный университет им. В. Винниченко, Украина
Киевский национальный университет технологий и дизайна, Украина
*mgaevskiy@gmail.com, utes@bigmir.net*

Через $A(\overline{D})$ обозначим пространство функций $f(\cdot)$, аналитических в $D = \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| < 1\}$ и непрерывных в $\overline{D} = \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| \leq 1\}$ с нормой $\|f\|_{A(\overline{D})} = \max\limits_{z\in\overline{D}} |f(z)|$. Если задана бесконечная матрица $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, $n, k = 0, 1, \ldots$, действительных чисел $\lambda_k^{(n)}$, то каждой функции $f \in A(\overline{D})$ с рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad z \in \overline{D}, \tag{1}$$

поставим в соответствие последовательность рядов

$$U_n(f; \Lambda; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} c_k z^k, \quad z \in \overline{D}. \tag{2}$$

Будем говорить, что ряд (1) суммируется методом $\Lambda$ в точке $z \in \overline{D}$ к значению $f(z)$, если ряд (2) сходится при любом $n = 0, 1, \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(f; \Lambda; z) = f(z)$, $\quad z \in \overline{D}$. Метод суммирования $\Lambda$ регулярен в пространстве $A(\overline{D})$, если для каждой $f \in A(\overline{D})$ и любой $z \in \overline{D}$ ряд (1) суммируется этим методом к числу $f(z)$.

**Теорема.** *Для того, чтобы метод суммирования $\Lambda$ был регулярным в пространстве $A(\overline{D})$, необходимо и достаточно, чтобы:*

*1) для $\forall k = 0, 1, 2, \ldots$ $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_k^{(n)} = 1$;*

*2) существовало число $C_n > 0$ и такое разложение $\lambda_k^{(n)} = \alpha_k^{(n)} + \beta_k^{(n)}$ на вещественные числа $\alpha_k^{(n)}$ и $\beta_k^{(n)}$, что каждая из функций*

$$t_m^{(n)}(x) = \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{m} (\alpha_k^{(n)} \cos kx + \beta_k^{(n)} \sin kx), \quad n = 0, 1, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

*удовлетворяет условию $\int\limits_0^{2\pi} |t_m^{(n)}(x)| dx \leq C_n$, $\quad n = 0, 1, \ldots$, где постоянная $C_n$ не зависит от $m$;*

*3) полная вариация функций*

$$\mathcal{K}_n(x) = \lim_{m\to\infty} B_m^{(n)}(x) = \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} x + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} (\alpha_k^{(n)} \sin kx - \beta_k^{(n)} \cos kx),$$

*где $(B_m^{(n)}(x))' = t_m^{(n)}$, была равномерно ограниченой на $[0; 2\pi]$:*

$$\bigvee_0^{2\pi} \mathcal{K}_n(x) = \int\limits_0^{2\pi} |d\mathcal{K}_n(x)| \leq C.$$

# Асимптотична поведінка розв'язку узагальненого кінетичного рівняння Енскоґа

**І.В. Гап'як, В.І. Герасименко**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

*gapjak@ukr.net, gerasym@imath.kiev.ua*

Досліджуються нелінійні еволюційні рівняння, якими описується кінетична еволюція системи нескінченного числа пружних куль. Для розв'язку задачі Коші для узагальненого кінетичного рівняння Енскоґа у відповідному функціональному просторі та маргінальних функціоналів стану доведено існування асимптотики Больцмана-Ґреда.

В роботі [1] строго обґрунтовано виведення кінетичного рівняння Енскоґа з динаміки системи нескінченного числа пружних куль. На основі сформульованих кластерних розкладів для кумулянтів груп операторів системи пружних куль для початкових станів, які визначаються в термінах одночастинкової (маргінальної) функції розподілу, в просторі послідовностей інтегрованих функцій доведено еквівалентність опису еволюції станів системи початковою задачею для ієрархії рівнянь ББГКІ та початковою задачею для узагальненого кінетичного рівняння Енскоґа і послідовністю явно визначених функціоналів (маргінальних функціоналів стану) від розв'язку такого нелінійного рівняння. В роботі [2] також встановлено зв'язок побудованого узагальненого кінетичного рівняння Енскоґа (марковська апроксимація розв'язку) та відомих марковських кінетичних рівнянь типу рівняння Енскоґа.

У відповідному функціональному просторі встановлено, що в скейлінґовій границі Больцмана-Ґреда [3] асимптотика розв'язку задачі Коші для узагальненого кінетичного рівняння Енскоґа описується кінетичним рівнянням Больцмана, а асимптотики маргінальних функціоналів стану апроксимуються маргінальними функціями розподілу, які задовольняють умові хаосу (в процесі еволюції в системі не виникають кореляції), тобто описують стани статистично незалежних частинок.

1. Gapyak I.V., Gerasimenko V.I. The generalized Enskog kinetic equation, Reports of NAS of Ukraine, 2012, 3, P. 7–13.

2. Gapyak I.V., Gerasimenko V.I. On rigorous derivation of the Enskog kinetic equation// arXiv:1107.5572. – 2011. – 28 p.

3. Cercignani C., Gerasimenko V.I., Petrina D.Ya. Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations // Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997.

# Критерії сильної єдиності екстремального елемента для задачі найкращої несиметричної апроксимації компактнозначного відображення множиною однозначних відображень

**В.О. Гнатюк, У.В. Гудима, Ю.В. Гнатюк**

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

*g-ul@yandex.ru*

Нехай $S$ — компакт, $X$ — лінійний над полем комплексних (дійсних) чисел нормований простір, $C(S,X)$ — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень $g$ компакта $S$ в $X$, неперервних на $S$, з нормою $\|g\| = \max\limits_{s\in S} \|g(s)\|$, $K(X)$ — сукупність всіх непорожніх компактів простору $X$, $C(S,K(X))$ — множина багатозначних неперервних на $S$ відносно метрики Хаусдорфа на $K(X)$ відображень $a$ компакта $S$ в $X$ таких, що для кожного $s \in S$ $a(s) = K_s \in K(X)$, $V \subset C(S, X)$, $\{p_s\}_{s\in S}$ — сім'я неперервних опуклих функцій на $X$ така, що відображення $(s, x) \in S \times X \to p_s(x)$ півнеперервне зверху на $S \times X$.

Задачею найкращої несиметричної апроксимації відображення $a \in C(S, K(X))$ множиною $V \subset C(S, X)$ будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_V^*(a) = \inf_{g\in V} \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p_s(y - g(s)). \tag{1}$$

Елемент $g^* \in V$ назвемо сильно єдиним екстремальним елементом для величини (1), якщо існує додатне число $c$ таке, що

$$\max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p_s(y - g(s)) - \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p_s(y - g^*(s)) \geq c\,\|g - g^*\|, g \in V.$$

В роботі встановлено критерії сильної єдиності екстремального елемента для величини (1). Має місце, зокрема, наступне твердження.

**Теорема.** *Нехай $g^* \in V$ і $V$ є $\Gamma$-множиною відносно $g^*$, в тому числі зірковою відносно $g^*$ або опуклою множиною. Для того щоб елемент $g^*$ був сильно єдиним екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб*

$$\inf\left\{\|g - g^*\|^{-1} \max_{s\in S_a(g^*)} \max_{y\in a(s,g^*)} \max_{f\in\partial_C p_s(y-g^*(s))} \mathrm{Re} f(g^*(s) - g(s)) : g \in V\setminus\{g^*\}\right\} > 0,$$

*де*

$$S_a(g^*) = \left\{s : s \in S, \max_{y\in a(s)} p_s(y - g^*(s)) = \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p_s(y - g^*(s))\right\},$$

$$a(s, g^*) = \left\{y : y \in a(s), p_s(y - g^*(s)) = \max_{y\in a(s)} p_s(y - g^*(s))\right\}, s \in S_a(g^*),$$

$$\partial_C p_s(y - g^*(s)) = \{f : f \in X^*, \mathrm{Re} f \in \partial p_s(y - g^*(s))\}, s \in S_a(g^*), y \in a(s, g^*).$$

# Метод січної площини розв'язування задачі найкращої у розумінні опуклої Ліпшицевої функції рівномірної апроксимації компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором

**Ю.В. Гнатюк, В.О. Гнатюк, У.В. Гудима**

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Україна

*g-ul@yandex.ru*

Нехай $S$ — компакт, $X$ — лінійний над полем комплексних (дійсних) чисел нормований простір, $C(S, X)$ — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень $g$ компакта $S$ в $X$, неперервних на $S$, з нормою $\|g\| = \max_{s\in S} \|g(s)\|$, $K(X)$ — сукупність всіх непорожніх компактів простору $X$, $C(S, K(X))$ — множина багатозначних неперервних на $S$ відносно метрики Хаусдорфа на $K(X)$ відображень $a$ компакта $S$ в $X$ таких, що для кожного $s \in S$ $a(s) = K_s \in K(X)$, $V$ — скінченновимірний підпростір простору $C(S, X)$, породжений лінійно незалежними відображеннями $g_i \in C(S, X)$, $i = \overline{1, n}$, $p$ — задана на $X$ дійснозначна опукла ліпшицева функція.

Задачею найкращої у розумінні функції $p$ рівномірної апроксимації відображення $a \in C(S, K(X))$ підпростором $V = \left\{g : g = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i g_i, \alpha_i \in R, i = \overline{1,n}\right\}$ будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_V^*(a) = \inf_{g \in V} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p(y - g(s)) = \inf_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in R^n} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p\left(y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(s)\right). \quad (1)$$

Якщо існує відображення $g^* = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^* g_i$, $\alpha_i^* \in R^n$, $i = \overline{1,n}$, таке, що

$$\alpha_V^*(a) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p(y - g^*(s)) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p\left(y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* g_i(s)\right),$$

то його будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

У роботі на основі ідеї методу січних площин розв'язування задачі опуклого програмування побудовано збіжний чисельний метод відшукання величини (1) та її екстремального елемента, отримано двосторонні оцінки збіжності для величини (1), які дозволяють знайти цю величину з наперед заданою точністю.

# Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних

**А.П. Голуб, Л.О. Чернецька**
Інститут математики НАН України, Київ
*super.girl.lilya@mail.ru*

Узагальнені моментні зображення були запроваджені В.К. Дзядиком [1] у 1981 році і виявилися зручним інструментом для побудови та вивчення апроксимацій Паде та їх узагальнень (див. [2]). Природно розглянути їх двовимірний аналог.

Двовимірній числовій послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ можна поставити у відповідність формальний степеневий ряд від двох змінних

$$f(z, w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m. \quad (1)$$

Для рядів вигляду (1) можна визначати раціональні апроксиманти за різними схемами (див. [3, с. 323]). Має місце наступний результат, що узагальнює теорему В.К. Дзядика [1] на випадок функцій двох змінних.

**Теорема 1**. *Нехай формальний степеневий ряд від двох змінних має вигляд (1) і нехай для двовимірної послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення $s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n} \rangle$, де $x_{k,m} \in \mathscr{X}$, $y_{j,n} \in \mathscr{Y}$, $k, m, j, n \in \mathbb{Z}_+$, $\langle .,. \rangle$ – білінійна форма, означена на добутку лінійних просторів $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$. Тоді, якщо для деяких $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ існує нетривіальний узагальнений поліном*

$$Y_{N_1,N_2} = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} y_{j,n},$$

*такий що виконується умова біортогональності*

$$\langle x_{k,m}, Y_{N_1,N_2} \rangle = 0$$

*при* $(k,m) \in ([0,N_1] \times [0,N_2]) \setminus \{(N_1,N_2)\}$ *і* $c_{N_1,N_2}^{(N_1,N_2)} \neq 0$, *то тоді раціональна функція*

$$\frac{1}{Q_{N_1,N_2}(z,w)} \left\{ \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{n=1}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} z^{N_1-j} w^{N_2-n} \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{m=0}^{n-1} s_{k,m} z^k w^m + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=1}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} z^{N_1-j} w^{N_2-n} \sum_{k=j}^{N_1+j} \sum_{m=0}^{n-1} s_{k,m} z^k w^m + \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} z^{N_1-j} w^{N_2-n} \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{m=n}^{N_2+n} s_{k,m} z^k w^m \right\},$$

*де*

$$Q_{N_1,N_2}(z,w) = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} z^{N_1-j} w^{N_2-n},$$

*матиме розклад в степеневий ряд, коефіцієнти якого співпадатимуть з коефіцієнтами ряду (1) для всіх* $(j,n) \in ([0,2N_1] \times [0,2N_2]) \setminus \{(2N_1,2N_2)\}$ .


1. Дзядык В.К. Об обощении проблемы моментов, Докл. АН УССР, 1981, 6, С. 8 - 12.

2. Голуб А.П. Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. — К.: Ін-т математики НАНУ, 2002. — 222 с.

3. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.Р. Аппроксимации Паде. — М.: Мир, 1986. — 502 с.


# ПРО РЕГУЛЯРНІСТЬ ЛІНІЙНИХ МЕТОДІВ ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ ТЕЙЛОРА


**Т.В. Гориславець, Н.М. Задерей**

Київський національний університет технологій та дизайну, Україна

Національний технічний університет України "КПІ" , Київ, Україна

*utes@bigmir.net, ZadereyPV@ukr.net*


Нехай функція $f(z)$ задана і аналітична в крузі $D = \{z : |z| < 1\}$ і неперервна при $|z| \leq 1$. Множину таких функцій позначимо через $A(\overline{D})$.

Нехай $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}, \ n,k = 0,1,2,\ldots, \ \lambda_k^{(n)} = 0$ при $k \geq n$ — трикутна матриця чисел.

Кожній функції $f \in A(\overline{D})$ поставимо у відповідність поліном

$$U_n(f;z;\Lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{(n)} a_k z^k.$$

Метод підсумовування $U_n(\Lambda)$ називається регулярним в просторі аналітичних функцій, якщо для довільної функції $f \in A(\overline{D})$ і для довільної точки $z \in \overline{D}$ виконується співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f;z;\Lambda) = f(z).$$

**Теорема.** *Якщо існує число* $M$ *і розклад* $\lambda_k^{(n)} = \alpha_k^{(n)} + \beta_k^{(n)}$ *такі, що*

$$a) \ \sum_{k=0}^{n-1} \left( |\triangle \alpha_k^{(n)}| + |\triangle \beta_k^{(n)}| \right) + \sum_{k=2}^{n-2} \left( \left| \sum_{i=1}^{q_{n,k}} \frac{\triangle \alpha_{k-i}^{(n)} - \triangle \alpha_{k+i}^{(n)}}{i} \right| + \left| \sum_{i=1}^{q_{n,k}} \frac{\triangle \beta_{k-i}^{(n)} - \triangle \beta_{k+i}^{(n)}}{i} \right| \right) \leq M,$$

*то для того, щоб метод підсумовування $U_n(\Lambda)$ був регулярним в просторі аналітичних функцій необхідно і достатньо виконання умов а) і*

*б)* $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(|\beta_k^{(n)}| + |\alpha_{n-k}^{(n)}| + |\beta_{n-k}^{(n)}|) \le M.$

***Наслідок.*** *Якщо існує число $M$ і розклад $\lambda_k^{(n)} = \alpha_k^{(n)} + \beta_k^{(n)}$ такі, що*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{n} \left(|\triangle^2 \alpha_{k-1}^{(n)}| + |\triangle^2 \beta_{k-1}^{(n)}|\right) \le M,$$

*то для того, щоб метод підсумовування $U_n(\Lambda)$ був регулярним в просторі аналітичних функцій необхідно і достатньо виконання умов а) і б).*

# Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів $(\psi,\beta)$-диференційовних функцій

**У.З. Грабова, А.С. Сердюк**
Волинський національний університет ім. Лесі Українки, Луцьк, Україна
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
*grabova_u@ukr.net* *serdyuk@imath.kiev.ua*

Нехай $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p < \infty$ — клас $2\pi$–періодичних функцій $f(\cdot)$, що при всіх $x \in \mathbb{R}$ представляються згортками

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_\beta(x-t)\varphi(t)dt, \ a_0 \in \mathbb{R}, \ \|\varphi\|_p \le 1, \ \varphi \perp 1,$$

а $\Psi_\beta(t)$ — функція з простору $L_{p'}$, $p' = \frac{p}{p-1}$, з рядом Фур'є вигляду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\big), \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Через $B$ позначимо множину монотонно спадних при $t \ge 1$ функцій $\psi(t)$, для кожної з яких існує стала $K$ така, що $\psi(k)/\psi(2k) \le K$, а через $\Theta_p$, $1 \le p < \infty$ — множину послідовностей, для яких існують сталі $\varepsilon > 1/p$ і $A > 0$ такі, що $(k+1)^\varepsilon \psi(k+1) \le Ak^\varepsilon \psi(k), k \in \mathbb{N}$.

Вважаючи, що послідовність $\psi(k)$, що визначає клас $C^{\psi}_{\beta,p}$, є слідом на множині $\mathbb{N}$ деякої функції $\psi(t)$ неперервного аргументу, розглянемо множину $F$ усіх опуклих донизу при $t \ge 1$ функцій $\psi(t) > 0$, котрі задовольняють умови $\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t) = 0$ і $\eta'(t) = \eta'(t+0) \le K < \infty$, де $\eta(t) = \eta(\psi;t) = \psi^{-1}\big(\frac{1}{2}\psi(t)\big)$, $\psi^{-1}$ — обернена до $\psi$ функція.

На класах $C^{\psi}_{\beta,p}$ розглядається задача про знаходження порядкових оцінок найкращих рівномірних наближень

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C = \sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,p}} \inf_{t_{n-1}} \|f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_C$$

тригонометричними поліномами $t_{n-1}$ порядку $n-1$ та рівномірних наближень сумами Фур'є $S_{n-1}(f;\cdot)$ порядку $n-1$

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C = \sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,p}} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_C.$$

**Теорема.** *Нехай при* $1<p<\infty$ $\psi \in B\cap\Theta_p$, *а при* $p=1$ $\psi\in F\cap B\cap\Theta_p$ *і послідовність* $\left\{1/\psi(k)\right\}_{k=1}^{\infty}$ *опукла вгору або вниз. Тоді існують додатні сталі* $K_p^{(1)}$ *і* $K_p^{(2)}$, *залежні, можливо, від* $\psi$ *і* $p$ *такі, що для довільних* $\beta\in\mathbb{R}$ *і* $n\in\mathbb{N}$

$$K_p^{(1)}\psi(n)n^{\frac{1}{p}} \le E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \le \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \le K_p^{(2)}\psi(n)n^{\frac{1}{p}}.$$

Наведена теорема доповнює ряд відомих порядкових оцінок наближень сумами Фур'є та найкращих наближень класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ в рівномірній та інтегральних метриках, викладених в монографії О.І. Степанця [1].

1. Степанец А.И. Методы теории приближений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч.II. — 468 с.

## Умови екстремальності елемента для задачі найкращої несиметричної апроксимації компактнозначного відображення множиною однозначних відображень

**У.В. Гудима, В.О. Гнатюк, Ю.В. Гнатюк**

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Україна

*g-ul@yandex.ru*

Нехай $S$ — компакт, $X$ —лінійний над полем комплексних (дійсних) чисел нормований простір, $C\,(S,X)$ — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень $g$ компакта $S$ в $X$, неперервних на $S$, з нормою $\|g\| = \max\limits_{s\in S}\|g\,(s)\|$, $K\,(X)$ — сукупність всіх непорожніх компактів простору $X$, $C\,(S,K\,(X))$ — множина багатозначних неперервних на $S$ відносно метрики Хаусдорфа на $K\,(X)$ відображень $a$ компакта $S$ в $X$ таких, що для кожного $s\in S$ $a\,(s)=K_s\in K\,(X)$, $V\subset C\,(S,X)$, $\{p_s\}_{s\in S}$ — сім'я неперервних опуклих функцій на $X$ така, що відображення $(s,x)\in S\times X\to p_s\,(x)$ півнеперервне зверху на $S\times X$.

Задачею найкращої несиметричної апроксимації відображення $a\in C\,(S,K\,(X))$ множиною $V\subset C\,(S,X)$ будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_V^*\,(a) = \inf_{g\in V}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p_s\,(y-g\,(s))\,. \tag{1}$$

Якщо існує елемент $g^*\in V$ такий, що $\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in a(s)} p_s\,(y-g^*\,(s)) = \alpha_V^*\,(a)$, то його назвемо екстремальним елементом для величини (1). В роботі встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремальності елемента для величини (1). Має місце, зокрема, наступне твердження.

**Теорема.** *Нехай* $V$ *є* $\Gamma^*$*-множиною відносно* $g^*\in V$, *в тому числі зірковою відносно* $g^*\in V$ *або опуклою множиною. Для того, щоб елемент* $g^*$ *був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента* $g\in V$ *існували* *елементи* $s_g \in S, y_g \in a(s_g), f_g \in X^*$ *такі, що*

$$\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p_s(y - g^*(s)) = \max_{y\in a(s_g)} p_{s_g}(y - g^*(s_g)) = p_{s_g}(y_g - g^*(s_g)),$$

$$\mathrm{Re} f_g \in \partial p_{s_g}(y_g - g^*(s_g)),$$
$$\mathrm{Re} f_g(g(s_g) - g^*(s_g)) \le 0.$$

# Нерівності для внутрішніх радіусів в екстремальних задачах про неперетинні області

**І.В. Денега**
Інститут математики НАН України, Київ
*iradenega@yandex.ru*

Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ – множини натуральних і дійсних чисел, відповідно, $\mathbb{C}$ – комплексна площина, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ – її одноточкова компактифікація, $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$. Через $r(B,a)$ будемо позначати внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ (див. [1 – 3]), $\chi(t) = \frac{1}{2}(t + t^{-1})$.

Нехай $n \in \mathbb{N}$. Систему точок $A_n := \left\{a_k \in \mathbb{C} :\ k = \overline{1,n}\right\}$, будемо називати *n-променевою*, якщо $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1,n}$, $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi$. При цьому $a_{n+1} := a_1$, $\alpha_k := \frac{1}{\pi}\arg\frac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1,n}$.

Для довільної $n$-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}$ і $\gamma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ позначимо "керуючий" функціонал:

$$\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) := \prod_{k=1}^{n}\left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2} \cdot \prod_{k=1}^{n}|a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}.$$

В роботах ([1], стр. 68, №9.2, [3], стр. 381, №16) була сформульована наступна екстремальна задача.

**Задача.** Довести, що максимум функціонала $J_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0)\prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)$, де $B_0$, $B_1$, $B_2$, ..., $B_n$, $n \ge 2$ – попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$ і $\gamma \le n$, досягається для деякої конфігурації областей, які мають $n$-кратну симетрію.

О.К. Бахтін в монографії [2] запропонував метод "керуючих" функціоналів, який дає змогу послабити вимоги на геометрію розташування систем точок. Завдяки цьому вдалося узагальнити постановку задачі В.М. Дубиніна.

Отримано наступне твердження.

**Теорема.** *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = \begin{cases} \sqrt[8]{n}, & n = \overline{2,6} \\ \sqrt[3]{n} + \frac{1}{3}, & n \ge 7 \end{cases}$. *Тоді для будь-якої n-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *такої, що* $\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) = 1$, $\mathcal{L}^{(0)}(A_n) \le 1$, *і будь-якого набору взаємно неперетинних областей* $B_k$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0$, $(k = \overline{1,n})$ *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}(D_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k),$$

*де* $D_k$, $d_k$, $k = \overline{0,n}$, $d_0 = 0$, *— кругові області та полюси квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

1. Дубинин В. Н. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного, Успехи мат. наук, 1994, 49:1, С. 3 – 76.

2. Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б. Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе. – Київ: Праці ін-ту мат-ки НАН України, 2008. — 308 с.

3. Дубинин В.Н. Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного. – Владивосток: Дальнаука ДВО РАН, 2009. — 390 с.

# Тригонометричні поперечники узагальнених класів Нікольського–Бєсова

**Н.В. Дерев'янко**

Інститут математики НАН України, Київ

*nadyaderevyanko@gmail.com*

Досліджуються тригонометричні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у метриці простору $L_q$. При певному виборі функцій $\Omega(t)$ дані класи співпадають з відомими класами Нікольського-Бєсова $B^r_{p,\theta}$. Надалі будемо вважати, що $\Omega(t)$ задана функція однієї змінної типу модуля неперервності порядку $l$, яка задовольняє умови Барі–Стєчкіна $(S)$ і $(S_l)$ [1].

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ — евклідів простір з елементами $x = (x_1, ..., x_d)$ і $L_q(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^d [-\pi;\pi]$, — простір $2\pi$-періодичних по кожній змінній функцій $f$, для яких

$$\|f\|_p = \left( (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\pi_d} |f(x)|.$$

Тригонометричний поперечник для функціонального класу $F \subset L_q$ визначається таким чином:

$$d^T_m(F, L_q) = \inf_{\{k^j\}_{j=1}^m} \sup_{f\in F} \inf_{\{c_j\}_{j=1}^m} \left\| f(\cdot) - \sum_{j=1}^m c_j\, e^{i(k^j,\cdot)} \right\|_q ,$$

де $k^j = (k^j_1, ..., k^j_d)$, $j = \overline{1,m}$ — набір векторів із цілочисельної решітки $\mathbb{Z}^d$, $c_j$ — довільні числа. Нагадаємо, що тригонометричний поперечник $d^T_m(F, L_q)$ був введений Р.С. Ісмагіловим [2].

Сформулюємо отримані результати.

**Теорема 1.** *Нехай* $1 \leq p < 2 \leq q < p/(p-1)$, $1 \leq \theta \leq \infty$. *Функція* $\Omega(t)$ *задовольняє умову* $(S)$ *при деякому* $\alpha > d$, *а також умову* $(S_l)$. *Тоді*

$$d^T_m(B^{\Omega}_{p,\theta},\ L_q) \asymp \Omega(m^{-1/d}) m^{1/p-1/2}\ . \tag{1}$$

**Теорема 2.** *Нехай* $1 \le q \le p \le \infty$ *або* $1 \le p \le q \le 2$ *і* $1 \le \theta \le \infty$ . *Функція* $\Omega(t)$ *задовольняє умову* $(S)$ *при деякому* $\alpha > d(1/p-1/q)_+$, *а також умову* $(S_l)$. *Тоді*

$$d_m^T(B_{p,\theta}^\Omega, L_q) \asymp \Omega(m^{-1/d})m^{(1/p-1/q)_+} \ .$$

Зауважимо, що у випадку $\Omega(t) = t^r,\ r > 0$, класи $B_{p,\theta}^\Omega$ співпадають з класами $B_{p,\theta}^r$ і відповідний до (1) результат був отриманий в [3].

1. Бари Н.К., Стечкин С.Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций, Тр. Моск. мат. о-ва, 1956, 5, С. 483 – 522.

2. Исмагилов Р.С. Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами, Успехи мат. наук, 1974, 29:3, С. 161 – 178.

3. Романюк А.С., Романюк В.С. Тригонометрические и ортопроекционные поперечники классов периодических функций многих переменных, Укр. мат. журн., 2009, 61:10, С. 1348 – 1366.

# Некоторые вопросы наилучшей полиномиальной аппроксимации целых трансцендентных функций одной и многих комплексных переменных

**С. И. Жир, С. Б. Вакарчук**

Академия таможенной службы Украины,

Днепропетровский университет им. А. Нобеля

*sbvakarchuk@mail.ru*

В сообщении будут представлены результаты, продолжающие исследования авторов [1]-[3]. Приведем один из них. Пусть $\mathbb{T}^m := \{\mathbf{w} = (w_1, ..., w_m) \in \mathbb{C}^m : |w_j| = 1,\ j = \overline{1,m}\}$; $U^m := \{\mathbf{z} = (z_1, ..., z_m) \in \mathbb{C}^m : |z_j| < 1,\ j = \overline{1,m}\}$; $d\mu_m(\mathbf{w}) := (2\pi)^{-m} d\theta_1 ... d\theta_m (\mathbf{w} \in \mathbb{T}^m)$; $d\theta_m(\mathbf{z}) := \pi^{-m} d\sigma(z_1)...d\sigma(z_m)$, $d\sigma(z_j) := dx_j dy_j, j = \overline{1,m}$; $\mathbf{rw} := (r_1 e^{i\theta_1}, ..., r_m e^{i\theta_m})$, где $\mathbf{w} \in \mathbb{T}^m, \mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^m$. Под $H_q(U^m), 1 \leqslant q \leqslant \infty$, понимаем банахово пространство Харди аналитических в $U^m$ функций $f$, для которых $\|f\|_q = \lim\{M_q(f, \mathbf{r}) : \mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^m, r_j \to 1-0, j = \overline{1,m}\} < \infty$, где

$$M_q(f,\mathbf{r}) := \left\{ \int_{\mathbb{T}^m} |f(\mathbf{rw})|^q d\mu_m(\mathbf{w}) \right\}^{1/q},\ 1 \leqslant q < \infty;\quad M_\infty(f,\mathbf{r}) := \sup\{|f(\mathbf{rw})| : \mathbf{w} \in \mathbb{T}^m\}.$$

Рассмотрим пространство полиномов $\mathbb{P}_n := \left\{ \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{n} c_\mathbf{k} \mathbf{z}^\mathbf{k} : c_\mathbf{k} \in \mathbb{C} \right\}$, где $\mathbf{k} = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{Z}_+^m$; $|\mathbf{k}| := k_1 + ... + k_m$; $\mathbf{z}^\mathbf{k} := z_1^{k_1} ... z_m^{k_m}$; $n \in \mathbb{Z}_+$. Символом $E(f, \mathbb{P}_n, H_q(U^m)) := \inf\{\|f - p_n\|_q : p_n \in \mathbb{P}_n\}$ обозначим величину наилучшего приближения функции $f \in H_q(U^m)$ подпространством $\mathbb{P}_n$.

Вместо круга $|z| < 1$ (случай $m = 1$) рассмотрим произвольную ограниченную полную $m$-круговую область $D \subset \mathbb{C}^m$ с центром в начале координат. Через $\{D_R\} \subset \mathbb{C}^m$, где $R > 0$, обозначим семейство полных $m$-круговых областей таких, что для любой точки $\mathbf{z} \in D_R$ точка $\dfrac{\mathbf{z}}{R} := \left(\dfrac{z_1}{R}, ..., \dfrac{z_m}{R}\right) \in D$. Для целой функции $f$ полагаем $M_{f,D}(R) := \max\{|f(\mathbf{z})| : \mathbf{z} \in D_R\}$ и, следуя М. Н. Шеремете [4], определим для неё обобщенную характеристику роста $\rho_f(\alpha, \beta) = \varlimsup\limits_{R \to \infty} \dfrac{\alpha(M_{f,D}(R))}{\beta(\ln R)}$, где функции $\alpha$ и $\beta$ принадлежат классам $\Lambda$ и $L^0$ соответственно. Имеет место следующая

**Теорема.** *Пусть для функции* $F(x,c) := \beta^{-1}(c\alpha(x))$, *где* $\beta^{-1}$ — *обратная к* $\beta$ *функция, при любом* $c \in (0,\infty)$ *и* $x \to \infty$ *выполнено условие* $\dfrac{dF(x,c)}{d\ln x} = O(1)$; $\gamma$ — *конечное положительное число и* $f \in H_q(U^m)$. *Тогда равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(n)}{\beta[-n^{-1}\ln E(f,\mathbb{P}_n,H_q(U^m))]} = \gamma$$

*является необходимым и достаточным для того, чтобы функция* $f$ *была целой трансцендентной обобщенного порядка роста* $\rho_f(\alpha,\beta) = \gamma$.

1. Вакарчук С.Б., Жир С.И. О полиномиальной аппроксимации целых трансцендентных функций в комплексной плоскости, Зб. праць Ін-ту математики НАН України "Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання", 2005, 2:2, С. 27–42.

2. Вакарчук С.Б., Жир С.И. О наилучшем полиномиальном приближении целых трансцендентных функций обобщенного порядка, Укр. мат. журн., 2008, 60:8, С. 1011–1026.

3. Vakarchuk S.B., Zhir S.I. The best polynomial approximations of entire transcendental functions with generalized growth order in Banach spaces $\mathcal{E}'_p(G)$ and $\mathcal{E}_p(G), p \geqslant 1$, Journal of Mathematical Sciences, 2011, 179:2, P. 300-327.

4. Шеремета М.Н. О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов её степенного разложения, Известия вузов. Математика, 1967, 2, С. 100-108.

# Про збіжність в середньому рядів Тейлора

**П.В. Задерей, Р.В. Товкач**

Київський національний університет технологій та дизайну, Україна

*rtovkach@ukr.net*

Нехай функція $f(z)$ аналітична в області $\Delta := D_\infty \bigcup D$, де область $D = \{z: \ |z| < 1\}$, а область $D_\infty = \{z : |z| > 1\}$, $f(\infty) = 0$.

Добре відомо, що

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad z \in D, \\ \\ f_2(z) = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^{-k}, \ z \in D_\infty. \end{cases} \tag{1}$$

Розглянемо клас $CS$ аналітичних в області $\Delta$ функцій із нормою

$$\|f\|_1^* = \lim_{r\to 1} \left\| f(re^{it}) - f(\frac{1}{r}e^{it}) \right\|_1 < \infty.$$

Під збіжністю в середньому будемо розуміти

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f(e^{it}) - S_n(f;e^{it}) \right\|_1^* = 0. \tag{2}$$

Відомо, що для $\forall f \in H_1(D)$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\|_1 = 0.$$

Ф.Рісс (див.[1, с. 599]) побудував приклад такої функції $f^*(z)$, аналітичної в області $D = \{z : \ |z| < 1\}$, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|f^* - S_n(f^*)\|_1 = B < \infty.$$

Таким чином частинна сума $S_n(f^*;z)$ її ряду Тейлора не збігається в середньому до функції $f^*(z)$. Є ряд робіт (див.[2]–[4]), де достатні умови збіжності в середньому рядів Тейлора дано в інших термінах.

Основним результатом є така теорема.

**Теорема.** *Нехай функція $f \in CS$ і має місце (1). Тоді для того, щоб виконувалося співвідношення (2), необхідно, щоб*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{|c_{n+k}|+|c_{-n-k}|}{k}=0.$$


1. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. — М. : Физматгиз, 1961. — 936 с.

2. Задерей П. В. О сходимости в среднем рядов Тейлора и Лорана, Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання : пр. Ін-ту математики НАН України. — К., 2003, 1:1, С. 307—314.

3. Степанец А. И. Методы теории приближения. — Киев : Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 2 — 468 с.

4. Суетин П. К. Ряды по многочленам Фабера. — М. : Наука, 1984. — 336 с.


# Про насичення полігармонійних інтегралів Пуассона


**О.О. Задорожний, І.В. Кальчук, Ю.І. Харкевич**

Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк

*kalchuk_i@ukr.net*


Нехай задано метод підсумовування рядів Фур'є $U_\delta(\Lambda)$, визначений послідовністю функцій $\Lambda = \{\lambda_k(\delta)\}$ $(k = 1,2,\ldots)$, що задані на деякій множині зміни параметра $\delta$ з граничною точкою $\delta_0$, яка може бути і нескінченністю, тобто кожній $f \in C$ з рядом Фур'є $S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ ставиться у відповідність ряд

$$U_\delta(f;x;\Lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_\delta(k)(a_k\cos kx + b_k \sin kx),$$

який ми вважаємо рівномірно збіжним відносно $x$, принаймні для значень $\delta$ із околу $\delta_0$.

Розглянемо випадок, коли $\lambda_k(\delta) = \lambda_k(\delta;n) = e^{-\frac{k}{\delta}}\sum\limits_{l=0}^{n-1}(1-e^{-\frac{2}{\delta}})^l Q(l;k)$, де

$$Q(l;k) = \frac{k(k+2)(k+4)\ldots(k+2l-2)}{l!2^l},\quad k=0,1,2\ldots,\quad Q(0;k)=1,\quad \delta>0,\ \delta_0=\infty.$$

Тоді ми отримаємо метод підсумовування

$$P_n(\delta;f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_k(\delta;n)\,(a_k\cos kx + b_k\sin kx) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k(\delta;n)\cos ktdt,$$

який називають $n$–гармонійним інтегралом Пуассона функції $f$ (див. [1]).

**Означення 1 [2].** *Кажуть, що метод підсумовування $U_\delta(f;x;\Lambda)$ рядів Фур'є є насиченим методом в просторі $C$ з порядком насичення $\varphi_\Lambda(\delta)$, якщо існує додатна функція $\varphi_\Lambda(\delta)$ монотонно спадна до нуля при $\delta \to \delta_0$, така, що для довільної неперервної $2\pi$–періодичної функції $f(x)$ зі співвідношення $\|f(x) - U_\delta(f;x;\Lambda)\|_C = o(\varphi_\Lambda(\delta))$, $\delta \to \delta_0$,* *випливає, що* $f(x) \equiv \mathrm{const}$, *і знайдеться хоча б одна функція* $f(x)$ *відмінна від сталої, для якої* $\|f(x) - U_\delta(f; x; \Lambda)\|_C = O(\varphi_\Lambda(\delta)), \quad \delta \to \delta_0$. *Крім того, множина функцій* $\Phi(\Lambda)$, *для яких виконується останнє співвідношення називається класом насичення заданого методу* $U_\delta(f; x; \Lambda)$.

Показано, що $n$–гармонійний інтеграл Пуассона $P_n(\delta; f; x)$ є насиченим методом із порядком насичення $\varphi_\Lambda(\delta) = \frac{1}{\delta^n}$; класом насичення при парному $n$ є множина функцій $f \in C$, для яких $f^{(n-1)} \in \mathrm{Lip}1$, а при непарному $n$ є множина функцій $f \in C$, для яких $\tilde{f}^{(n-1)} \in \mathrm{Lip}1$, де $\tilde{f}$ — функція тригонометрично спряжена з функцією $f$.

1. Тиман М.Ф. Аппроксимация и свойства периодических функций: Монография. — Київ: Наукова думка, 2009. — 376 с.

2. Степанец А.И. Методы теории приближения. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч.I. — 427 с.

# Плотные подмножества в классе обобщенно выпуклых множеств

**Ю.Б. Зелинский**
Институт математики НАНУ, Киев, Украина
*zel@imath.kiev.ua*

В докладе будут обсуждены вопросы, связанные с одной гипотезой Л.Айзенберга: Ограниченная область (компакт) являются сильно линейно выпуклыми тогда и только тогда, когда их можно аппроксимировать изнутри (извне) ограниченными линейно выпуклыми областями с гладкими класса $C^2$ границами.

# Про виняткову множину в асимптотичних оцінках зверху для інтегралів типу Лапласа–Стілт'єса

**Д.Ю. Зікрач, О.Б. Скасків**
Українська академія друкарства
Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна
*zikrach.dm@gmail.com, matstud@franko.lviv.ua*

Нехай $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty), p \geq 2$. Для $x = (x_1, \ldots, x_p), y = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}_+^p$ вживатимемо наступні позначення

$$\|x\| = \sum_{i=1}^p x_i, \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^p x_i y_i, |x| = \left(\sum_{i=1}^p x_i^2\right)^{1/2}.$$

Для міри $d\theta_p = dP \times dt$, що є прямим добутком ймовірнісної міри $dP$ на частині одиничної сфери, що лежить в першому октанті $S_1 = \{x \in \mathbb{R}_+^p : |x| = 1\}$, та міри Лебега на промені $[0, +\infty)$, і вимірної множини $E \subset \mathbb{R}_+^p$ визначимо

$$\theta_p(E) = \int\limits_E d\theta_p,$$

звідки, зокрема,

$$\theta_p(\mathbb{R}_+^p) = +\infty.$$

Нехай $\nu$ — зліченно-адитивна невід'ємна на $\mathbb{R}_+^p$ міра з необмеженим носієм $\operatorname{supp}\nu$, $f(x)$ — довільна невід'ємна $\nu$-вимірна функція на $\mathbb{R}_+^p$. Через $\mathcal{I}^p(\nu)$ позначимо клас функцій $F\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, зображуваних збіжним для всіх $\sigma \in \mathbb{R}^p$ інтегралом вигляду

$$F(\sigma) = \int_{\mathbb{R}_+^p} f(x) e^{\langle\sigma, x\rangle} \nu(dx).$$

Для $F \in \mathcal{I}^p(\nu), \sigma \in \mathbb{R}^p_+$ та $t > 0$ позначимо

$$\mu_*(\sigma, F) = \sup\{f(x)e^{\langle\sigma,x\rangle} \colon x \in \operatorname{supp}\, \nu\}, \nu_0(0,t] = \nu\{x \in \mathbb{R}^p_+ \colon \|x\| \le t\}.$$

**Теорема.** *Нехай $F \in \mathcal{I}^p(\nu)$. Якщо виконується умова*

$$\int^{+\infty} \frac{d \ln \nu_0(0,t]}{t} < +\infty,$$

*то існує множина $E$ така, що*

$$\theta_p(E \cap K) < +\infty$$

*і співвідношення*

$$\ln F(\sigma) \le (1 + o(1)) \ln \mu_*(\sigma, F)$$

*виконується при $|\sigma| \to +\infty, \sigma \in K \backslash E$ для кожного конуса $K \subset \mathbb{R}^p_+$ з вершиною в початку координат $O$ такого, що $\overline{K} \backslash \{O\} \subset \mathbb{R}^p_+$.*

# Оцінки збіжності алгоритму типу алгоритму Ремеза найкращого рівномірного наближення функцій елементами інтерполяційних класів

**Я.Г. Іващук**

Нац. ун–т водного господарства та природокористування, Рівне, Україна

*Zrsd@i.ua*

В роботі [1] побудовано та досліджено два ітераційні алгоритми побудови елемента найкращого рівномірного наближення неперервної на відрізку функції елементами інтерполяційного класу та алгоритм побудови елемента найкращого наближення функції на множині із $n + 1$ точки.

Алгоритм Ремеза для інтерполяційних класів передбачає побудову послідовності елементів $F^k(x, c_1, c_2, ..., c_n)$, $k = 0, 1, 2, ...$, кожен з яких здійснює найкраще наближення функції $f(x)$ на деякій множині із $n + 1$ точки і складається з двох ітераційних циклів [2].

Алгоритм типу алгоритму Ремеза складається з одного ітераційного циклу, де на кожному кроці ітерації ми змінюємо множину із $n + 1$ точки і базується він на диференціальних властивостях оператора найкращого рівномірного наближення елементами інтерполяційного класу [3], що дозволяє отримати оцінки його швидкості збіжності.

**Теорема 1.** *Для довільної неперервної на $[a, b]$ функції $f(x)$ та довільного заданого на $[a, b]$ інтерполяційного класу $F$ послідовність побудованих алгоритмом елементів $F^k(x, c_1, c_2, ..., c_n)$ збігається до елемента найкращого наближення функції $f(x)$ зі швидкістю геометричної прогресії.*

**Теорема 2.** *Нехай задана на $[a, b]$ функція $f(x)$ є двічі неперервно диференційовною, а функції $F(x, c_1, c_2, ..., c_n)$ інтерполяційного класу $F$ двічі неперервно диференційовні по $x$ та по параметрах $c_1, c_2, ..., c_n$. Якщо модуль різниці $f(x) - F(x, c_1, c_2, ..., c_n)$ досягає свого максимуму рівно в $n + 1$ точці $x_1, ..., x_n + 1$, які утворюють чебишовський альтернанс цієї різниці на $[a, b]$, і в кожній такій точці виконується умова*

$$f''(x_j) - F''_{xx}(x_j, c) \ne 0, j = 1, 2, ..., n + 1,$$

*то послідовність елементів $F^k(x, c_1, c_2, ..., c_n)$ збігається до елемента найкращого наближення функції $f(x)$ з квадратичною швидкістю.*

1. Іващук Я.Г. Алгоритми найкращих наближень функцій інтерполяційними класами, Теорія наближень функцій та її застосування. Праці Інституту математики НАН України, вип. 31, 2000. — С. 179–189.

2. Іващук Я.Г. Оцінки збіжності алгоритму Ремеза для інтерполяційних класів, Збірник праць Інституту математики НАН України. Т. 5, № 1: Теорія наближень функцій та суміжні питання / Відп. ред.: А.С. Романюк– Київ: Ін-т математики НАН України, 2008. — С. 153–159.

3. J.R. Angelos, M.S. Henry, E.H. Kaufman, T.D. Lenker, A.Kroo. Local Lipschitz and Strong Unicity Constants for Certain Nonlinear Famlies, Journal of aproximation theory, 1989, 58, P. 164—183.

# Про оцінки мір виняткових множин в нелокальних задачах для рівнянь із частинними похідними

**В.С. Ільків[1,2], М.М. Симотюк[2], І.Я.Савка[2]**

[1]Національний університет „Львівська політехніка“

[2]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

*ilkivv@i.ua, quaternion@ukr.net, s-i@ukr.net*

Встановлення умов коректності нелокальних задач для рівнянь із частинними похідними в обмежених областях тісно пов'язане з проблемою малих знаменників [1, 2]. Для вирішення проблеми малих знаменників, які виникають при конструктивній побудові розв'язків задач з нелокальними умовами за часовою змінною та умовами періодичності за просторовими координатами, ефективним є метричний підхід [1]. Реалізація цього підходу вимагає встановлення оцінок зверху для мір виняткових множин гладких функцій.

Нехай $I$ — відрізок дійсної осі, $\operatorname{mes} A$ — міра Лебега вимірної множини $A$, $A \subset \mathbb{R}$, $C^m(I;\mathbb{R})(m \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ — простір дійснозначних функцій, $m$ раз неперервно диференційовних на відрізку $I$. У роботі встановлено наступне твердження.

**Теорема.** *Нехай $F(\tau, z) = f_1(\tau)z_1 + \ldots + f_m(\tau)z_m$, де $z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m$, $f_j \in C^m(I;\mathbb{R})$, $j = 1, \ldots, m$. Якщо вронскіан $W(\tau)$ функцій $f_1(\tau), \ldots, f_m(\tau)$ є відмінним від нуля на $I$, то для довільного $z \in \mathbb{C}^m \backslash \{\vec{0}\}$ і довільного $\varepsilon \in (0, C_1|z|/2)$, $|z| = |z_1| + \ldots + |z_m|$, виконується оцінка*

$$\operatorname{mes}\{\tau \in I : |F(\tau, z)| < \varepsilon\} \le C_2 \sqrt[m-1]{\varepsilon/|z|},$$

*де додатні сталі $C_1$, $C_2$ визначаються рівностями*

$$C_1 = \frac{\min_{\tau\in I} |W(\tau)|}{m} \left( \prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_{C^{(m-1)}(I;\mathbb{R})} \sum_{j=1}^{m} \|f_j\|^{-1}_{C^{(m-1)}(I;\mathbb{R})} \right)^{-1},$$

$$C_2 = \frac{4(\sqrt{2}+1)(m-1)}{\sqrt[m-1]{C_1}} \Big( \frac{C_3}{C_1} \operatorname{mes} I + 1 \Big), \quad C_3 = \max_{1\le j,q\le m} ||f_j^{(q)}||_{C(I;\mathbb{R})}.$$

Твердження про оцінки мір виняткових множин гладких функцій відіграють також важливу роль у метричній теорії діофантових наближень (див. праці [3–5] та бібліографію в них). Такі оцінки встановлені у [3–5] для випадків гладких та аналітичних функцій багатьох змінних, найвищі частинні похідні яких за кожною зі змінних обмежені за модулем знизу.

*Дослідження частково підтримані ДФФД України (проект № Ф41.1/004).*

1. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

2. Савка І. Я. Нелокальна задача із залежними коефіцієнтами в умовах для рівняння другого порядку за часовою змінною, Карпатські матем. публікації, 2010, 2:2, С. 101–110.

3. Beresnevich V.V. A Groshev type theorem for convergence on manifolds, Acta Mathematica Hungarica, 2002, 94:1, P. 99–130.

4. Beresnevich V.V., Bernik V.I., Kleinbock D.Y., Margulis G.A. Metric Diophantine approximation: The Khintchine-Groshev theorem for nondegenerate manifolds, Moscow Math. Journal, 2002, 2:2, P. 203–225.

5. Kleinbock D., Margulis G. Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds, Ann. Math., 1998, 148, P. 339–360.

# Об одном обобщении неравенства Рисса-Фишера

**М.И. Исмайлов, А.Н. Джабраилова**

Институт Математики и Механики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан

*miqdadismailov1@rambler.ru*

В работе обобщается теорема Рисса-Фишера о коэффициентах Фурье функции пространства $L_p$.

Пусть $T$ – некоторое измеримое множество, $B$ – банахово пространство. Через $L_p(T,B)$, $p \geq 1$, обозначается банахово пространство функций $u = u(t) : T \to B$ таких, что $\|u(t)\|^p$ измерима и суммируема на $T$ , с нормой

$$\|u\|_{L_p(T,B)} = \left( \int\limits_T \|u(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Обозначим через $l_p(T)$ банахово пространство последовательностей $\{a_n(t)\}_{n\in N}$ измеримых на $T$ функций, с нормой

$$\left\|\{a_n\}_{n\in N}\right\|_{l_p(T)} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_T |a_n(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Справедлива

**Теорема.** *Пусть $\{\varphi_n(y)\}_{n\in N}$ – ортонормированная система на $[c,d]$ такая, что почти всюду на $[c,d]$ справедливо $|\varphi_n(y)| \leq M$, $M$ не зависит от $n$. Тогда*
*1) для всякой измеримой на $[c,d]$ функции $f \in L_q([a,b], L_p(c,d))$ , $1 < p \leq 2$, $q = \frac{p}{p-1}$ последовательность $\{a_n(x)\}_{n\in N} \in l_q(a,b)$, где $a_n(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\varphi_n(y)dy$ и*

$$\left\|\{a_n\}_{n\in N}\right\|_{l_q(a,b)} \leq M^{\frac{2-p}{p}} \|f\|_{L_q([a,b],L_p(c,d))};$$

*2) для всякой последовательности $\{a_n(x)\}_{n\in N} \in l_p(a,b)$, $1 < p \leq 2$, существует функция $f \in L_p([a,b], L_q(c,d))$, $q = \frac{p}{p-1}$, для которой $a_n(x)$ коэффициенты ряда Фурье по системе $\{\varphi_n(y)\}_{n\in N}$ и*

$$\|f\|_{L_p([a,b],L_q(c,d))} \leq M^{\frac{2-p}{p}} \left\|\{a_n\}_{n\in N}\right\|_{l_p(a,b)}.$$

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. — М.: Мир, 1965. — Т.1,2.

2. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. — М.: ГИФМЛ, 1958.

# Нарізно неперервні відображення зі значеннями в площині Бінґа

**О.О. Карлова, О.Д. Мироник**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна

*math.analysis.chnu@gmail.com*

Актуальним є вивчення властивостей нарізно неперервних відображень та їх аналогів, які набувають значень у просторах, близьких до метризовних, наприклад, у вичерпних чи $\sigma$-метризовних просторах.

Нагадаємо, що топологічний простір $X$ називається *вичерпним* /*напіввичерпним*/ [1, 2], якщо існує таке відображення $s : \mathcal{T}(X) \times \mathbb{N} \to \mathcal{F}(X)$, яке кожній відкритій в $X$ множині $U$ і кожному номеру $n$ ставить у відповідність замкнену в $X$ множину $F_n(U) = s(U, n)$, так, що

*(i)* $F_n(U) \subseteq U$ для кожного $n$ і $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{int} F_n(U) = U$ / $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n(U) = U$/;

*(ii)* $U \subseteq V \Rightarrow (\forall n)(F_n(U) \subseteq F_n(V))$.

Топологічний простір $X$ називається *(сильно) $\sigma$-метризовним*, якщо він є об'єднанням зростаючої послідовності своїх замкнених метризовних підпросторів $X_n$ (причому довільна збіжна в $X$ послідовність повністю міститься в деякому просторі $X_n$).

*Площиною Бінґа* $\mathbb{B}$ ми називатимемо зліченний зв'язний гаусдорфовий простір, розглянутий Р. Бінґом в [3] (див. також [4, приклад 6.1.6]), тобто,

$$\mathbb{B} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q} \text{ і } y \geq 0\},$$

а базу околів точки $p \in \mathbb{B}$ утворює система $\mathcal{B}(p) = \{U_n(p) : n \in \mathbb{N}\}$, де множини $U_n(p)$ будуються таким чином: для точки $p = (x, 0)$ множина $U_n(p)$ складається з усіх раціональних точок осі $Ox$, віддалених від точки $p$ менше, ніж на $\frac{1}{n}$, а для точки $p = (x, y)$, $y > 0$, множина $U_n(p)$ складається з точки $p$ і всіх раціональних точок осі $Ox$, які лежать на відстані, меншій, ніж $\frac{1}{n}$ від однієї з вершин рівностороннього трикутника з вершиною в точці $p = (x, y)$ і основою на осі $Ox$.

**Теорема 1.** *Площина Бінґа $\mathbb{B}$ є $\sigma$-метризовним, але не сильно $\sigma$-метризовним простором.*

**Теорема 2.** *Площина Бінґа $\mathbb{B}$ є напіввичерпним, але не вичерпним простором.*

Нагадаємо, що топологічний простір $X$ називається *континуумом*, якщо він зв'язний і компактний. Топологічний простір $X$ ми будемо називати *$\sigma$-континуумом*, якщо він подається у вигляді зростаючого об'єднання послідовності континуумів.

**Теорема 3.** *Нехай $X$ і $Y$ – $\sigma$-континууми. Тоді кожне нарізно неперервне відображення $f : X \times Y \to \mathbb{B}$ стале.*

1. Borges C. On stratifiable spaces, Pacif. J. Math., 1966, 17:1, P. 1-16.

2. Gruenhage G. Generalized metric spaces, Handbook of Set-Theoretic Topology, ed K.Kunen and J.Vaughan, Elsevier Sci., 1984. – P. 423-510.

3. Bing R.H. A connected countable Hausdorff space, Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, P. 474.

4. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986. – 752 с.

5. Маслюченко В.К., Мироник О.Д. Вичерпні та напіввичерпні простори і нарізно неперервні відображення, Міжнар. конф. "Сучасні проблеми аналізу", присв. 70-річчю каф. мат. аналізу

Чернів. ун-ту, 30 вересня – 3 жовтня 2010р. Тези доповідей. – Чернівці: Книги – XXI, 2010. – С.103–105.

6. Маслюченко В.К., Мироник О.Д. Нарізно неперервні відображення і вичерпні простори, Мат. вісн. НТШ, 2010, 7.

# Наближення деяких функцій ланцюговими дробами

**Р.А. Кацала**

Мукачівський державний університет, Мукачево, Україна

*rkatsala@gmail.com*

У багатьох прикладних задачах наближення функцій ланцюговими дробами використовується для обчислення цих функцій на комп'ютері. Одним із способів розвинення функцій у ланцюговий дріб є формула Тіле [1, 2]. Дана формула ґрунтується на обернених похідних функції, деякі властивості яких встановлені в роботі [3].

Інший спосіб наближення функцій за допомогою ланцюгових дробів полягає у використанні квазіоберненого ланцюгового дробу типу Тіле [4]

$$f(x) = \left( {}^{[0]}f(x_*) + \frac{x - x_*}{{}^{[1]}f(x_*)} \; + \; \frac{x - x_*}{2/\big({}^{[1]}f(x_*)\big)'} \; + \; \cdots \; + \; \frac{x - x_*}{n/\big({}^{[n-1]}f(x_*)\big)'} \; + \; \cdots \right)^{-1}. \qquad (1)$$

Коефіцієнти такого дробу визначаються через обернені похідні 2–го типу функції однієї змінної, котрі обчислюються за допомогою рекурентних формул

$${}^{[0]}f(x) = \frac{1}{f(x)}, \quad {}^{[1]}f(x) = -\frac{f^2(x)}{f'(x)}, \quad {}^{[n]}f(x) = \frac{n}{\big({}^{[n-1]}f(x)\big)'} + {}^{[n-2]}f(x), \qquad n = 2, 3, \ldots .$$

Отримані формули [5], які дають змогу виразити обернені похідні 2–го типу через звичайні похідні за допомогою відношення двох визначників Ганкеля. Також встановлений нелінійний зв'язок між оберненими похідними 2–го типу і оберненими похідними Тіле.

Ланцюговий дріб (1) можна також подати у вигляді еквівалентного квазіоберненого ланцюгового дробу типу правильного $C$–дробу

$$f(x) = \left( \tilde{\omega}_0 + \frac{\tilde{\omega}_1(x - x_*)}{1} \,+\, \frac{\tilde{\omega}_2(x - x_*)}{1} \,+ \cdots +\, \frac{\tilde{\omega}_n(x - x_*)}{1} \,+ \cdots \right)^{-1}, \qquad (2)$$

де $\tilde{\omega}_0 = \dfrac{1}{f(x_*)}$, $\tilde{\omega}_1 = \dfrac{1}{{}^{[1]}f(x_*)}$, $\tilde{\omega}_2 = \dfrac{\big({}^{[1]}f(x_*)\big)'}{2\,{}^{[1]}f(x_*)}$, $\tilde{\omega}_n = \dfrac{\big({}^{[n-1]}f(x_*)\big)'\,\big({}^{[n-2]}f(x_*)\big)'}{n\,(n-1)}$, $n \geqslant 2$.

Одержаний загальний вигляд обернених похідних 2–го типу деяких функцій, а саме логарифмічної функції, тангенса, котангенса, гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса. Побудовані розвинення цих функцій в ланцюгові дроби виду (1) і (2) та встановлені області збіжності цих розвинень. Також знайдені декілька підхідних дробів розвинень синуса, косинуса, арктангенса та інтегральної показникової функції. Розглянуті числові приклади.

1. Thiele T. N. Interpolationsprechnung. – Leipzig: Commisission von B. G. Teubner, 1909.

2. Пагіря М. М., Кацала Р. А. Розвитки деяких функцій у ланцюгові дроби, Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ., 2007, 14–15, С. 107–116.

3. Пагіря М. М., Кацала Р. А. Властивості обернених похідних, Укр. мат. журн., 2010, 62:5, С. 709–714.

4. Пагіря М. М. Обернений ланцюговий дріб Тіле, Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ., 2008, 17, С. 179–192.

5. Пагіря М. М., Кацала Р. А. Зв'язки обернених похідних другого типу з похідними та оберненими похідними, Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ., 2011, 22, С. 118–126.

# Оцінки апроксимативних характеристик класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою змішаних модулів неперервності

**А.Ф. Конограй**

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

*Konogray@i.ua*

Досліджуються розглянуті в [1] класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних, які визначаються функцією $\Omega(t)$, яка задовольняє умови Барі-Стєчкіна (див., наприклад, [1]) (позначаємо $(S)$ і $(S_l)$), деякого спеціального вигляду

$$\Omega(t)=\Omega(t_1,...,t_d)=\begin{cases}\prod\limits_{j=1}^{d}\dfrac{t_j^r}{\left(\log\frac{1}{t_j}\right)_+^{b_j}}, & \text{якщо } t_j>0,\ j=\overline{1,d};\\[2ex] 0, & \text{якщо } \prod\limits_{j=1}^{d}t_j=0.\end{cases}\tag{1}$$

Нами розглядаються логарифми за основою 2, крім того $\left(\log\frac{1}{t_j}\right)_+=\max\{1,\log\frac{1}{t_j}\}$ та $b_j<r, j=\overline{1,d}$, $0<r<l$.

Нехай $L_q(\pi_d)$ — простір $2\pi$-періодичних по кожній змінній функцій $f(x)=f(x_1,...,x_d)$ зі стандартною нормою. Одержано точні за порядком оцінки ортопроекційних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в просторі $L_q$. Щоб навести означення величини, що нами досліджується, введемо деякі позначення.

Нехай $\{u_i\}_{i=1}^M$ — ортонормована система функцій $u_i\in L_\infty$. Кожній функції $f\in L_q$, $1\le q\le\infty$, поставимо у відповідність апарат наближення вигляду $\sum\limits_{i=1}^{M}(f,u_i)u_i$, тобто ортогональну проекцію функції $f$ на підпростір, породжений системою функцій $\{u_i\}_{i=1}^M$. Тоді ортопроекційний поперечник класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторі $L_q$ визначається наступним чином

$$d_M^{\perp}(B^{\Omega}_{p,\theta},L_q)=\inf_{\{u_i\}_{i=1}^M}\sup_{f\in B^{\Omega}_{p,\theta}}\Big\|f(x)-\sum_{i=1}^{M}(f,u_i)u_i(x)\Big\|_q.$$

**Теорема 1.** *Нехай $1\le q\le p<\infty,\ p\ge2,\ 1\le\theta<\infty$, а $\Omega(t)$ задана формулою (1) з $r>0$, тоді виконується наступне співвідношення*

$$d_M^{\perp}(B^{\Omega}_{p,\theta},L_q)\asymp M^{-r}\big(\log M\big)^{-b_1-\ldots-b_d+(d-1)\left(r+\left(\frac12-\frac1\theta\right)_+\right)},$$

*де* $a_+=\max\{a,0\}$.

**Теорема 2.** *Нехай* $1 \le q \le p \le 2$, $(p,q) \ne (1,1)$, $1 \le \theta < \infty$, *а* $\Omega(t)$ *задана формулою (1) з* $r > 0$, *тоді має місце оцінка*

$$d_M^{\perp}(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp M^{-r}\big(\log M\big)^{-b_1-\ldots-b_d+(d-1)\left(r+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+\right)}.$$

1. Sun Youngsheng, Wang Heping. Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness, Тр. мат. ин-та им.В. А. Стеклова, 1997, 219, С. 356-377.

# Про будову головного члена асимптотики похідних від логарифмічної похідної цілої функції

**М.Є. Коренков, З.В. Зарицька**

Волинський національний університет імені Лесі Українки

Показано, що відомі із [1] асимптотичні формули для $F^{(s)}(z)$, де $F(z) = f'(z)/f(z)$, $f(z)$ — ціла функція порядку $\rho$, $\rho > 0$, цілком регулярного росту відносно уточненого порядку $\rho(r)$, $\rho(r) \to \rho$ $(r \to \infty)$, в розумінні Б.Я. Левіна–А. Пфлюгера та з нулями, які знаходяться на скінченній системі променів, можна записати у вигляді

$$F^{(s)}(z) = \rho(\rho-1)...(\rho-s)e^{-(s+1)\varphi i}\left\{h(\varphi) - \frac{i}{\rho}h'(\varphi)\right\}r^{\rho(r)-s-1} + o\left(r^{\rho(r)-s-1}\right), (z \to \infty; z \in \mathbb{C}\backslash K),$$

де $z = re^{i\varphi}$, $K$ — деяка система кружків нульової $\mu$–щільності, $1 < \mu \le 2$. Тут $h(\varphi)$ — індикатор цілої функції $f(z)$. У випадку цілого $\rho > 0, s \ge \rho$ попередня формула набуває вигляду

$$F^{(s)}(z) = o\left(r^{\rho(r)-s-1}\right), (z \to \infty; z \in \mathbb{C} \setminus K).$$

**Зауваження.** *В роботі [1] показано, що асимптотичні формули для* $F^{(s)}(z)$ *справедливі зовні системи кутів, які включають промені, на яких знаходяться нулі* $f(z)$. *Використовуючи лему 3 із [2], можна показати, що вони справедливі і зовні певної системи кружків нульової* $\mu$*–щільності,* $1 < \mu \le 2$.

1. Н.Е. Коренков. Асимптотика производных от логарифмической производной целой функции, Укр. мат. журн., 1977, 29:4, С. 455–463.

2. А.А. Гольдберг, Н.Е. Коренков. Асимптотика логарифмической производной целой функции вполне регулярного роста, Сиб. мат. журн., 1980, 21:3, С. 63–79.

# Степенные средние и обратное неравенство Гельдера

**А.А. Кореновский**
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова, Украина
*anakor@paco.net*

Для неотрицательной на отрезке $[0,1] \subset \mathbb{R}$ функции $\varphi$ степенным средним порядка $\alpha \neq 0$ называется функция $\mathcal{M}_\alpha \varphi(t) = \left(\frac{1}{t}\int_0^t \varphi^\alpha(u)\,du\right)^{1/\alpha}$ $(0 < t \leq 1)$. Из неравенства Гельдера сразу следует, что средние $\mathcal{M}_\alpha$ возрастают вместе с $\alpha$. Для $\alpha < \beta$, $\alpha \cdot \beta \neq 0$ через $RH^{\alpha,\beta}(B)$ обозначаем класс всех неотрицательных на $[0,1]$ функций $\varphi$, удовлетворяющих обратному неравенству Гельдера

$$0 < \mathcal{M}_\beta \varphi(t) \leq B \cdot \mathcal{M}_\alpha \varphi(t) < +\infty, \quad 0 < t \leq 1, \tag{1}$$

где постоянная $B > 1$ не зависит от $t$. Классы $RH^{\alpha,\beta}(B)$ являются естественным обобщением известных классов Макенхаупта и Геринга и находят приложения в теории весовых пространств, квазиконформных отображений и в других вопросах. Их замечательное свойство заключается в так называемом "самоулучшении показателей суммируемости". Мы приводим простое доказательство этого свойства (см. [1]), которое позволяет установить точные границы такого "самоулучшения". Эти границы выражаются в терминах функции $\sigma_\alpha(\gamma) = (1-\alpha/\gamma)^{1/\alpha}$ переменной $\gamma \in (-\infty, \min(0,\alpha)) \cup (\max(0,\alpha), +\infty)$.

Основой доказательства служит следующая теорема, представляющая, быть может, и самостоятельный интерес.

**Теорема 1.** *Пусть $\alpha < \beta$, $\alpha \cdot \beta \neq 0$, $B > 1$ и числа $\gamma_\pm$ – положительный и отрицательный корни уравнения $\sigma_\alpha(\gamma) = B \cdot \sigma_\beta(\gamma)$. Тогда для любой функции $\varphi \in RH^{\alpha,\beta}(B)$*

$$\sigma_\alpha(\gamma_+) \leq \frac{\mathcal{M}_\beta \varphi(t)}{\mathcal{M}_\alpha(\mathcal{M}_\beta \varphi)(t)} \leq \sigma_\alpha(\gamma_-), \quad \sigma_\beta(\gamma_+) \leq \frac{\mathcal{M}_\alpha \varphi(t)}{\mathcal{M}_\beta(\mathcal{M}_\alpha \varphi)(t)} \leq \sigma_\beta(\gamma_-), \quad 0 < t \leq 1,$$

*причем постоянные в левых и правых частях этих неравенств нельзя улучшить.*

С помощью теоремы 1 устанавливаются точные границы показателей суммируемости для средних $\mathcal{M}_\alpha \varphi$ и $\mathcal{M}_\beta \varphi$.

**Теорема 2.** *Пусть $\alpha, \beta, B, \gamma_\pm$ удовлетворяют условиям теоремы 1, $\varphi \in RH^{\alpha,\beta}(B)$. Если $0 \neq \gamma < \gamma_+$, то $\mathcal{M}_\beta \varphi \in RH^{\alpha,\gamma}(\sigma_\alpha(\gamma_-)/\sigma_\gamma(\gamma_+))$, $\mathcal{M}_\alpha \varphi \in RH^{\beta,\gamma}(\sigma_\beta(\gamma_-)/\sigma_\gamma(\gamma_+))$. Если же $0 \neq \gamma > \gamma_-$, то $\mathcal{M}_\beta \varphi \in RH^{\gamma,\alpha}(\sigma_\gamma(\gamma_-)/\sigma_\alpha(\gamma_+))$, $\mathcal{M}_\alpha \varphi \in RH^{\gamma,\beta}(\sigma_\gamma(\gamma_-)/\sigma_\beta(\gamma_+))$. При этом условия $\gamma < \gamma_+$ и $\gamma > \gamma_-$ на параметр $\gamma$ не могут быть улучшены.*

Если дополнительно предположить условие монотонности функции $\varphi$ (характер монотонности зависит от знаков параметров $\alpha$ и $\beta$), то из теоремы 2 легко можно получить свойство "самоулучшения показателей суммируемости" для монотонной $\varphi$. В общем случае условие (1) принадлежности функции $\varphi$ классу $RH^{\alpha,\beta}(B)$ следует заменить более сильным: $\left(|I|^{-1}\int_I \varphi^\beta(t)\,dt\right)^{1/\beta} \leq B\left(|I|^{-1}\int_I \varphi^\alpha(t)\,dt\right)^{1/\alpha}$, которое предполагается выполненным для всех интервалов $I \subset [0,1]$. Тогда, применяя известные оценки (см. [2]) равноизмеримых перестановок функций, удовлетворяющих обратному неравенству Гельдера, из теоремы 2 получаем точные границы распространения свойства "самоулучшения показателей суммируемости" для функции $\varphi$ без предположения ее монотонности.

1. В. Д. Диденко, А. А. Кореновский. Обратное неравенство Гельдера для степенных средних, Укр. матем. вестник, 2012, 9:1, С. 18 – 31.

2. А. А. Кореновский. О точном продолжении обратного неравенства Гельдера и условия Макенхаупта, Матем. заметки, 1992, 52:6, С. 32 – 44.

# Неравенства для производных функций на оси с несимметрично ограниченными старшими производными

**В.А. Кофанов**

Днепропетровский национальный университет, Украина

*vladimir.kofanov@gmail.com*

Через $L^r_\infty(\mathbf{R})$ будем обозначать пространство функций $x \in L_\infty(\mathbf{R})$, имеющих локально абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка, причем $x^{(r)} \in L_\infty(\mathbf{R})$. Положим

$$W^r_{\infty,\alpha,\beta}(\mathbf{R}) := \left\{ x \in L^r_\infty(\mathbf{R}) : \left\| x^{(r)} \right\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le 1 \right\},$$

где $\|x\|_{\infty,\alpha,\beta} := \|\alpha x_+ + \beta x_-\|_\infty$, а $x_\pm(t) := \max\{x_\pm(t), 0\}$.

Для функций, определенных на всей оси, нами получены аналоги одного неравенства В.Ф. Бабенко [1] для периодических функций. Из них, в частности, вытекает, что для любой функции $x \in L^r_\infty(\mathbf{R})$ и произвольного отрезка $[a,b] \subset \mathbf{R}$, удовлетворяющих условиям

$$1)\ \ x^{(k)}(a) = x^{(k)}(b) = 0, \quad 2)\ \ \int\limits_a^b x^{(k)}(t)dt = 0, \tag{1}$$

справедливо неравенство

$$\|x_\pm^{(k)}\|_{L_q[a,b]} \le$$

$$\le \min\left\{ \frac{\mu_\pm(x^{(k)})}{\mu_\pm(\varphi^{\alpha,\beta}_{r-k})}, \frac{b-a}{2\pi} \right\}^{1/q} \left\| \left(\varphi^{\alpha,\beta}_{r-k}\right)_\pm \right\|_q \left( \frac{E_0(x)_\infty}{E_0(\varphi^{\alpha,\beta}_r)_\infty} \right)^{1-k/r} \|x^{(r)}\|^{k/r}_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}}, \tag{2}$$

где

$$\mu_\pm(x^{(k)}) := \mu\{t \in [a,b] : x_\pm^{(k)}(t) > 0\}, \quad \mu_\pm(\varphi^{\alpha,\beta}_{r-k}) := \mu\{t \in [0,2\pi] : (\varphi^{\alpha,\beta}_{r-k})_\pm(t) > 0\},$$

а $\varphi^{\alpha,\beta}_r$– несимметричный идеальный сплайн Эйлера порядка $r$. Если же выполнено только первое условие (1), то величину $\min\left\{ \frac{\mu_\pm(x^{(k)})}{\mu_\pm(\varphi^{\alpha,\beta}_{r-k})}, \frac{b-a}{2\pi} \right\}$ в неравенстве (2) следует заменить на $\frac{\mu_\pm(x^{(k)})}{\mu_\pm(\varphi^{\alpha,\beta}_{r-k})}$. Доказаны также неравенства, более общие чем (2), в которых величины $E_0(x)_\infty$ заменены на $L(x_\pm)_p := \sup\left\{ \|x_\pm\|_{L_p[a,b]} :\ a,b \in \mathbf{R},\ x_\pm(t) > 0,\ t \in (a,b) \right\},\ p > 0$.

Кроме того, для произвольного отрезка $[a,b] \in \mathbf{R}$ и заданных $A_0, A_r > 0$, решена следующая "несимметричная" модификация задачи Б. Боянова и Н. Найденова [2]:

$$\|x^{(k)}\|_{L_q[a,b]} \to \sup, \quad 0 \le k \le r-1, \quad q \ge 1,$$

на классе всех функций $x \in L^r_\infty(\mathbf{R})$, удовлетворяющих условиям

$$L(x)_p \le A_0, \quad \|x^{(r)}\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le A_r,$$

в случае, когда $r-k$ нечетно. Рассмотрены разнообразные приложения. В частности, для функций с несимметрично ограниченными старшими производными, доказаны неравенства типа Надя-Колмогорова для полунорм Вейля и решена соответствующая задача Колмогорова о тройке чисел.

1. В.Ф. Бабенко. Несимметричные экстремальные задачи теории приближения, Докл. АН СССР, 1983, 269:3, С. 521–524.

2. B. Bojanov, N. Naidenov. An extension of the Landau-Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdos, J. Anal. Math., 1999, 78, C. 263–280.

# Вариант задачи Стечкина для оператора Лапласа

**А.А. Кошелев**
Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия
*aakoshelev@gmail.com*

Рассмотрим $Q_p^{2n}$ $(n \in \mathbb{N},\, n \geq 2,\, 1 \leq p \leq \infty)$ выпуклый центрально симметричный класс функций $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$ при $1 \leq p < \infty$ и $f \in C(\mathbb{R}^m)$ в случае $p = \infty$, у которых $\Delta^n f$, в смысле обобщенных функций, принадлежит $L_\infty(\mathbb{R}^m)$ и $\|\Delta^n f\|_\infty \leq 1$. Обозначим через $\mathcal{L}_p(N)$ множество линейных ограниченных операторов из $L_p(\mathbb{R}^m)$ в $L_p(\mathbb{R}^m)$ при $1 \leq p < \infty$, и из $C(\mathbb{R}^m)$ в $C(\mathbb{R}^m)$ при $p = \infty$. Рассмотрим величину уклонения оператора $T \in \mathcal{L}_p(N)$ от оператора $\Delta^k$ на классе функций $Q_p^{2n} : U(T)_p = \sup\{||\Delta^k f - Tf||_p :\ f \in Q_p^{2n}\}$. При $N > 0$ положим

$$E(N,k,n) = E(N) = E(N)_p = \inf\{U(T)_p :\ ||T||_{\mathcal{L}_p(N)} \leq N\};$$

Эту величину называют наилучшим приближением $k-$той степени оператора Лапласа $\Delta^k$ линейными ограниченными операторами на классе элементов $Q_p^{2n}$. Данная задача является частным случаем задачи С. Б. Стечкина о наилучшем приближении неограниченного оператора линейными ограниченными операторами на классе элементов [1].

Для произвольного неотрицательного числа $\delta$ положим

$$\omega(\delta) = \omega(\delta)_p = \sup\{\|\Delta^k f\|_p :\ f \in Q_p^{2n},\ \|f\|_p \leq \delta\};$$

эту функцию переменного $\delta \geq 0$ называют модулем непрерывности ($k-$той степени оператора $\Delta^k$ на классе $Q_p^{2n}$). Родственной является задача отыскания наилучшей (наименьшей) константы $\mathcal{K}_p$ в неравенстве Колмогорова $||\Delta^k f||_p \leq \mathcal{K}_p \cdot ||f||_p^{\frac{n-k}{n}} \cdot ||\Delta^n f||_p^{\frac{k}{n}}$ [2]. Данное неравенство изучал О. Кунчев в работе [3].

Рассмотрим также задачу восстановления значений $k-$той степени оператора Лапласа $\Delta^k$ на элементах класса $Q_p^{2n}$ в предположении, что элементы класса $Q_p^{2n}$ заданы с известной погрешностью $\delta$. Восстановление осуществляется с помощью некоторого множества $\mathcal{R}_p$ операторов (однозначных отображений) пространства $L_p(\mathbb{R}^m)$ в $L_p(\mathbb{R}^m)$ при $1 \leq p < \infty$, и пространства $C(\mathbb{R}^m)$ в $C(\mathbb{R}^m)$ при $p = \infty$. Для оператора $T \in \mathcal{R}_p$ и числа $\delta \geq 0$ полагаем $U_\delta(T)_p = \sup\{\|\Delta^k f - T\eta\|_p :\ f \in Q_p^{2n},\ \eta \in L_p(\mathbb{R}^m),\ \|f - \eta\|_p \leq \delta\}$. Тогда

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{R}_p) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{R}_p)_p = \inf\{U_\delta(T)_p : T \in \mathcal{R}_p\}$$

есть величина ошибки оптимального восстановления $k-$той степени оператора Лапласа $\Delta^k$ с помощью множества отображений (методов восстановления) $\mathcal{R}_p$ на элементах класса $Q_p^{2n}$, заданных с известной погрешностью $\delta$.

Для случая $k = 1, n = 2, m \geq 2, 1 \leq p \leq \infty$ автором получены точные по порядку с близкими абсолютными константами двусторонние оценки изучаемых величин [4].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11-01-00462 и Минобрнауки России (Госзадание 1.1544.2011).

1. Стечкин С. Б. Наилучшее приближение линейных операторов, Матем. заметки, 1967, 1:2, С. 137–148.

2. Арестов В. В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи, Успехи мат. наук, 1996, 51:6, С. 89–124.

3. Kounchev O. Extremizers for the multivariate Landau–Kolmogorov inequality, Multivariate Approximation, W. Haussmann et al. (eds.), Akademie Verlag, 1997, P. 123–132.

4. Кошелев А. А. Наилучшее $L_p$ приближение оператора Лапласа линейными ограниченными операторами на классах функций двух и трех переменных, Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН, 2011, 17:3, С. 217–224.

# Проблеми наближень функцій в якісній теорії диференціальних рівнянь

**Г.М. Кулик**

Національний технічний університет України "КПІ Київ

*ganna_1953@ukr.net*

В теорії автономних диференціальних рівнянь часто з'являються класи функцій $C'(R^m; f)$. Це такі класи неперервних обмежених на $R^m$ функцій $s(x) = s(x_1, \ldots, x_m)$, що суперпозиція $s(x(t; x_0))$, де $x(t; x_0)$ — розв'язок задачі Коші $dx/dt = f(x)$, $x\,|_{t=0}= x_0$, є неперервно диференційовною по змінній $t \in R$. При цьому за означенням $\dot{s}(x_0) = ds(x(t; x_0))/dt\,|_{t=0}$. Іншими словами $\dot{s}(x)$ — це похідна неперервної функції $s(x)$ вздовж векторного поля, визначеного системою диференціальних рівнянь $dx/dt = f(x)$, яка є неперервною і обмеженою функцією на $R^m$. Найважливішими прикладами таких функцій є

$$S(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} \left[\Omega_\tau^0(x) C(x(\tau; x))\right] \left[\Omega_\tau^0(x) C(x(\tau; x))\right]^T d\tau -$$

$$- \int\limits_{0}^{+\infty} \left\{\Omega_\tau^0(x) \left[C(x(\tau; x)) - I_n\right]\right\} \left\{\Omega_\tau^0(x) \left[C(x(\tau; x)) - I_n\right]\right\}^T d\tau, \qquad (1)$$

де підінтегральні матриці задовольняють таким оцінкам $\|\Omega_\tau^0(x) C(x(\tau; x))\| \le K \exp\{-\gamma\tau\}$, $\tau \le 0$, $\|\Omega_\tau^0(x)\left[C(x(\tau; x)) - I_n\right]\| \le K \exp\{\gamma\tau\}$, $\tau \ge 0$, з додатніми константами $K$, $\gamma$, незалежними від $\tau \in R$, $x \in R^m$. Виникає питання: чи можна наблизити неперервну і обмежену на $R^m$ функцію $S(x)$ неперервно диференційовними функціями $S_n(x)$ з одночасним наближенням її похідної $\dot{S}(x)$: $\dot{S}_n(x) \rightrightarrows \dot{S}(x)$? У випадку, коли можливе таке наближення, можна стверджувати про існування функції Гріна задачі про обмежені інваріантні многовиди при малих збуреннях фазових змінних. Якщо розглядати частинний випадок, коли змінні $x$ належать певній компактній множині $T_m$ із $R^m$, достатньою умовою такого наближення є рівність $\lim\limits_{\sigma \to +0} \frac{\omega(\sigma; f) \cdot \omega(\sigma; S)}{\sigma} = 0$, де $\omega(\sigma; S)$ — загальний модуль неперервності функції $S(x)$: $\omega(\sigma; S) = \sup\limits_{\|\bar{x} - x\| \le \sigma} \left\|S(x) - S(\bar{x})\right\|$. Для єдиності задачі Коші $dx/dt = f(x)$, $x\,|_{t=0}= x_0$ не вистачає неперервності функції $f(x)$. Крім того потрібно також, щоб її модуль неперервності $\omega(\sigma; f)$ задовольняв умову $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\varepsilon}^{d} \frac{d\sigma}{\omega(\sigma; f)} = \infty$. Враховуючи зв'язок між модулями неперервності функції (1) і функції $f(x)$, отримано умову можливості наближення функцій (1) неперервно диференційовними функціями $S_n(x)$ з одночасним наближенням похідної:

$$\lim_{\sigma \to +0} \frac{\omega(\sigma; f)}{\sigma} \int\limits_{\sigma}^{d} \exp\left\{ -\gamma \int\limits_{\sigma}^{z} \frac{dt}{\omega(t; f)} \right\} dz = 0.$$

1. Степанец А.И. Методы теории приближений. — К.: Институт математики НАН Украины, 2002. — Т. 1,2.

2. Кулик В.Л., Кулик А.Н., Степаненко Н.В. Дополнение слабо регулярных линейных расширений динамических систем до регулярных, Математический журнал Алматы, 2011, 11:1, С. 74–86.

# Нерівності типу Вімана-Валірона без виняткових множин для випадкових цілих функцій від декількох змінних

**Андрій Куриляк, Олег Скасків**
Львівський національний університет ім. І. Франка, Україна
*kurylyak88@gmail.ru, matstud@franko.lviv.ua*

Розглядаємо цілі функції $f\colon \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}$, $p \geq 2$, вигляду

$$f(z) = \sum\nolimits_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n z^n,\ z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p,\ z^n = z_1^{n_1} \dots z_p^{n_p}, \tag{1}$$

де $\|n\| = \sum_{i=1}^{p} n_i$, $n = (n_1 \dots n_p)$. Для $r = (r_1, \dots, r_p) \in \mathbb{R}_+^p$ позначимо $M_f(r) = \max\{|f(z)|\colon |z_i| \leq r_i,\ i \in \{1, \dots, p\}\}$, $\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n\colon n \in \mathbb{Z}_+^p\}$ максимум модуля функції $f(z)$ і максимальний член ряду (1) відповідно. Нехай $r^\vee = \min_{1\leq i\leq p} r_i$, $r^\wedge = \max_{1\leq i\leq p} r_i$, $\mathcal{N}_f(r) = \mathcal{N}(r_1, \dots, r_p) = \max\{\|N\|\colon |a_N| r^N = \mu_f(r)\}$.

Нехай $T^p$ клас цілих функцій вигляду (1), що за кожною змінною є трансцендентними. Позначимо через $\mathcal{H}$ — клас неперервних справа на $(1, +\infty)$ дійсних функцій $h$, для яких $h(x) \nearrow +\infty, x \to +\infty$. Нехай $\triangle(h) = \overline{\lim}_{r\to+\infty} \frac{\ln h(r)}{\ln\ln r}$. Ми також розглядатимемо підклас $\mathcal{L}$ класу $\mathcal{H}$, який складається з ввігнутих відносно логарифма функцій $l$, для яких $\ln r = o(l(r)), r \to +\infty$.

В наступних теоремах вказано умови на зростання $\mathcal{N}_f(r), \ln M_f(r)$, за яких виконується нерівність

$$\overline{\lim_{r^\vee\to+\infty}} \frac{\ln M_f(r) - \ln \mu_f(r)}{\ln\ln \mu_f(r)} \leq \alpha,\ \alpha > 0. \tag{2}$$

**Теорема 1.** *Нехай* $\alpha \in (0, +\infty)$, $h \in \mathcal{H}$. *Для того, щоб для кожної цілої функції* $f \in T^p$ *такої, що* $\mathcal{N}_f(r) \leq h(r^\wedge)$, $r^\vee \to +\infty$, *виконувалася нерівність (2), необхідно і досить, щоб* $\triangle(h) \leq \alpha/p$.

**Теорема 2.** *Нехай* $\alpha \in (0, +\infty)$, $l \in \mathcal{L}$. *Для того, щоб для кожної цілої функції* $f \in T^p$ *такої, що* $\ln M_f(r) \leq l(r^\wedge)$, $r^\vee \to +\infty$, *виконувалася нерівність (2), необхідно і досить, щоб* $\triangle(l) \leq 1 + \alpha/p$.

Позначимо через $\Xi$ — клас послідовностей випадкових величин $(\xi_n)$ таких, що кожна з послідовностей $(\operatorname{Re}\xi_n), (\operatorname{Im}\xi_{nm})$ утворює мультиплікативну систему і $|\xi_n| = 1$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+^p$. Через $M_f(r, \omega)$ позначимо максимум модуля цілої випадкової функції $f(z, \omega)$ вигляду

$$f(z, \omega) = \sum\nolimits_{\|n\|=0}^{+\infty} \xi_n(\omega) a_n z_1^{n_1} \dots z_p^{n_p},$$

де послідовність випадкових величин $(\xi_n) \in \Xi$.

В наступних теоремах вказано умови на зростання $\mathcal{N}_f(r), \ln M_f(r)$, за яких виконується нерівність

$$\overline{\lim_{r^\vee\to+\infty}} \frac{\ln M_f(r, \omega) - \ln \mu_f(r)}{\ln\ln \mu_f(r)} \leq \beta,\ \beta > 0. \tag{3}$$

**Теорема 3.** *Нехай* $\beta \in (0, +\infty)$, $h \in \mathcal{H}$ *і* $(\xi_n) \in \Xi$. *Для того, щоб для кожної цілої функції* $f \in T^p$ *такої, що* $\mathcal{N}_f(r) \leq h(r^\wedge)$, $r^\vee \to +\infty$, *виконувалася нерівність (3), необхідно і досить, щоб* $\triangle(h) \leq 2\beta/p$.

**Теорема 4.** *Нехай* $\beta \in (0, +\infty)$, $l \in \mathcal{L}$ *і* $(\xi_n) \in \Xi$. *Для того, щоб для кожної цілої функції* $f \in T^p$ *такої, що* $\ln M_f(r) \leq l(r^\wedge)$, $r^\vee \to +\infty$, *виконувалася нерівність (3), необхідно і досить, щоб* $\triangle(l) \leq 1 + 2\beta/p$.

# Сильная суммируемость и свойства рядов Фурье-Лапласа на сфере

**Р.А. Ласурия**
Абхазский государственный университет, Сухум
*rlasuria67@yandex.ru*

В работе исследуется поведение величин, характеризующих сильную суммируемость рядов Фурье-Лапласа, и на их основе приводятся некоторые свойства рядов Фурье-Лапласа функций класса $L_2\left(S^{m-1}\right)$.

Пусть $S^{m-1} = \left\{x = (x_1, ..., x_m) \in R^m : \sum\limits_{i=1}^{m} |x_i|^2 = 1\right\}$, $m \geq 3$,

$$S_n\left(f, x\right) = \sum_{k=0}^{n} Y_k\left(f, x\right) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{a_k} c_j^{(k)} Y_j^{(k)}\left(x\right) dS\left(x\right)$$

– суммы Фурье-Лапласа порядка $n$, $\Lambda = \{\lambda_k\}$, $k = 0, 1, ...$– некоторая последовательность неотрицательных чисел, $\Delta\lambda_k = \lambda_{k+1} - \lambda_k$, $k = 0, 1, ...$

$$H_2\left(x\right) = H_2\left(f, x, \lambda\right) \overset{df}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\lambda_k |f\left(x\right) - S_k\left(f, x\right)|^2.$$

В работе исследуются свойства величины $H_2\left(x\right)$ (см., [1–3]), характеризующей сильную суммируемость с показателем 2 ряда Фурье-Лапласа функции $f \in L\left(S^{m-1}\right)$.

Один из полученных результатов выглядит следующим образом.

**Теорема.** *Пусть* $f\left(x\right) \in L_2\left(S^{m-1}\right)$, $\Lambda = \{\lambda_k\}$, $k = 0, 1, ...$– *некоторая неубывающая последовательность неотрицательных чисел. Для того, чтобы ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \Delta\lambda_k |f\left(x\right) - S_k\left(f, x\right)|^2$ *сходился почти всюду на сфере* $S^{m-1}$ *к некоторой функции* $H_2\left(x\right) \in L\left(S^{m-1}\right)$ *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \sum_{j=1}^{a_k} \left|c_j^{(k)}\right|^2 < \infty$$

*или, что то же самое,*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \left\|Y_k\left(f, x\right)\right\|_{L_2(S^{m-1})}^2 < \infty,$$

*причем, если* $H_2\left(x\right) \in L\left(S^{m-1}\right)$, *то*

$$\left\|H_2\left(x\right)\right\|_{L(S^{m-1})} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k - \lambda_0\right) \left\|Y_k\left(f, x\right)\right\|_{L_2(S^{m-1})}^2.$$

1. Фомин Г.А. Некоторые свойства ортогональных разложений в $L^2$, Прикладные вопросы математического анализа, Тула, 1972, С. 141-154.

2. Ласурия Р.А. Сильная суммируемость и коэффициенты Фурье, Межд. Росс.-Болг. симп. Нальчик – Хабез, 2010, С. 145-146.

3. Ласурия Р.А. Сильная суммируемость рядов Фурье и аппроксимация функций. — С.:АГУ, 2010. — 260 с.

# Наближення дійсною функцією експериментальних значень, отриманих з похибками

**М.М. Личак[1], В.П. Євтушок[2], Н.А. Бабій[1]**
[1]Інститут космічних досліджень НАН та ДКА України
[2]Хмельницький національний університет

Нехай модель отримання експериментальних даних має вигляд

$$y_n = x_n + f_n, \qquad n \in (1; M) \tag{1}$$

де $y_n$ - числові дані, що отримуються в результаті $M$ вимірювань, $x_n$ - істинні значення вимірюваного процесу, а $f_n$ – невідомі похибки вимірювань. На основі цієї моделі далі може будуватися процедура обробки отриманих значень для наближення дійсною функцією істинних числових значень процесу, тобто їх апроксимація. Але для цього слід ввести деякі припущення про природу і характер похибок $f_n$, які обумовлюють невизначеність даних про процес $x_n$. Будемо вважати, що значення похибок вимірювань є обмежені, а також обмежена їх перша різниця

$$|f_n| \le \delta = const, \qquad |\triangle f_n| \le \gamma = const, \forall n, \qquad \triangle f_n = f_{n+1} - f_n. \tag{2}$$

Тобто, значення членів числової послідовності $f_n$ є не передбачуваними, але вони задовольняють умову (2). Це дозволяє використовувати множинну інтерпретацію вказаної невизначеності. Будемо вважати, що наближення можна представити у вигляді лінійної комбінації деяких відомих базисних функцій $\varphi_k(n)$, $(n \in [1, M])$, $k = 1, 2 \ldots, S$:

$$x_n = \sum_{k=1}^{S} l_k \cdot \varphi_k(n), \quad n = 1, 2, \ldots, M, \tag{3}$$

де $l_k$ — невідомі числові коефіцієнти, а $S$ — їх кількість. Використовуючи (3), перепишемо (1) у виді

$$y_n - \sum_{k=1}^{S} l_k \cdot \varphi_k(n) = f_n, \quad n \in (1, M). \tag{4}$$

Тоді задачу наближення можна розглядати як вибір таких коефіцієнтів $l_k$ , щоб розраховані згідно (4) невідомі значення $f_n$ задовольняли обмеженням (2). Але розв'язок такої задачі в загальному випадку буде неоднозначним і перш за все залежатиме від вибору і кількості базисних функцій. Тобто, для вектора коефіцієнтів $L^T = (l_1, l_2, \ldots, l_s)$ може бути отримана така множинна оцінка

$$L \in \Omega_L, \tag{5}$$

що для всіх елементів множини $\Omega_L$ виконуються при $f_n$ із (4) обмеження (2). Об'єднуючи значення $x_n$ по всіх $L$ із (5) отримуємо множину $\Omega_X$ у вигляді „трубки", що містить всі можливі функції наближення для вибраних базисних функцій і їх кількості. А це дозволяє поставити задачу оптимізації такого вибору, як забезпечення мінімальних розмірів, в певному сенсі, множини $\Omega_X$. Оптимальний вибір може відбуватись на основі мінімізації функціоналу якості оцінювання

$$J = \sum_{n=1}^{M} \left[x_{max}(n) - x_{min}(n)\right]^2 \text{ або } J = \max_{n\in[1,M]} \left[x_{max}(n) - x_{min}(n)\right]^2, \tag{6}$$

де

$$x_{max}(n) = \max_{L\in\Omega_L} \left[ \sum_{k=1}^{S} \left[l_k \cdot \varphi_k(n)\right] \right], \quad x_{min}(n) = \min_{L\in\Omega_L} \left[ \sum_{k=1}^{S} \left[l_k \cdot \varphi_k(n)\right] \right].$$

Очевидно, що оптимальна величина $S$ для функціоналу (6) буде обмеженою, бо при зростанні розмірності вектора $L$ зростають розміри множини $\Omega_L$, а значить розширюються межі інтервальної оцінки $x_n$ і зростає функціонал (6). Проведене цифрове моделювання підтверджує існування скінченого оптимального $S$. Можливе застосування більш складних інтервальних оцінок невідомих похибок вимірювань, коли теоретико-множинна інтерпретація задачі наближення також полягає в знаходженні таких коефіцієнтів $l_k$ , щоб задовольнялись ці інтервальні обмеження для $f_n$ із (4). Як відомо, для великих $M$ виникає проблема із зростанням оптимального $S$. Але існує кардинальне її вирішення шляхом використання в ролі базисних – сплайн-функцій, коли на кожному підінтервалі апроксимація відбувається з одними і тими ж базисними функціями, але з різними коефіцієнтами.

# Узагальнене рівняння Рубела

**Ю.С. Лінчук**
Чернівецький національний університет, Україна
*yustlin@gmail.com*

Нехай $G$ – довільна область комплексної площини і $\mathcal{H}(G)$ – простір усіх аналітичних в області $G$ функцій, що наділений топологією компактної збіжності. В [1] В.А. Рубел, узагальнюючи формулу для диференціювання добутку двох функцій, поставив і розв'язав задачу, про знаходження всіх пар лінійних неперервних функціоналів $L$ та $M$ на просторі $\mathcal{H}(G)$, які задовольняють співвідношення

$$L(fg) = L(f)M(g) + L(g)M(f)$$

для довільних функцій $f$ та $g$ з простору $\mathcal{H}(G)$. Пізніше в [2] Н.Р. Нандакумар розв'язав задачу Рубела в класі лінійних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G)$. Подальші дослідження стосовно опису пар лінійних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G)$, які задовольняють подібні співвідношення, розглянуті Н.Р. Нандакумаром та П. Каннапаном в [3], [4]. В [5] описано всі пари лінійних неперервних операторів, які діють у просторі $\mathcal{H}(G)$ і задовольняють співвідношення, яке є операторним аналогом класичного рівняння Рубела.

Доповідь присвячена дослідженню в класі лінійних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G)$ розв'язків рівняння

$$L(fg) = aL(f)M(g) + bL(g)M(f), \tag{1}$$

де $a, b$ – фіксовані комплексні числа.

**Теорема.** *Для того, щоб лінійні на просторі $\mathcal{H}(G)$ функціонали $L$ та $M$ задовольняли співвідношення* (1), *необхідно і достатньо, щоб пара цих функціоналів визначалася однією з наступних умов:*

1) *Якщо $a = b \neq 0$, то*

1°. $L = 0$, $M$ *– довільний лінійний функціонал на $\mathcal{H}(G)$;*

2°. $L(f) = Cf(z_0)$, $M(f) = \frac{1}{a+b}f(z_0)$, $z_0 \in G$, $C \in \mathbb{C}$;

3°. $L(f) = Cf'(z_0)$, $M(f) = \frac{1}{a}f(z_0)$, *де* $z_0 \in G$, $C \in \mathbb{C}$;

4°. $L(f) = C(f(z_1) - f(z_2))$, $M(f) = \frac{1}{2a}(f(z_1) + f(z_2))$, *де* $z_1, z_2 \in G$, $C \in \mathbb{C}$.

2) *Якщо $a \neq b$, $a \neq -b$ то*

1°. $L = 0$, $M$ *– довільний лінійний функціонал на $\mathcal{H}(G)$;*

2°. $L(f) = Cf(z_0)$, $M(f) = \frac{1}{a+b}f(z_0)$, $z_0 \in G$, $C \in \mathbb{C}$.

3) *Якщо $a = -b$ то $L = 0$, $M$ – довільний лінійний функціонал на $\mathcal{H}(G)$.*

1. L. A. Rubel. Derivation pairs on the holomorphic functions, Funkcial. Ekvac, 1967, 10, P. 225-227.

2. N. R. Nandakumar. A Note on Derivation Pairs, Proc. Amer. Math. Soc, 1969, 21, P. 535–539.

3. N. R. Nandakumar. A note on the functional equation $M(fg) = M(f)M(g) + L(f)L(g)$ on $H(G)$, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1998, 68, P. 13–17.

4. Pl. Kannappan, N. R. Nandakumar. On a cosine functional equation for operators on the algebra of analytic functions in a domain, Aequationes Mathematicae, 2001, 61:3, P. 233-238.

5. Лінчук Ю.С. Операторне узагальнення одного результата Рубела, Укр. матем. журнал, 2011, 63:12, С. 1710-1716.

# Інтерполяційні інтегральні ланцюгові дроби, що не вимагають правила підстановки

**Володимир Макаров, Ігор Демків**

Ін-т математики НАН України, Київ

НУ "Львівська політехніка"

*ihor.demkiv@gmail.com*

Уперше інтерполяційні інтегральні ланцюгові дроби (І ІЛД) були уведені у роботі [1]. У [1] доведено, що вказане там визначення ядер є необхідною умовою, щоб інтегральний ланцюговий дріб був інтерполяційним на континуальній множині вузлів

$$x^n(z, \xi^n) = x_0 + \sum_{i=1}^{n} H(z - \xi_i)[x_i(z) - x_{i-1}(z)],$$

$$\xi^n = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \Omega_n = \{z^n : 0 \leq z_1 \leq \ldots \leq z_n \leq 1\}$$

для функціоналів $F(x(\cdot)) : L_1(0,1) \to R^1$ .

Достатні умови інтерполяційності інтегрального дробу з [1] були знайдені у роботі [2] і вони вимагають виконання "правила підстановки". Умови, які треба накласти на функціонал $F(x(\cdot))$ , щоб він задовольняв "правилу підстановки" наводяться у [3].

Але досліджувані у [1] та [2] І ІЛД мають одну ваду. Якщо покласти замість $x(z)$ та вузлів інтерполяції $x_i(z)$ , $i = \overline{1, n}$ константи, то І ІЛД не перейде у інтерполяційний ланцюговий дріб для функції однієї змінної. Щоб позбутися цієї вади у [4] уведений новий клас ІЛД, встановлені необхідні та достатні умови, щоб вказаний ІЛД був інтерполяційним для гладкого функціонала $F(x(\cdot)) : Q[0,1] \to R^1$ , де $Q[0,1]$ – простір кусково-неперервних функцій зі скінченним числом розривів першого роду. Достатня умова інтерполяційності також вимагає, щоб функціонал $F(x(\,\cdot\,))$ задовольняв "правило підстановки" [3].

"Правило підстановки" накладає суттєві обмеження на функціонал, тому доповідь присвячена побудові та дослідженню ІЛД, що інтерполює функціонал $F\left(x\left(\cdot\right)\right):Q\left[0,1\right]\to R^1$ і не потребує його виконання. При цьому залишається вимога, щоб вузли інтерполяції були континуальними.

Доведені необхідні та достатні умови інтерполяційності ІЛД. Встановлено представлення функціоналу $F\left(x\left(\cdot\right)\right)$ через побудований ІЛД. Показано, що побудований І ІЛД є природним узагальненням інтерполяційного ланцюгового дробу для функції однієї змінної.


1. Михальчук Б.Р. Інтерполяція нелінійних функціоналів за допомогою інтегральних ланцюгових дробів, Укр. матем. журнал, 1999, 51:3, С. 364–375.

2. Макаров В.Л., Хлобистов В.В., Михальчук Б.Р. Інтерполяційні інтегральні ланцюгові дроби, Укр. матем. журнал, 2003, 55:4. С. 479–488.

3. Макаров В.Л., Демків І.І., Михальчук Б.Р. Необхідні і достатні умови існування функціонального інтерполяційного полінома на континуальній множині вузлів, Доп. НАН України, 2003, 7, С. 7—12.

4. Макаров В.Л., Демків І.І. Новий клас інтерполяційних інтегральних ланцюгових дробів, Доп. НАН України, 2008, 11, С. 17—23.


# О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПЛОСКОЙ ГЛАДКОЙ ЗАМКНУТОЙ КРИВОЙ


**А.Н. Марковский**

Кубанский Государственный Университет, Россия

*mark@kubsu.ru*


Для гладкой кривой, ограничивающей односвязную область, используя свойства потенциала Робена на эквипотенциали конечного ранга, доказывается представление в виде суммы фундаментальных решений уравнения Лапласа.

1. Зададим на плоскости множество точек $z_j = \{x_j, y_j\}$ и соответствующие этим точкам положительные числа $c_j$, $j = 1, ..., n$; образуем линейную комбинацию:

$$\Psi(z) := \sum_{j=1}^{n} c_j E(z - z_j), \tag{1}$$

где $E(z) := \frac{1}{2\pi} \ln|z|$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа в $R^2$.

Рассмотрим линию уровня $S$ функции $\Psi(z)$, определенную константой $B$

$$\Psi(z)|_S = B. \tag{2}$$

Можно показать, что если $c_j > 0$, $j = 1, 2, ..., n$, то существует константа $B_2$, такая что при $B > B_2$ геометрическое место точек, удовлетворяющих тождеству (2), определяет кривую $S$, ограничивающую односвязную область $Q$, содержащую точки $z_j$, $j = 1, 2, ..., n$; такую кривую будем называть *эквипотенциалью конечного ранга.* Множество $\{(z_j, c_j)\}_{j=1}^n$ точек и коэффициентов, определяющее эквипотенциаль конечного ранга $S$, единственно.

2. Для функции $\Psi(z)$ и эквипотенциали $S$ справедливо интегральное представление [1]

$$B = \Psi(z) = \int_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Psi(\zeta) E(z - \zeta) dS_\zeta,\ z \in \bar{Q}^+ = R^2 \backslash Q,$$

где $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ – операция дифференцирования по внешней для области $Q$ нормали к границе $S$, а выражение в правой части – потенциал Робена.

3. Пусть задана кривая $L \in C^{1+\alpha}$, удовлетворяющая условию Ляпунова с показателем $\alpha > 0$; соответствующие константу и плотность Робена на $L$ обозначим $R_0$ и $\varphi^*$.

Рассмотрим функционал разности потенциалов на кривой $L$ в норме $L_2(L)$:

$$\rho_2(L, S) := \left\| \int_L \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Psi(\zeta) E(z - \zeta) dS_\zeta - \Psi(z) \right\|,$$

Можно показать, что $\rho_2(L, S) = 0$ тогда и только тогда, когда $L = S$.

4. Далее, в терминах константы $R_0$ и плотности $\varphi^*$ потенциала Робена формулируется достаточное условие сходимости последовательности эквипотенциалей $S_k$ к заданной кривой $L$ ($\rho_2(L, S_k) \to 0$, $k \to \infty$).

Следствием сходимости является существование и единственность множества точек $z_j$ и положительных коэффициентов $c_j$, определяющих заданную гладкую кривую; так при заданной константе $B$, кривая представляется суммой фундаментальных решений уравнения Лапласа

$$\sum_j c_j E(z - z_j) = B, \ z \in L.$$

1. Марковский А.Н. Интегральное представление линейной комбинации фундаментальных решений уравнения Лапласа, Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2011, 4, С. 49–54.

# Наближення нарізно неперервних функцій

**В.К. Маслюченко**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна

*math.analysis.chnu@gmail.com*

Впродовж ось уже понадстолітньої історії вивчення нарізно неперервних відображень та їх аналогів, цього важливого розділу аналізу, до 2000 року було всього кілька епізодів його взаємодії з давнішим розділом аналізу – теорією наближень. Піонерська праця А.Лебеґа [1], в якій він встановив, що кожна нарізно неперервна функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ належить до першого класу Бера, використовує апроксимацію неперервних функцій ламаними. На те, що ця апроксимація є рівномірною на відрізку, вперше звернув увагу М.Цуджі [2], який на основі цього вивів свій варіант теореми Бера про те, що проекції множини $D(f)$ точок розриву нарізно неперервних функцій $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ на обидві вісі є множинами першої категорії.

З іншого боку, дослідження про умови належності нарізно неперервних функцій $f : X \times Y \to Z$ до першого класу Бера, які постали у XX столітті як розвиток первісного результату А.Лебеґа, також спираються на поточкову апроксимацію неперервних функцій певними агрегатами. На це явно вказав Г.Ган [3], результати якого були розвинуті в [4]. В такому ж дусі можна подати і відомий результат В.Рудіна [5], в якому він один із перших використовує розбиття одиниці [4]. Цей результат Рудіна був значно розвинутий у працях багатьох математиків (В.Маслюченко, О.Собчук, В.Михайлюк, О.Карлова, Т.Банах).

У праці [6] було виявлено, що важливу роль в апроксимації нарізно неперервних функцій відіграють многочлени Бернштейна. Пізніше, в [7] многочлени Фейєра і Джексона були застосовані для апроксимації нарізно і сукупно неперервних функцій $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які $2\pi$-періодичні відносно другої змінної, а в [8] – розглянуті загальні питання апроксимації нарізно і сукупно неперервних функцій $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, зокрема, у тому випадку, коли $Y$ – такий компакт, що банахів простір $C(Y)$ неперервних функцій $g : Y \to \mathbb{R}$ з рівномірною нормою має базис Шаудера. О.Нестеренко помітив, що замість наявності базису Шаудера, тут можна застосоуввати іншу техніку, яка базується на одному результаті з [6] і приводить до кращих результатів, коли $Y$ – метризовний компакт.

Абстрактна схема застосувань методів теорії наближень для апроксимації нарізно неперервних функцій така. Розглядається послідовність операторів $A_n : C(Y) \to C(Y)$, така, що $A_n g \to g$ поточково чи рівномірно на $Y$ для кожної функції $g \in C(Y)$. Для нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ вводяться її $x$-розрізи $f^x : Y \to \mathbb{R}$, $f^x(y) = f(x, y)$, які є неперервними функціями. Тоді послідовність функцій $f_n(x, y) = (A_n f^x)(y)$ буде наближати функцію $f$ у тому чи іншому сенсі, при цьому функції $f_n$ можуть виявитися уже сукупно неперервними. Всі отримані раніше результати підпадають під цю схему.

Це і буде предметом розгляду оглядової доповіді, в якій вперше рівномірна і поточкова апроксимації нарізно неперервних функцій подаються з єдиних позицій. Крім того, в доповіді буде поставлено багато нерозв'язаних проблем, що стосуються цієї тематики.


1. Lebesgue H. Sur l'approximation des fonctions, Bull. Sci. Math., 1898, 22, P. 278–287.

2. Tsuji M. On Bair's Theorem concerning a function $f(x, y)$ which is continuous with respect to each variable $x$ and $y$, J. Math. Soc. Japan., 1951, 2:3, P. 210–212.

3. Hahn H. Reelle Funktionen. 1. Teil. Punktfunktionen. – Leipzig: Academische Verlagsgesellschaft M.B.H., 1932. – 416 p.

4. Глушко Г.А., Маслюченко В.К. Функції Гана і класифікація Бера, Мат.Студії, 2011, 36:1, С. 97–106.

5. Rudin W. Lebesgue first theorem, Math. Analysis and Aplications, Part B. Edited by Nachbin. Adv. in Math. Supplem. Studies 78. – Academic Press, 1981, P. 741–747.

6. Власюк Г.А., Маслюченко В.К. Многочлени Бернштейна і нарізно неперервні функції, Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 336-337. Математика. – Чернівці: Рута, 2007, С. 52-59.

7. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. Про наближення нарізно неперервних функцій, $2\pi$-періодичних відносно другої змінної, Карп. матем. публ., 2010, 2:1, С. 4-14.

8. Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В. Про наближення нарізно і сукупно неперервних функцій, Карп. матем. публ., 2010, 2:2, С. 11-21.


# Об одной оценке равноизмеримых перестановок функций из обобщённых пространств Лоренца


**Л.В. Матвиюк**

*lmatviuk@yandex.ru*


Пусть функция $\psi(x)$ не убывает и неотрицательна на $(0, 1)$, а функция $M(x)$ возрастает и неотрицательна на $[0, +\infty)$, кроме того

$$M(+0) = 0, \lim_{x \to +\infty} M(x) = +\infty.$$

Далее будем считать, что функции $M(x)$, $\psi(x)$ и число $\gamma \in [0, +\infty)$ таковы, что

$$\int_0^1 M(\psi(x)) \frac{dx}{x^\gamma} < +\infty.$$

Через $M_{\psi,\gamma}$ обозначим класс измеримых на единичном кубе $I_N = [0,1]^N$, $N \in \mathbb{N}$, 1-периодических по каждой переменной функций $f \in L(I_N)$, для которых

$$||f||^*_{M_{\psi,\gamma}} = \int_0^1 M\left(\frac{\psi(x)}{x}\int_0^x f^*(t)dt\right)\frac{dx}{x^\gamma} < +\infty.$$

Здесь $f^*(t)$ - невозрастающая на $[0,1]$ функция, равноизмеримая с функцией $|f(t)|$ на единичном кубе $I_N$. Заметим, что $||f||^*_{M_{\psi,\gamma}}$, вообще говоря, нормой не является. Если $M(x) = x^p$ при $0 < p < \infty$, $\gamma = 1$, то класс функций $M_{\psi,\gamma}$ совпадает с пространством Лоренца $\Lambda(\psi,p)$, а если к тому же $\beta_\psi = \overline{\lim\limits_{x\to+0}}\frac{\psi(2x)}{\psi(x)} < 2$, то - с пространством Лоренца $\Lambda^*(\psi,p)$.

Пусть $f \in M_{\psi,\gamma}$. Модулем непрерывности функции $f$ назовем

$$\omega^*_{M_{\psi,\gamma}}(f,\delta) = \sup_{\substack{0\le|hi|\le\delta,\\(i=1,\dots,N)}} ||\Delta_{\overline{h}}f||^*_{M_{\psi,\gamma}},$$

где $\Delta_{\overline{h}}f(\overline{x}) = f(\overline{x}+\overline{h}) - f(\overline{x}), \delta \in (0,1)$.

Будем говорить, что функция $M(x)$ удовлетворяет $\Delta_2$-условию, если существует постоянная $C_M \ge 0$ такая, что для всех $x \in (0,+\infty)$ выполняется неравенство

$$M(2x) \le C_M M(x).$$

Сформулируем основной результат.

**Теорема.** *Если функция $M(x)$ удовлетворяет $\Delta_2$-условию, то для любой функции $f \in M_{\psi,\gamma}$ и для любого $s \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство*

$$\sum_{n=s}^{\infty} M\left(\psi(2^{-nN})\left(f^*(2^{-nN}) - f^*(2^{-(s-1)N})\right)\right)2^{nN(\gamma-1)} \le C_{M,N,\gamma}\omega^*_{M_{\psi,\gamma}}(f,2^{-s}).$$

Автором ранее были получены оценки такого типа для функций из обобщённых пространств Лоренца $\Lambda(\psi,p)$ и $\Lambda^*(\psi,p)$ ([1]).

1. Матвиюк Л. В. Теоремы вложения классов функций с заданными мажорантами модулей непрерывности(наилучших приближений): Дисс. канд. физ.-мат. наук: спец. 01.01.01./Л. В. Матвиюк. — Одесса, 1990. - 115 с.

# Функциональные инварианты вещественно-аналитических седлоузлов

**Ю.И. Мещерякова**

Южно–Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия

*yulimess@mail.ru*

Пусть $V$ — класс ростков вещественно-аналитических векторных полей в $(\mathbb{R}^2,0)$ с седло-узловой особой точкой 0.

Ростки $v$ и $\tilde{v}$ из $V$ называют *аналитически (формально) эквивалентными*, если существует локальная вещественно-аналитическая (формальная) замена координат $H$ в $(\mathbb{R}^2,0)$, переводящая один росток в другой: $H' \cdot v = \tilde{v} \circ H$.

Ростки $v$ и $\tilde{v}$ из $V$ называют *орбитально аналитически (формально) эквивалентными*, если существует локальная вещественно-аналитическая замена координат, переводящая фазовый портрет одного ростка в фазовый портрет другого (если существует формальная замена координат $H$ и формальный степенной ряд $k$ с ненулевым свободным членом такие, что $H' \cdot v = k \cdot \tilde{v} \circ H$).

Как известно [1,2], типичный росток из $V$ формально орбитально эквивалентен одному из ростков вида

$$v_\lambda = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^2}{1+\lambda y}\frac{\partial}{\partial y}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Обозначим через $V_\lambda$ — класс ростков, формально орбитально эквивалентных $v_\lambda$. Следующие две теоремы – вещественные аналоги основных результатов из [3].

**Теорема о формальной классификации.** *Каждый росток из $V_\lambda$ формально эквивалентен одному из ростков $v_{\lambda,a,b} = v_\lambda \cdot (a + by)$, где $a, b \in \mathbb{R}$.*

Пусть $\mathcal{M}_\lambda$ — пространство всех троек $(r, \varphi, \psi)$ таких, что $r \in \mathbb{R}$; $\varphi$ и $\psi$ голоморфны в $(\mathbb{C}, 0)$; $\overline{\varphi(z)} = \varphi^{-1}(\bar{z}), \psi(\bar{z}) = \overline{\psi(z)}, \quad \varphi'(0) = exp(2\pi i\lambda)$.

Две тройки $(r,\ \varphi,\ \psi)$ и $(\tilde{r},\ \tilde{\varphi},\ \tilde{\psi})$ из $\mathcal{M}_\lambda$ будем называть *эквивалентными*, если для некоторого $R \in \mathbb{R}$

$$\tilde{r} = R \cdot r, \quad \tilde{\varphi}(z) \equiv R\varphi(R^{-1}z), \quad \tilde{\psi}(z) = \psi(R^{-1}z).$$

Пусть $M_\lambda$ — пространство классов эквивалентности из $\mathcal{M}_\lambda$.

**Теорема об аналитической классификации ростков из $V_{\lambda,a,b}$.** *Существует такое отображение*

$$m : V_{\lambda,a,b} \to M_{\lambda,a,b}, m : v \mapsto m_v,$$

*что справедливы следующие утверждения:*

*1. $v \sim \tilde{v} \Leftrightarrow m_v = m_{\tilde{v}}$;*

*2. Для любого $m \in M_{\lambda,a,b}$ существует такое $v \in V_{\lambda,a,b}$, что $m = m_v$.*

1. Martinet J., Ramis J.P. Probléme de modules pour des équations differentielles non linéaires du premier ordre, Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci., 1982, 55, P. 63–164.

2. Il'yashenko Yu. S. Nonlinear Stokes Phenomena, Nonlinear Stokes Phenomena, Il'yashenko Yu., editor, Adv. in Sov. Math., 14, Amer. Math. Soc. Providence, 1993.

3. Воронин С.М., Мещерякова Ю.И. Аналитическая классификация ростков голоморфных векторных полей с вырожденной элементарной особой точкой, Вестник Челябинского университета, Серия 3. Математика. Информатика. Механика, 2003, 3, С. 16-41.

# Наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних сумами Фур'є в просторі $L_p$, $p = 1, \infty$.

**В.В. Миронюк**
Інститут математики НАН України, Київ
*vetalmyronjuk@ukr.net*

Досліджуються наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ [1] періодичних функцій $d$ ($d \geq 1$) змінних у метриці простору $L_p$. Дані класи при певному виборі функцій $\Omega(t)$ співпадають з відомими класами Нікольського-Бєсова $B^{r}_{p,\theta}$. Надалі будемо вважати, що $\Omega(t)$ — задана функція однієї змінної типу модуля неперервності порядку $l$, яка задовольняє умови Барі–Стєчкіна $(S)$ і $(S_l)$ [2].

Нехай $L_p$ – простір вимірних $2\pi$-періодичних функцій $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$ зі стандартною нормою. Для $f \in L_1(\pi_d)$ і $n \in \mathbb{N}$ через $S_n(f,x)$ позначимо кратну суму Фур'є

$$S_n(f,x) = \sum_{\substack{|k_j| \le n \\ j=\overline{1,d}}} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

де $(k,x) = k_1x_1 + \ldots + k_dx_d$ і $\widehat{f}(k)$ — коефіцієнти Фур'є функції $f$.

Отримана точна за порядком оцінка величини відхилення частинних сум Фур'є періодичних функцій $d$ змінних із класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в просторі $L_p$, $p = 1, \infty$, яка визначається таким чином:

$$\mathcal{E}_n(B^{\Omega}_{p,\theta})_p = \sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}} ||f(\cdot) - S_n(f,\cdot)||_p \, .$$

Сформулюємо отриманий результат.

**Теорема.** *Нехай $p = 1, \infty$ і функція $\Omega(t)$ задовольняє умову $(S)$ з деяким $\alpha > 0$, а також умову $(S_l)$, тоді при $1 \le \theta \le \infty$ справедлива порядкова оцінка*

$$\mathcal{E}_n(B^{\Omega}_{p,\theta})_p \asymp \Omega(n^{-1}) \ln^d n.$$

**Зауваження 1.** У випадку $\Omega(t) = t^r$, $0 < r < l$ і $\theta = \infty$ з даної теореми одержимо порядкову оцінку для класів Нікольського, яка встановлена в монографії [3, розд. 2].

**Зауваження 2.** При $d = 1$ відповідний результат для класів $B^{\Omega}_{1,\theta}$ був отриманий в [4], а для класів $B^{r}_{1,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, $r > 0$ — в [5].

1. Liu Yongping. Xu Cuiqiao. The infinite-dimensional widths and optimal recovery of generalized Besov classes, J. Complexity, 2002, 18:3, P. 815 – 832.

2. Бари Н.К., Стечкин С.Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций, Тр. Моск. мат. о-ва, 1956, 5, С. 483 – 522.

3. Temlyakov V.N. Approximation of periodic functions. — New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. — 272 p.

4. Стасюк С.А. Приближение суммами Фурье классов $B^{\omega}_{1,\theta}$ периодических функций в пространстве $L_1$, Зб. Праць Ін-ту математики НАН України, 2010, 7:1, С. 338 – 344.

5. Романюк А.С. Приближение классов $B^{r}_{p,\theta}$ периодических функций одной и многих переменных, Матем. заметки, 2010, 87:3, С. 429 – 442.

# О ЛОКАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

**В.Л. Мирошниченко**

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

*miroshn@math.nsc.ru*

Пусть на отрезке $[a,b]$ в узлах сетки $\Delta$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ заданы значения функции $f(x)$: $f_i = f(x_i), i = 0, \ldots, n$. Дополним сетку $\Delta$ узлами $x_{-3} \le x_{-2} \le x_{-1} \le x_0$ и $x_{n+3} \ge x_{n+2} \ge x_{n+1} \ge x_n$. Функция

$$S(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} \alpha_i B_i(x),$$

где $B_i(x) \in C^2$ — кубические нормализованные $B$-сплайны, а каждый из коэффициентов $\alpha_i$ явным образом определяется только через несколько значений $f_k$ из окрестности узла $x_i$, называется кубическим локально аппроксимационным сплайном (локальной аппроксимацией) [1].

Простейший и часто используемый в приложениях вариант локальной аппроксимации: $\alpha_i = f_i$, $i = 0, \ldots, n$; $\alpha_{-1} = f_0, \alpha_{n+1} = f_n$; $x_{-j} = x_0$, $x_{n+j} = x_n$, $j = 0, 1, 2, 3$.

В представленном докладе обсуждаются следующие вопросы.

- Приводится обзор алгоритмов построения формул локальной аппроксимации. Особое внимание при этом обращается на случай неравномерной сетки $\Delta$, на выбор дополнительных узлов сетки и способы определения коэффициентов $\alpha_i$ вблизи концов отрезка $[a, b]$.

- Даётся обзор оценок точности приближения локальными сплайнами и проводится их сравнение с аналогичными оценками для кубических интерполяционных сплайнов.

- Проводится анализ изогеометрических свойств локальной аппроксимации (сохранение монотонности и выпуклости исходных сеточных данных). Заметим, что упомянутая выше простейшая формула локальной аппроксимации не наследует выпуклость исходных данных даже в случае равномерной сетки $\Delta$. Приводятся формулы локальной аппроксимации, гарантирующей сохранение свойств монотонности и выпуклости исходных данных на любой неравномерной сетке.

Изложение материала иллюстрируется численными примерами.

1. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980.

2. Мирошниченко В.Л. Об интерполяции и аппроксимации сплайнами, Вычислительные системы, 1983, 100, С. 83–100.

3. Мирошниченко В.Л. Выпуклость и монотонность кубической локальной сплайн-аппроксимации, Вычислительные системы, 1992, 147, С. 11–43.

# О свойствах обобщенного пространства типа Бесова-Морри

**А.М. Наджафов, А.Т. Оруджова**

Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет

Институт Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана

*nadjafov@rambler.ru*

В работе вводится пространство с параметрами типа

$$\bigcap_{i=0}^{n} \mathcal{L}^{<l^i>}_{p^i,\theta^i,a,æ,\tau}(G) \tag{1}$$

и изучается дифференциальные свойства функций из этого пространства. С этой целью сначала получены интегральные представления функций из постренных пространств, когда область $G$ удовлетворяет условию гибкого рога. Пространством $\bigcap\limits_{i=0}^{n} \mathcal{L}^{<l^i>}_{p^i,\theta^i,a,æ,\tau}(G)$ назовем нормированное пространство функции $f$ определенных на $G$ с конечной нормой

$(m_j^i > l_j^i - k_j^i > 0,\ j = 1, 2, \ldots, n)$

$$\|f\|_{\bigcap_{i=0}^{n} \mathcal{L}^{<l^i>}_{p^i,\theta^i,a,æ,\tau}(G)} = \sum_{i=0}^{n} \left\{ \int_0^{h_{01}^i} \cdots \int_0^{h_{0n}^i} \left[ \frac{\left\| \Delta^{m^i}(h, G_h)\, D^{k^i} f \right\|_{p^i,a,æ,\tau}}{\prod_{j \in e_{l^i}} h_j^{l_j^i - k_j^i}} \right]^{\theta^i} \prod_{j \in e_{l^i}} \frac{dh_j}{h_j} \right\}^{\frac{1}{\theta^i}},$$

$$\|f\|_{p^i,a,æ,\tau,G} = \sup_{x \in G} \left\{ \int_0^{\infty} \left[ [t]_1^{-\frac{(æ,a)}{p^i}} \|f\|_{p^i, G_{t^{æ}}(x)} \right]^{\tau} \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{\tau}},$$

где $l^i = (l_1^i, l_2^i, \ldots, l_n^i)$, $l_j^i \geq 0$ $(j \neq i, j = 1, 2, \ldots, n)$, $l_i^i > 0$ $(j = i)$; $m^i = (m_1^i, m_2^i, \ldots, m_n^i)$, $m_j^i$-натуральные; $k^i = (k_1^i, k_2^i, \ldots, k_n^i)$, $k_j^i$-целые неотрицательные числа, $p^i \in [1, \infty)$; $\theta^i$, $\tau \in [1, \infty]$; $a \in [0, 1]^n$, $æ \in (0, \infty)^n$; $[t]_1 = min\{1, t\}$; $G_{t^{æ}}(x) = G \bigcap \{y : |y_j - x_j| < \frac{1}{2} t^{æ_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n\}$, $e_{l^i}$- множество отличных от нуля индексов компонент вектора $l^i$.

Отметим, что пространство (1) совпадает с пространством типа Бесова-Морри $B^{l_1, l_2, \ldots, l_n}_{p^0, p^1, \ldots, p^n, \theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^n, a, æ, \tau}(G)$, в случае, когда $l^0 = (0, \ldots, 0)$, $l^i = (0, \ldots, 0, l_i, 0, \ldots, 0)$ которые изучены в [1].

Доказаны теоремы вложения типа

1) $D^{\nu} : \bigcap_{i=0}^{n} \mathcal{L}^{<l^i>}_{p^i,\theta^i,a,æ,\tau_1}(G) \hookrightarrow L_{q,b,æ,\tau_2}(G)$ $(C(G))$;

2) доказано также, что для функции из пространства (1), обобщенные производные $D^{\nu} f$ удовлетворяют условию Гельдера в метрике $L_q(G)$ или $C(G)$.

1. A.M. Najafov. On some properties of functions in the Besov-Morrey type spaces $B^{l}_{p^0, p^1, \ldots, p^n, \theta, a, æ, \tau}(G)$, Khazar Journal of Math., 2006, 2:1, P. 41-62.

# Про деякі властивості фракталів Ньютона

**М.О. Назаренко, Т.А. Брязкало**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

*oleksij@uos.net.ua, tianan@yandex.ru*

Важливим напрямом сучасної математики є фрактальний аналіз та його застосування. Теорія фракталів досить молода і перспективна наука, тому систематизація, переосмислення і цілісні результати в цій галузі мають велике значення як для розвитку загальної теорії, так і для розв'язування задач прикладного характеру. Одновимірні комплексні відображення породжують найпопулярніші останніми роками фрактали Жюліа, Мандельброта, Ньютона та інші.[4]. В даній доповіді зупинимося на найважливіших властивостях фрактала Ньютона.

Розглянемо рівняння виду $p(z) = 0$, де $p(z)$ — алгебраїчний многочлен, заданий на комплексній площині $\mathbb{C}$. Нагадаємо [1], що фракталом Ньютона називається фігура, для створення якої необхідно для кожної точки виконати цикл ітерацій згідно з формулою:

$$z_{n+1} = z_n - p(z_n)/p'(z_n), n = 0, 1, 2, \ldots,$$

де $z_0$ - початкова ітерація. Послідовність наближень $\{z_m : m \geq 1\}$, що будується за допомогою методу Ньютона є траєкторією раціонального ендоморфізма $f : z \mapsto z - (p(z))/(p'(z))$. Припустимо, що нулі $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ многочлена $p(z)$ прості і $\alpha_i$ є суперпритягуючими нерухомими точками ендоморфізма $f$. Крім цього, $f$ має нерухому точку $\infty$. Критичними точками

$f$ є точки $\alpha_i$ і нулі полінома $p''(z)$. [2]. Якщо початкове наближення $z_0$ достатньо близьке до $\alpha_i$, то процес Ньютона буде збігатися до $\alpha_i$ з експоненційною швидкістю.[3]. Розглянемо питання про глобальну збіжність процесу Ньютона.

Нехай тепер $p(z) = z^k - a, k \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$. Тоді згідно [1] отримаємо :

$$z_{n+1} = \frac{(k-1)z_n^k + a}{k(z_n^{k-1})}, n = 0, 1, 2 \dots.$$

Вибираючи будь-яке початкове наближення, ми знайдемо корінь $k$-ого степеня з числа $a$. Як відомо, дане рівняння має $k$ коренів

$$z_{j+1} = \sqrt[k]{a}(\cos(2j\pi/k) + i\sin(2j\pi/k)), j = 0, 1, 2, \dots,$$

що знаходяться на колі радіуса $\sqrt[k]{a}$ і віддалені один від одного на кут $2\pi/k$ [1].

**Твердження.** *Нехай многочлен $p(z)$ має два простих нулі $\alpha_1, \alpha_2$ і $L$ - пряма, перпендикулярна відрізку $[\alpha_1, \alpha_2]$ і проходить через його середину; $P_1, P_2$ - відкриті півплощини,на які $L$ разбиває площину, причому $\alpha_i \in P_i$. Тоді якщо $z_0 \in P_i, i = 1, 2$, то процес Ньютона $\{z_m : m \geq 1\}$ збігаєтьcя до $\alpha_i$.*

1. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. — Москва-Ижевск, 2004. — 160 с.

2. Любич М. Ю. Динамика рациональных преобразований: топологическая картина, Успехи математических наук, выпуск 4 (250), 1986 (июль - август), т. 41.

3. Турбин А.Ф., Працевитий Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения. — К.: Наукова думка, 1992. — 200 с.

4. Mandelbrot B.B. Fractals: Form, Chance and Dimension. — San Francisco: Freeman, 1977. — 346 p.

# Апроксимація компактних опуклих множин в хаусдорфовій метриці

**М.О. Назаренко, В.В. Шкапа**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

*oleksij@uos.net.ua, vshkapa@ukr.net*

Теорія наближень є важливою складовою частиною сучасного аналізу. Необхідність зображення складних математичних об'єктів більш простими виникає як при розгляді теоретичних питань математики, так і при розв'язанні задач прикладного змісту. При дослідженні багатьох задач апроксимаційного змісту досить природньо користуватися хаусдорфовою відстанню між множинами, яка, на відміну від інших метрик, візуально дає більш зручне представлення [4].

В даному повідомленні висвітлюється зв'язок хаусдорфової метрики між компактними опуклими множинами з рівномірним відхиленням їх опорних функцій. Нехай $\mathcal{K}_n$ - множина всіх непорожніх компактних опуклих множин у $n$-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ і $\{K_1, K_2\} \subset \mathcal{K}_n$. Рівність

$$d(K_1, K_2) := \max\{\sup_{x_1 \in K_1} \inf_{x_2 \in K_2} d(x_1, x_2), \sup_{x_2 \in K_2} \inf_{x_1 \in K_1} d(x_1, x_2)\}, \quad (1)$$

де $d(x_1, x_2) = \|x_2 - x_1\|$ — евклідова метрика між точками $x_1$ і $x_2$ визначає хаусдорфову метрику між опуклими компактними множинами $K_1$ і $K_2$ [1]. У випадку одноточкових множин ця метрика співпадає з евклідовою.

Якщо $\{K_1, K_2\} \subset \mathcal{K}_n$ — непорожні компактні опуклі множини із $\mathbb{R}^n$ з опорними функціями $h_1, h_2$ , то справедлива наступна рівність

$$d(K_1, K_2) = \max_{u \in \partial B_1(0)} |h_2(u) - h_1(u)|, \qquad (2)$$

де $\partial B_1(0)$ — одинична сфера в $\mathbb{R}^n$ з центром в точці 0.

Рівність (2) показує, що клас $\mathcal{K}_n$ з введеною відстанню $d$ є метричним простором. При цьому топологію, індуковану в $\mathcal{K}_n$ метрикою $d$, називають хаусдорфовою топологією простору $\mathcal{K}_n$ [5].


1. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. — М.: Наука, 1985. — 350 с.

2. Моклячук М. П. Основи опуклого аналізу. — К.: ТВіМС, 2004. — 240 с.

3. Сендов Б. Хаусдорфовые приближения. — София: Издательство болгарской академии наук, 1979. — 280 с.

4. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. - М.: Мир, 1973. — 468 с.

5. Магрил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В.М. Выпуклый анализ и его приложения. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 176 с.


# Про одну характеризацію кліковості функцій двох змінних


**Василь Нестеренко**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна

*math.analysis.chnu@gmail.com*


Розпочате в класичних роботах Р.Бера та В.Осгуда дослідження зв'язків між нарізною та сукупною неперервністю дістало своє продовження в працях багатьох математиків XX століття. В них умова неперервності замінювалася різними її ослаблення. Одним з таких ослаблень є кліковість [1]. На відміну від нарізної неперервності нарізна кліковість функцій $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не гарантує існування точок сукупної кліковості. Однак, Л.Фудалі в [2] встановив, що коли $X$ – берівський простір, простір $Y$ має зліченну псевдобазу, $Z$ – метричний простір, функція $f : X \times Y \to Z$ квазінеперервна відносно першої змінної і клікова відносно другої, то $f$ клікова за сукупністю змінних.

В цьому повідомленні оголошуються результати, які не тільки узагальнюють теорему Фудалі, а й дають характеризацію сукупної кліковості функцій двох змінних для певних типів просторів.

Нехай $X$ і $Y$ – топологічні простори, а $Z$ – метричний простір. Через $\omega_f(A)$ позначимо коливання функції $f : X \to Z$ на множині $A \subseteq X$. Для функції $f : X \times Y \to Z$ і довільних точок $x \in X$ та $y \in Y$ розглянемо функції $f^x : Y \to Z, f_y : X \to Z$, які визначаються так: $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$. Оскільки в цьому повідомленні розглядаються функції лише зі значеннями в метричному просторі, то ми подамо означення потрібних нам типів ослабленої неперервності для метричного простору значень. Функція $f : X \to Z$ називається *квазінеперервною (кліковою) у точці* $x \in X$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і околу $U$ точки $x$ в $X$ існує відкрита непорожня множина $G$ в $X$, така, що $G \subseteq U$ і $\omega_f(\{x\} \cup G) < \varepsilon$ ($\omega_f(G) < \varepsilon$).

Ми кажемо, що функція $f : X \times Y \to Z$ *задовольняє умову (B)*, якщо для кожного $\varepsilon > 0$, довільних відкритих непорожніх множин $U$ в $X$ і $V$ в $Y$, довільної множини $E \subseteq X$ щільної в $U$, для яких $\omega_f(E \times V) < \varepsilon$, існують відкриті непорожні множини $G$ в $X$ і $H$ в $Y$, такі, що $G \subseteq U$, $H \subseteq V$ і $\omega_f(G \times H) < \varepsilon$. Функція $f : X \times Y \to Z$ *задовольняє умову*

*(C)*, якщо для кожного $\varepsilon > 0$, для довільної множини $E$ другої категорії в $X$ і довільної відкритої непорожньої множини $V$ в $Y$, існують десь щільна множина $E_1$ в $X$ і точка $y \in V$, такі, що $E_1 \subseteq E$ і $\omega_{f_y}(E_1) < \varepsilon$.

Встановлено наступні результати.

**Теорема 1.** *Нехай $X$ – топологічний простір, простір $Y$ має зліченну псевдобазу, $Z$ – метричний простір, функція $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умови (B) та (C) і $f^x$ – кліковa для всіх $x$ з деякої залишкової множини $M$ в $X$. Тоді існує залишкова в $X$ множина $A$, така, що функція $f$ кліковa в кожній точці множини $A \times Y$.*

**Теорема 2.** *Нехай $X$ – берівський простір, простір $Y$ має зліченну псевдобазу, $Z$ – метричний простір і $f : X \times Y \to Z$ – функція. Тоді для того, щоб і функція $f$ була кліковою необхідно і достатньо, щоб функція $f$ задовольняла умови (B) та (C) і існувала залишкова множина $M$ в $X$, така, що $f^x$ кліковa для $x \in M$.*


1. Thielman H.P. Types of functions, Amer. Math. Monthly, 1953, 60, P. 156–161.

2. Fudali L.A. On cliquish functions on product spaces, Mathematica Slovaca, 1983, 33:1, P. 53–58.


# О решении методом прямых нелинейного уравнения


**Н.В. Нестеренко**

Национальный университет пищевых технологий, Киев, Украина

*model@imath.kiev.ua*


Построение эффективных приближенных методов решения и связанные с ним вопросы существования и единственности решения является одной из важных проблем вычислительной математики. Способность современных надежных алгоритмов и машинных программ к автоматическому решению сложных систем обыкновенных дифференциальных уравнений поставила перед классическим линейным методом ряд проблем.

Метод прямых является промежуточным между аналитическими и сеточными методами. Сущность метода состоит в том, что для данной системы дифференциальных уравнений в частных производных дискретизируются все независимые переменные кроме одной. Эта полудискретная процедура дает удвоенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая затем численно интегрируется.

Рассматривается нелинейное уравнение диффузии

$$u_t = [H(x,t,u)u_x]_x + f(x,t,u,u_x), \quad 0 < x < 1,\ 0 < t \le T,$$

$$u(x,0) = F(x), \quad 0 \le x \le 1,$$
$$\alpha_1(t)u(0,t) + \alpha_2(t)u_x(0,t) = \alpha_3(t), \quad 0 < t \le T,$$
$$\beta_1(t)u(1,t) + \beta_2(t)u_x(1,t) = \beta_3(t), \quad 0 < t \le T,$$

где для стабильности: $m \le H \le M,\ u \in (-\infty, \infty)$.

Первый шаг заключается в дискретизации пространственной переменной в дифференциальном уравнении с частными производными с целью получения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Это в свою очередь требует выполнения краевых условий. Положим $\triangle x = h = 1/N$ ограничена слева прямой $i = 0$, а справа $i = N$, а $H_{i\pm1/2} = H(x_{i\pm1/2}, t, u_{i\pm1/2})$. Тогда для $i = 0$

$$\frac{du_0}{dt} = \begin{cases} 0,\ u_0 = \alpha_3/\alpha_1, & \text{если } \alpha_2 = 0, \\ \dfrac{2}{h}\left[H_{1/2}\dfrac{u_x - u_0}{h} - H_0\dfrac{\alpha_3 - \alpha_1 u_0}{\alpha_2}\right] + f\left(x_0, t, u_0, \dfrac{\alpha_3 - \alpha_1 u_0}{\alpha_2}\right), & \text{если } \alpha_2 \ne 0, \end{cases}$$

для $i = 1, \dots, N-1$

$$\frac{du_i}{dt} = \left[H_{i+1/2}(u_{i+1} - u_i) - H_{i-1/2}(u_i - u_{i-1})\right] \frac{1}{h^2} + f\left(x_i, t, u_i, \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}\right)$$

и для $i = N$

$$\frac{du_N}{dt} = \begin{cases} 0, \ u_N = \beta_3/\beta_1, & \text{если } \beta_2 = 0, \\ \frac{2}{h}\left[H_N \frac{\beta_3 - \beta_1 u_N}{\beta_2} - H_{N-1/2}\frac{u_N - u_{N-1}}{h}\right] + f\left(x_N, t, u_N, \frac{\beta_3 - \beta_1 u_N}{\beta_2}\right), & \text{если } \beta_2 \neq 0. \end{cases}$$

Начальные условия: $u_i(0, x_i) = F(x_i),\ i = 0, 1, \dots, N$.

С помощью линейного метода могут быть решены разнообразные задачи. Результаты, полученные линейным методом подтверждаются альтернативным итерационным методом.

1. Михлин С.Г. О рациональном выборе координатных функций в методе Ритца, Журн. выч. матем. и матем. физ., 1962, 2:3.

# Про дію диференціального виразу нескінченного порядку у класах аналітичних у крузі функцій

**З.М. Нитребич**

Національний університет “Львівська політехніка”, Україна

*znytrebych@gmail.com*

Дослідження задач з локальними та нелокальними багатоточковими умовами, інтегральними умовами та умовами типу Діріхле за часовою змінною у смугах для диференціальних рівнянь із частинними похідними за допомогою диференціально-символьного методу [1, 2] дозволяє зображати розв'язки цих задач у вигляді дій диференціальних виразів нескінченного порядку, символами яких є праві частини умов, на деякі цілі або мероморфні функції параметрів. Наприклад, розв'язок диференціально-функціонального рівняння

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = U(t, x+1), \quad t \in (0,1), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

що задовольняє інтегральну умову

$$\int_0^1 U(t,x)\, dt = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

зображається у вигляді

$$U(t,x) = \varphi\Big(\frac{d}{d\nu}\Big)\left\{\frac{\exp[t\exp[\nu] + \nu x + \nu]}{\exp[\exp[\nu]] - 1}\right\}\Bigg|_{\nu=0}. \tag{3}$$

У фігурних дужках формули (3) міститься мероморфна функція щодо $\nu$. На неї діє за умови аналітичності функції $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ диференціальний вираз $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{d}{d\nu}\right)^n$. Після дії параметр $\nu$ покладається рівним нулеві.

Приклад задачі (1), (2) та вигляд (3) розв'язку цієї задачі зводиться до обгрунтування коректності дії довільного диференціального виразу нескінченного порядку $L(\frac{d}{dz})$ з аналітичним символом $L(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$ на аналітичні в деякому крузі функції. Сформулюємо отриманий результат.

**Теорема.** *Нехай $f(z)$ – аналітична функція в крузі $B_d = \{z \in \mathbb{C} : |z| < d\}$, $d \in \mathbb{R}$, $d > 0$, а $L(\lambda)$ – ціла функція експоненційного типу, причому меншого за $d$. Тоді $L(\frac{d}{dz})f(z)$ є аналітичною в $B_d$ функцією.*

Відповідно до цієї теореми розв'язок задачі (1), (2) існує та є єдиний у відповідному класі функцій, якщо $\varphi(x)$ є звуженням на $\mathbb{R}$ цілої функції $\varphi(z)$ експоненційного типу $\sigma$, де $0 < \sigma < \sqrt{\ln^2(2\pi) + \pi^2}$.


1. Каленюк П.І., Нитребич З.М. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. — Львів: Вид-во Нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2002. – 192 с.

2. Каленюк П.И., Баранецкий Я.Е., Нитребич З.Н. Обобщенный метод разделения переменных. – К.: Наук. думка, 1993. – 232 с.


# Солнечность множества вещественнозначных наипростейших дробей в пространстве $C([a, b])$


**Ярослав Новак**

Институт математики НАН Украины, Киев, Украина

*novak@imath.kiev.ua*


*Наипростейшей дробью степени $n$* называется рациональная функция вида $R_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z-a_k}$, $\{a_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\})$. О наипростейших дробях как апарате приближения см., например, [1-3].

Пусть $X$ — линейное нормированное пространство (с нормой $\|\cdot\|$), $M \subset X$ — непустое множество. *Метрической проекцией* на $M$ называется многозначное отображение $P_M : X \to 2^X$ $P_M x := \{y \in M : \|x - y\| = \inf_{z \in M} \|x - z\|\}$, $x \in X$.

Множество $M \subset X$ называется *строгим солнцем* (см., например, [4]) в пространстве $X$, если для каждого $x \in X$ множество $P_M x$ непустое и $y \in P_M\{y + \lambda(x - y)\}$ для всех $y \in P_M x$, $\lambda \geq 0$.

Пусть $X = C([a, b])$ $(a < b)$ с равномерной метрикой, $M$ — множество наипростейших дробей степени, не выше $n$, которые не имеют полюсов на $\Delta := [a, b]$ (или, что то же, $M = \mathbf{SR}_n \cap C(\Delta)$). В этом случае для данной функции $f \in C(\Delta)$ множество $P_M f$ состоит из наипростейших дробей наилучшего равномерного приближения функции $f$ на отрезке $\Delta$.

**Теорема.** *Множество $\mathbf{SR}_n \cap C(\Delta)$ является строгим солнцем в пространстве $C(\Delta)$.*


1. Данченко В. И. О приближении наипростейшими дробями, Матем. заметки, 2001, 70:4, С. 553—559.

2. Новак Я. В. О наилучшем локальном приближении наипростейшими дробями, Матем. заметки, 2008, 84:6, С. 882—887.

3. Данченко В. И., Кондакова Е. Н. Чебышевский альтернанс при аппроксимации констант наипростейшими дробями, Труды мат. ин-та им. В.А. Стеклова, 2010, 270, С. 86—96.

4. Власов Л. П. Аппроксимативно выпуклые множества в банаховых пространствах, ДАН СССР, 1965, 163, С. 18—21.

# Приближение периодических аналитических функций повторными суммами Валле Пуссена

**О.А. Новиков, О.Г. Ровенская, Т.В. Шулик**

Славянский государственный педагогический университет, Украина

*sgpi@slav.dn.ua*

Следуя А.И. Степанцу [1], обозначим $C^q_\beta H_\omega$, $q \in (0;1)$, $\beta \in R$, классы непрерывных $2\pi$–периодических функций $f(x)$, которые можно представить в виде свертки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t)P^q_\beta(t)\,dt,$$

в которой $P^q_\beta(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})$ – ядро Пуассона, а для функции $\varphi(x)$ выполнены условия $|\varphi(t') - \varphi(t'')| \le \omega(|t'-t''|), \forall t', t'' \in R$, где $\omega(t)$ – произвольный фиксированный модуль непрерывности.

Пусть $p_1, p_2, ..., p_r$ — произвольные натуральные числа такие, что $\sum\limits_{k=1}^{r} p_k < n$, $S_n(f;x)$ — суммы Фурье. Тогда $r$–повторные суммы Валле-Пуссена определим следующим соотношением

$$V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f,x) = \frac{1}{p_1}\sum_{k_1=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{p_2}\sum_{k_2=k_1-p_2+1}^{k_1}...\frac{1}{p_r}\sum_{k_r=k_{r-1}-p_r+1}^{k_{r-1}} S_{k_r}(f,x).$$

Для верхних граней уклонений многочленов $V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f,x)$ на классах $C^q_\beta H_\omega$ получено утверждение.

**Теорема**. *Пусть $q \in (0;1)$, $\beta \in R$, $\sum_{i=1}^r p_i = \Sigma_p < n$ и $\omega(t)$ – произвольный модуль непрерывности. Тогда при $n - \Sigma_p \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}(C^q_\beta H_\omega; V^{(r)}_{n,\overline{p}}) = \frac{2q^{n-\Sigma_p+r}}{\pi^2\prod\limits_{i=1}^{r} p_i} e_{n-\Sigma_p}(\omega)\int_0^{\pi} Z_q^{r+1}(x)dx + O(1)\frac{q^{n-\Sigma_p+r}}{\prod\limits_{i=1}^{r} p_i}\frac{\omega\left([n-\Sigma_p]^{-1}\right)}{(n-\Sigma_p)}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{(1-q)^{r+3}} + \frac{1}{(1-q)^{2r}}\right] + O(1)\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{r} p_i}\left(\sum_{\alpha(r-1)\subset\overline{r}} \frac{q^{n-\Sigma_p^{\alpha(r-1)}+r}}{(1-q)^{r+1}}\omega\left([n-\Sigma_p^{\alpha(r-1)}]^{-1}\right)\right),$$

*где $\overline{r} = \{1,2,...,r\}$, $\alpha(i)$ – множество, содержащее $i$ элементов, $\Sigma_p^\alpha = \sum_{j\in\alpha} p_j$,*

$$Z_q(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2q\cos x + q^2}}, \qquad e_{n-\Sigma_p}(\omega) = \theta_\omega(n)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(2\tau(n-\Sigma_p)^{-1})\sin\tau d\tau,$$

*$\theta_\omega(n) \in [1/2;1]$, причем $\theta_\omega(n) = 1$, если $\omega(t)$ – выпуклый модуль непрерывности, $O(1)$ – величина равномерно ограниченная по $n$, $q$, $\beta$, $p_i$, $i = 1,2,...,r$.*

*Для $r = 2\nu - 1$, $\nu \in \mathbb{N}$*

$$\int_0^{\pi} Z_q^{r+1}(x)dx = \int_0^{\pi}\frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^\nu} = \frac{\pi}{(1-q^2)^{2\nu-1}}\sum_{k=0}^{\nu-1}\left(C^k_{\nu-1}\right)^2 q^{2k},$$

*где $C^k_n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальные коэффициенты.*

1. Степанец А.И. Приближение аналитических непрерывных функций, Мат. сборник, 2001, 192:1, С. 113—138.

# ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В КВАДРАТЕ С МИНИМАЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ РАВНОМЕРНОЙ НОРМЫ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

**С.И. Новиков**

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

*Sergey.Novikov@imm.uran.ru*

Пусть $\Omega = (0,1)^2$ – единичный квадрат,

$$U = \left\{ u \in C^1(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega}) : \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \in L_\infty(\Omega) \right\},$$

где производные второго порядка понимаются в обобщенном смысле Соболева.

Обозначим $\|z\|_{l_\infty^N} = \max\{|z_j| : \ j = 1, 2. \dots, N\}$ для $1 \le N < \infty$.

Пусть

$$\mathfrak{M}_\infty^N = \left\{ z : \ \ z = \{z_j\}_{j=1}^N, \ \|z\|_{l_\infty^N} \le 1 \right\}$$

– множество интерполируемых данных, $\{(x^{(s)}, y^{(s)})\}_{s=1}^N \subset \Omega$ – набор точек интерполяции и

$$F_N(z) = \left\{ u \in U : \ \ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \ u(x^{(s)}, y^{(s)}) = z_s, \ s = 1, 2, \dots, N \right\}$$

– класс функций, интерполирующих фиксированный элемент $z \in \mathfrak{M}_\infty^N$.

Задача состоит в исследовании величины

$$a_\infty^N(\Omega) \ = \ \sup_{z \in \mathfrak{M}_\infty^N} \ \inf_{u \in F_N(z)} \|\Delta u\|_{L_\infty(\Omega)},$$

которая представляет собой минимальную норму оператора Лапласа от интерполянта, построенного для "наихудшего" набора интерполируемых данных. Рассматриваемая задача связана с интерполяционной задачей Фавара и проблематикой экстремальной функциональной интерполяции.

Доказано, что в этой задаче точная верхняя грань достигается в крайних (экстремальных) точках множества $\mathfrak{M}_\infty^N$.

В случае, когда точки интерполяции расположены "равномерно" внутри квадрата, т.е. $(x^{(s)}, y^{(s)}) = ((2s-1)/(2N), 1/2)$, $s = 1, 2, \dots, N$, найдены точные значения величины $a_\infty^N(\Omega)$ при $N = 1$ и $N = 2$, а также доказано, что при достаточно большом числе точек интерполяции справедливы неравенства

$$C_1 \ N^2 \ < \ a_\infty^N(\Omega) \ \ \le C_2 \ N^2,$$

где $C_1, C_2$ – некоторые положительные константы, не зависящие от $N$.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 11-01-00347а) и программы проектов исследований, выполняемых совместно в Уральском и Сибирском отделениях РАН (проект 12-С-1-1018).

# Про $*$-зображення комутаційних співвідношень з умовами ортогональності

**О.В. Островська, Р.Я. Якимів**
Національний університет харчових технологій, Київ
Національний університет біоресурсів та природокористування, Київ
*yakymiv@ukr.net*

В роботі вивчається категорія інтегровних $*$-зображень алгебр $C_0^{(d)}$, породжених співвідношеннями наступного вигляду

$$a_i^* a_i = 1 + a_i a_i^*, \quad a_i^* a_j = 0, \quad i \neq j, \; i, j = 1, \dots, d. \tag{1}$$

Оскільки в будь-якому зображенні співвідношень (1) образи твірних $a_i$, $i = 1, \dots, d$ є необмеженими операторами, постає питання визначення класу інтегровних (“well-behaved”) зображень алгебри $C_0^{(d)}$ необмеженими операторами. Ми даємо еквівалентні означення інтегровних зображень $C_0^{(d)}$ в термінах інваріантних областей та в термінах обмежених функцій від операторів. За допомогою цих означень ми визначаємо поняття категоріїї інтегровних зображень, $\operatorname{Rep} C_0^{(d)}$, алгебри $C_0^{(d)}$.

Алгеброю Кунца-Тьопліца $O_d^{(0)}$, див. [1], називається $*$-алгебра, породжена ізометричними елементами, що задовольняють умови ортогональності:

$$O_d^{(0)} = \mathbb{C}\big\langle s_i, \; s_i^* \mid s_i^* s_i = 1, \; s_i^* s_j = 0, \; i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, d \big\rangle.$$

Очевидно, що всі зображення $O_d^0$ є обмеженими. Позначимо через $\operatorname{Rep}_0 O_d^{(0)}$ повну підкатегорію категорії зображень алгебри Кунца-Тьопліца, що має об'єктами класи еквівалентності зображень, в яких кожна твірна $s_i$ є чистою ізометрією.

Основним результатом роботи є наступна теорема.

**Теорема.** *Категорії* $\operatorname{Rep} C_0^{(d)}$ *та* $\operatorname{Rep}_0 O_d^{(0)}$ *є ізоморфними.*

1. J. Cuntz. Simple $C^*$-algebras generated by isometries, Comm. Math. Phys., 1977, **57**, no. 2, p. 173—185.

# Деякі способи наближення функцій ланцюговими дробами

**М.М. Пагіря**
Мукачівський державний університет, Мукачево, Україна
*pahirya@mk.uz.ua*

Досліджується наступна задача нелінійної інтерполяції функцій однієї дійсної змінної. Нехай функція $f(x)$ задана своїми значеннями на множині точок $\{x_i \;:\; x \in \mathcal{R} \subset \mathbb{R}$, $x_i \neq x_j, i \neq j, \; i, j = 0, 1, 2, \dots, n\}$ і функція $t = g(x)$ — деяка базова функція, яка строго монотонна на $\mathcal{R}$. Наближення функції шукають у вигляді узагальненого інтерполяційного ланцюгового дробу. Розглядаються деякі із таких типів ланцюгових дробів. Зокрема функція наближається:

I) функціональним інтерполяційним ланцюговим дробом типу Тіле

$$f(x) = b_0 + \frac{g(x) - g(x_0)}{b_1} \underset{+}{} \frac{g(x) - g(x_1)}{b_2} \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \frac{g(x) - g(x_{n-1})}{b_n} \, ;$$

II) функціональним інтерполяційним ланцюговим дробом типу С–дробу

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1(g(x) - g(x_0))}{1} \underset{+}{} \frac{a_2(g(x) - g(x_1))}{1} \underset{+ \cdots +}{} \frac{a_n(g(x) - g(x_{n-1}))}{1};$$

III) квазіоберненим функціональним інтерполяційним ланцюговим дробом типу Тіле

$$f(x) = \left( d_0 + \frac{g(x) - g(x_0)}{d_1} \underset{+}{} \frac{g(x) - g(x_1)}{d_2} \underset{+ \cdots +}{} \frac{g(x) - g(x_{n-1})}{d_n} \right)^{-1};$$

IV) квазіоберненим функціональним інтерполяційним ланцюговим дробом типу С–дробу

$$f(x) = \left( c_0 + \frac{c_1(g(x) - g(x_0))}{1} \underset{+}{} \frac{c_2(g(x) - g(x_1))}{1} \underset{+ \cdots +}{} \frac{c_n(g(x) - g(x_{n-1}))}{1} \right)^{-1}.$$

Для кожного із розглянутих типів функціональних ланцюгових дробів встановлені оцінки залишкових членів. Зроблено порівняння ефективності наближення функцій інтерполяційними ланцюговими дробами та функціональними інтерполяційними ланцюговими дробами відповідних типів. Вказано переваги запропонованого підходу. Отримані результати ілюструються числовими прикладами.

1. Пагіря М. М. Функціональні ланцюгові дроби типу Тіле, Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ., 2010, 20, С. 98–110.

## $\varphi$-СИЛЬНОЕ СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ

**Н.Л. Пачулиа**
Абхазский государственный университет, Сухум, Абхазия
*niaz-pachulia@rambler.ru*

Пусть $L$ - множество суммируемых, а $C$ - непрерывных $2\pi$ периодических функций и

$$S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x) \tag{1}$$

ряд Фурье функции $f \in L$, где $A_k = a_k \cos kx + b_k \sin kx$, при $k \geq 1$ и $A_0 = \frac{a_0}{2}$, числа $a_k$, $b_k$ – коэффициенты Фурье.

Далее, пусть $S_n(f, x)$ - частная сумма порядка $n$ ряда (1), а $\rho_n(f, x) = f(x) - S_n(f, x)$ соответствующее отклонение. Обозначим через $\Phi$ - множество неубывающих непрерывных на множестве $[0, \infty)$ функций $\varphi$, таких, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u) > 0$ при $u > 0$. Кроме того пусть

$$\Phi_1 = \{\varphi \in \Phi : \varphi(2u) \leq a\varphi(u), \forall u[0, 1]; \ \ln \varphi(u) = 0(u), \text{при}\, u \to \infty\},$$

$\Lambda$ - множество неотрицательных матриц $\lambda = (\lambda_k^n)$, определяющие регулярные $\lambda$ методы суммирования рядов.

Величины $H_n^{\varphi}(f, x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k^n \varphi(|\rho_k(f, x)|)$ называют $\varphi$- сильными средними ряда (1) метода $\lambda$. В работе [1] доказана

**Теорема 1**. *Пусть $f \in C$, $\lambda \in \Lambda$ и $\varphi \in \Phi_1$. Тогда*

$$H_n^{\varphi}(f, x, \lambda) \leq A \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^n \varphi(E_k(f)), \tag{2}$$

*где $E_k(f)$ - наилучшее приближение функции $f$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $n, A > 0$ - постоянное число.*

*Существует метод суммирования $\lambda \in \Lambda$ и $f \in C$ при $\varphi \in \Phi_1$ неравенство (2) не выполняется.*

Ставится задача: найти связь между ростом функции $\varphi \in \Phi$ и подмножеством $C_0 \subset C$ при $\forall f \in C_0$ выполняется неравенство (2). На данную задачу в свое время мое внимание обращал А.И.Степанец. В доклад включены результаты полученные в данном направлении.

Пусть $C_0 = \{f \in C : \; E_n(f) \ln(n+2) \leq \mu\}$. Справедливы утверждения

**Теорема 2**. *Пусть $f \in C_0$ и метод $\lambda \in \Lambda$ такой, что при любом $n \in N$, $\lambda_k^n$ убывает относительно $k$, $\chi(u) = e^{\mu u} - 1$, $\mu > 0$ и $\varphi \in \Phi_1$. Тогда выполняется неравенство*

$$H_n^{\varphi(\chi)}(f, x) \leq A \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^n \varphi(\chi(E_k(f))).$$

**Теорема 3**. *Пусть $\psi \in \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty$, $f \in C_\beta^\psi C$ и метод $\lambda \in \Lambda$ такой, что $\lambda_k^n$ убывает относительно $k$ при $\forall n \in N$. Тогда если $\chi(u) = e^{\mu u} - 1$, $\mu > 0$ и $\varphi \in \Phi_1$, то*

$$H_n^{\varphi(\chi)}(f, x) \leq A \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^n \varphi(\chi(\psi(n) E_k(f_\beta^\psi))),$$

*где $C_\beta^\psi C$ - классы А.И.Степанца [2].*

Доклад будет содержать результаты, касающиеся свойств сильных преобразований рядов Фурье.

1. Пачулиа Н.Л. О сильной суммируемости рядов Фурье, Вопросы суммирования простых и кратных рядов Фурье. — Киев. — 1987, С. 9–50 (Препринт АН УССР, Ин-т математики 87.40).

2. Степанец А.И. Приближение суммами Фурье функции с медленно убывающими коэффициентами Фурье. — 1984. — 57 с. (Препринт АН УССР, Ин-т математики 87.43).

# Двосторонні методи розв'язування задачі Коші для нелінійних диференціальних рівнянь

**Р.Я. Пелех**

Національний університет "Львівська політехніка", Україна

*znytrebych@gmail.com*

Багато прикладних задач, зокрема розрахунок напружено-деформованого стану тонкостінних елементів конструкцій в загальному випадку зводяться до розв'язання нелінійних систем диференціальних рівнянь. Порядок системи диференціальних рівнянь залежить від вибраної моделі. За певних умов навантаження дану систему можна звести до системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x \in [x_0, x_0 + L], \tag{1}$$

де *y(x)* – дійсний $m$ – компонентний вектор, $f$ – дійсна векторна функція залежної та незалежної змінних, причому припускається, що функція $f$ володіє необхідною для викладок гладкістю. Не обмежуючи загальності, будемо знаходити наближені розв'язки задачі (1) у скалярному випадку, оскільки на системи рівнянь вони переносяться покомпонентно.

У зв'язку з відсутністю ефективного способу оцінки похибки наближених методів, виникла необхідність розробки і дослідження двосторонніх алгоритмів. Для побудови двосторонніх методів типу Рунге-Кутта різних порядків точності, шукаємо наближений розв'язок задачі (1) у вигляді ланцюгового дробу :

$$y_{n+1}^{[1,2]} = \cfrac{y_n}{1 + \cfrac{d_{1,0}}{1 + \cfrac{d_{1,1}}{1 + d_{1,2}}}}, \tag{2}$$

де

$$d_{1,0} = -\frac{\sigma_1}{y_n}, \quad d_{1,1} = \frac{\sigma_1^2 - y_n\sigma_2}{y_n\sigma_1}, \quad d_{1,2} = \frac{\sigma_1\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_1^2 - y_n\sigma_2}, \tag{3}$$

$$\sigma_\nu = h \cdot \sum_{i=1}^{\nu} a_{\nu i} k_i, \quad \nu = 1, 2, 3, \quad k_1 = f\left(x_n, y_n\right),$$

$$k_2 = f\left(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_{21} h k_1\right), \quad k_3 = f\left(x_n + \alpha_3 h, y_n + \beta_{31} h k_1 + \beta_{32} h k_2\right).$$

Ці розрахункові формули будуються так, щоб локальні похибки схеми в кожній вузловій точці мали вигляд:

$$y\left(x_{n+1}\right) - y_{n+1} = \omega h^p K F(f) + O(h^{p+1}),$$

де $y(x_{n+1})$ і $y_{n+1}$ – відповідно точний і наближений розв'язок задачі (1), $h$ – крок інтегрування, $F(f)$ – деякий диференціальний оператор, обчислений в точці $(x_n, y_n)$, $K$ – константа, $p$ – порядок точності, $\omega$ – параметр двосторонності.

Зауважимо, що у запропонованих обчислювальних формулах (2), (3) можна оцінити значення $F(f)$ без додаткових звертань до правої частини диференціального рівняння, що вигідно відрізняє ці схеми від традиційних двосторонніх алгоритмів.

## Числові методи розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду

**Я.М. Пелех**

Національний університет "Львівська політехніка", Україна

*kalenyuk@polynet.ua*

Задачі будівельної механіки, механіки деформівного твердого тіла, кінетики, електроніки, автоматичного управління, багатовимірної оптимізації приводять до необхідності розв'язання нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерра

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} F[x, y, f(y)]dy, \quad x \in I_L, \tag{1}$$

де функція $F[x, y, f(y)]$ володіє необхідною для обчислень гладкістю.

Ланцюгові (неперервні) дроби знаходять широке застосування в обчислювальній математиці, у зв'язку з їх важливим теоретичним і прикладним значенням. При відповідних умовах, використання апарату ланцюгових дробів дає високу швидкість збіжності алгоритмів, двосторонні і монотонні наближення, сприяє обмеженому накопиченню похибок заокруглення при розрахунку на ПЕОМ. Апарат ланцюгових дробів є одним з основних джерел отримання дробово-раціональних наближень функцій, які використовуються в сучасному забезпеченні ПЕОМ. Значне підвищення інтересу до ланцюгових дробів пов'язане ще з тим, що процес їх обчислень є циклічним і легко піддається програмуванню.

Дане повідомлення присвячене застосуванню неперервних дробів для побудови нових числових методів розв'язання нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду.

Характерною особливістю таких алгоритмів є те, що при відповідних значеннях параметрів, які входять у запропоновані обчислювальні схеми, можна отримувати як нові, так і традиційні числові методи розв'язування інтегральних рівнянь (1).

Побудовано методи типу Рунге-Кутта другого та третього порядку точності для наближеного розв'язування рівняння (1). На відповідних класах функцій виведені двосторонні формули першого та другого порядку точності, які дозволяють знаходити не тільки верхнє та нижнє наближення до точного розв'язку, але й отримувати локальну оцінку похибки на кожному кроці без додаткових звертань до правої частини інтегрального рівняння (1).

Використовуючи модифіковане перетворення Фельберга та неперервні дроби, побудовано методи (m+2)-го та (m+3)-го порядку точності для знаходження наближеного розв'язку рівняння (1). Виведено співвідношення та знайдено значення відповідних параметрів, що визначають множини двосторонніх формул типу Рунге-Кутта-Фельберга (m+2)-го порядку точності.

# Вычисление аппроксимативных чисел диагональных операторов, ограниченно действующих между весовыми пространствами последовательностей

**Б.И. Пелешенко, Т.Н. Семиренко**

Днепропетровский государственный аграрный университет, Украина

*dsaupelesh@mail.ru*

Пусть $0 < p < \infty$, $p < q \leq \infty$, обозначим через $l^q_{\omega(p,q)}$ пространство абсолютно $q$-суммируемых с весом $\omega(p,q) = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ последовательностей комплексных чисел $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которых конечны квазинормы (нормы, если $1 < p < q \leq \infty$)

$$||x\,||_{l^q_{\omega(p,q)}} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k k^{\frac{1}{p}}\right)^q k^{-1}\right\}^{\frac{1}{q}}, \ 0 < q < \infty, \text{ и } \ ||x\,||_{l^{\infty}_{\omega(p,\infty)}} = \sup_{1\leq k<\infty} x_k k^{\frac{1}{p}}, \ q = \infty.$$

Пространство абсолютно $p$-суммируемых последовательностей комплексных чисел обозначается $l^p$, последовательность чисел $\{|x_k|\}_{k=1}^{\infty}$, переставленная в невозрастающем порядке, обозначается $x^* = \{x_k^*\}_{k=1}^{\infty}$. Для заданной последовательности положительных чисел $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ на пространстве $l^q_{\omega(p,q)}$ определяем оператор $T_\alpha : x \to \alpha x = \{\alpha_k x_k\}_{k=1}^{\infty}$.

**Теорема 1.** *Пусть $1 < p < \infty$, $p < q \leq \infty$, $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ - последовательность положительных чисел; $A_k = \alpha_k^{\frac{pq}{q-p}} k^{-1}$ , $k \in N$, если $q < \infty$, или $A_k = \alpha_k^p k^{-1}$, $k \in N$ в случае $q = \infty$. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ сходится, то оператор $T_\alpha$ ограниченно действует из пространства $l^q_{\omega(p,q)}$ в $l^p$ и его аппроксимативные числа вычисляются по формулам*

$$a_n\left(T_\alpha : l^q_{\omega(p,q)} \to l^p\right) = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} A_k^*\right\}^{\frac{q-p}{pq}}, \quad p < q < \infty;$$

$$a_n\left(T_\alpha : l^q_{\omega(p,q)} \to l^p\right) = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} A_k^*\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad q = \infty.$$

Обозначим через $m_n$ множество последовательностей $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ комплексных чисел, для каждой из которых мощность множества $\{k : y_k \neq 0\}$ не больше $n$.

**Теорема 2.** *Пусть* $0 < p < \infty$, $p < q < \infty$, $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ *- последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{\frac{pq}{q-p}} k^{-1} < \infty$ *;* $A_k = \alpha_k^{\frac{pq}{q-p}} k^{-1}$, $B_k = \alpha_k^{(-q)} k^{\frac{q}{p}-1}$, $k \in N$. *Тогда*

$$\sup_{||x\ ||_{l^q_{\omega(p,q)}} \leq 1} \inf_{y \in m_n} ||ax - y\ ||_{l_p} = \sigma_1^{-\frac{p}{q}}(s)\left[(s-n)^{\frac{q}{q-p}} + \sigma_1^{\frac{p}{q-p}}(s)\sigma_2^{\frac{q-p}{q}}(s)\right],$$

*где* $\sigma_1(s) = \sum\limits_{k=1}^{s} B_k^*$, $\sigma_2(s) = \sum\limits_{k=s+1}^{\infty} A_k^*$, *а число* $s$ *выбрано из условия* $B_s^* \leq \dfrac{1}{s-n}\sum\limits_{k=1}^{s} B_k^* \leq B_{s+1}^*$.

# Диференціальні та апроксимаційні властивості узагальненого оператора Абеля-Пуассона


**О.М. Піддубний**

Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна

*Olexy2006@ukr.net*


Нехай $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{T} := \partial\mathbb{D}$ , $L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$, – простір функцій $f$, сумовних на $\mathbb{T}$ в $p$-тому степені і

$$K_l(\rho e^{it}) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k^l} \cos kt, \quad \widetilde{K}_l(\rho e^{it}) := \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k^l}\ \sin kt. \quad (0 < \rho < 1,\ l > 0).$$

Оператор $P_l$, визначений на $L_p(\mathbb{T})$ формулою

$$P_l(f)(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})K_l(ze^{-it})dt \quad (z \in \mathbb{D})$$

називається узагальненим оператором Абеля-Пуассона. А оператор $Q_l$, визначений на $L_p(\mathbb{T})$ формулою

$$Q_l(f)(z) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\widetilde{K}_l(ze^{-it})dt \quad (z \in \mathbb{D})$$

називається спряженим узагальненим оператором Абеля-Пуассона. Встановлено низку властивостей функції $v(\theta, \rho) = Q_l(f)(\rho e^{i\theta})$, аналогічних до властивостей функції $u(\theta, \rho) = P_l(f)(\rho e^{i\theta})$, наведених в [1]. Обернену теорему наближення функцій спеціальними операторами продовження, наведену в [2], застосовано до дослідження граничних властивостей узагальнених операторів Абеля-Пуассона.

**Теорема.** *Нехай* $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$ *і* $\omega(f, t)$ *— модуль неперервності функції* $f$*. Якщо для функції* $u(\theta, r) = P_l(f)(re^{i\theta})$ *виконується нерівність*

$$\|u(\cdot, r) - f(\cdot)\|_p \leq A\lambda(1-r),\ 0 < r < 1,\ A = \text{const} > 0,$$

*де $\lambda$ — функція типу модуля неперервності, то*

$$\omega(f,t) \le At^{1/l}\int_t^1 \frac{\lambda(x)dx}{x^{1/l+1}}, \quad 0 < t \le \frac{1}{2},$$

*де $A$ — додатна константа, яка не залежить від $r$.*

1. Піддубний О.М. Диференціальні властивості узагальненого оператора Пуассона, Теорія наближення функцій та її застосування / Праці ін-ту математики НАН України, Київ, 2004, С. 227 – 240.

2. Піддубний О.М. Обернена теорема наближення функцій значеннями операторів одного класу, Теорія наближення функцій та суміжні питання / Збірник праць ін-ту математики НАН України, Київ, 2010, С. 187 – 198.

# Оценка интеграла от модуля суммы ряда по синусам с монотонными коэффициентами

**А.Ю. Попов, С.А. Теляковский**[1]

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

*mysfed@rambler.ru, sergeyAltel@yandex.ru*

**Теорема 1.** *Для сопряжённого ядра Дирихле*

$$\overline{D_n}(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

*справедливо равенство*

$$\int_0^\pi |\overline{D_n}(x)|\,dx = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Если числа $b_k$ при $k \to \infty$ монотонно убывают к нулю, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

сходится при всех $x$. Обозначим его сумму $g(x)$.

**Теорема 2.** *Если ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \tag{1}$$

*сходится, то имеют место оценки*

$$b_1 - \frac{b_2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \leqslant 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_{2m-1}}{2m-1} \leqslant \int_0^\pi |g(x)|\,dx \leqslant b_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}.$$

**Теорема 3.** *Независимо от того, сходится или расходится ряд* (1)*, справедлива оценка*

$$\int_0^\pi \big(|g(x)| - g(x)\big)\,dx \leqslant \frac{b_2}{2}.$$

[1]При выполнении работы второй автор имел финансовую поддержку РФФИ (проект 11 – 01 – 00417).

# Приближение функций из $H^p(D^n)$ средними Чезаро

**С.Г. Прибегин**
Одесский национальный морской университет, Украина
*ivanpribegin@rambler.ru*

Пусть $H^p(D^n), p > 0$, пространство Харди в единичном поликруге $D^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, j = 1, \ldots, n\}$, $f(\rho e^{i\theta}) = \sum\limits_k \widehat{f}_k(\rho e^{i\theta})^k$ — ряд Тейлора функции $f \in H^p(D^n)$, где $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $\widehat{f}_k = \widehat{f}_{k_1,\ldots,k_n}$– коэффициенты ряда Тейлора функции $f$ , а
$(\rho e^{i\theta})^k = ((\rho_1 e^{i\theta_1})^{k_1}, \ldots, (\rho_n e^{i\theta_n})^{k_n}))$.

Средними Чезаро $(C, \alpha)$ при $\alpha > 0$ для функции $f \in H^p(D^n)$ назовём:

$$\sigma_m^\alpha(f, e^{i\theta}) = (A_m^\alpha)^{-1} \sum_{\substack{k,\\ 0\leqslant|k|\leqslant m}} A_{m-|k|}^\alpha \widehat{f}_k e^{ik\theta}$$

где $A_m^\alpha = \binom{\alpha+m}{m} = \frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha+1)}$, а $|k| = k_1 + \ldots + k_n$.

Модулями гладкости функции $f \in H^p(D^n)$ назовём функции

$$\omega(\delta, f)_p = \sup_{\substack{|h_j|\leqslant\delta,\\ j=1,\ldots,n}} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{Q^n} |f(e^{i(\theta+h)}) - f(e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$\widetilde{\omega}(\delta, f)_p = \sup_{\substack{|h|\leqslant\delta\\ h_1=\ldots=h_n=h}} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{Q^n} |f(e^{i(\theta+h)}) - f(e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}},$$

где $Q^n = [-\pi, \pi]^n$, $d\theta = d\theta_1 \ldots d\theta_n$.

**Теорема.** *Пусть функция* $f \in H^p(D^n)$ *и* $(0 < p \leqslant 1) \wedge (\alpha > \frac{n}{p} - 1) \vee (p > 1) \wedge (\alpha > n - 1)$ *Тогда*

$$C_1(\alpha, f)\widetilde{\omega}\left(\frac{1}{m}, f\right)_p \leqslant \|f(e^{i\theta}) - \sigma_m^\alpha(f, e^{i\theta})\|_p \leqslant C_2(\alpha, p)\omega\left(\frac{1}{m}, f\right)_p.$$

При $n = 1$ оценка сверху доказана в [1].

1. Стороженко Э.А. Приближение функций класса $H^p$, $0 < p < 1$, Матем. сб., 1978, 105:4, С. 601-621.

# Функції із змінним періодом та можливості їх наближення

**М.В. Приймак**
Тернопільський нац. тех. ун–т імені Івана Пулюя, Україна
*kaf_kn@tntu.edu.ua*

В прикладних дослідженнях зустрічаються періодичні сигнали, період яких змінюється. Такими є електрокардіограми, отримані при фізичному навантаженні. Як модель таких сигналів в [1] був введений клас функцій із змінним періодом. За означенням функція $f(t)$ , $t \in I$, називається періодичною із змінним періодом, якщо існує така неперервна функція $T(t) > 0$, що виконується рівність: $f(t) = f(t + T(t))$. Прикладом таких функцій є тригонометричні функції $\sin t^\alpha,\ \cos t^\alpha,\ t \geq 0,\ \alpha > 0$.

**Лема.** *Для функцій* $\sin t^\alpha,\ \cos t^\alpha,\ t \geq 0,\ \alpha > 0$, *їх змінний період* $T(t) = -t+(t^\alpha + 2\pi)^{\frac{1}{\alpha}}$
.

**Теорема.** *Система функцій* $\cos nt^\alpha,\ \sin nt^\alpha$, $n = 1, 2, ...$, *є ортогональною із вагою* $t^{\alpha-1}$ *на кожному інтервалі* $[t_0, t_0 + T(t_0)]$, *причому норма кожної із функцій рівна* $\sqrt{\pi/\alpha}$.

Наявність ортогональної системи функції 1, $\cos nt^\alpha$, $\sin nt^\alpha$, $n = 1, 2, ...$ відкриває перспективи наближення функції $f(t)$, змінні період яких $T(t) = -t + (t^\alpha + 2\pi)^{\frac{1}{\alpha}}$, відповідним рядом Фур'є $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt^\alpha + b_n \sin nt^\alpha$, де коефіцієнти $a_n = \frac{\alpha}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+T(t_0)} t^{\alpha-1} f(t) \cos nt^\alpha dt$, $b_n = \frac{\alpha}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+T(t_0)} t^{\alpha-1} f(t) \sin nt^\alpha dt,\ n = 0, 1, ....$

**Приклад.** Для функції $f(t) = 2\sin t^{\frac{4}{3}} + 0.4167 \sin 3t^{\frac{4}{3}} + 0.0910 \sin 5t^{\frac{4}{3}}$, змінний період якої $T(t) = -t + \left(t^{\frac{4}{3}} + 2\pi\right)^{\frac{3}{4}}$, були знайдені її коефіцієнти Фур'є, причому для експериментальної перевірки коефіцієнти визначалися на двох різних інтервалах ортогональності $[1;\ 4,433]$ і $[5;\ 7,558]$. Результати обчислень наведені в таблиці.

| Інтервали ортогональності | Коефіцієнти Фур'є | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ |
| $[1;\ 4,433]$ | $2,000$ | $0,0003$ | $0,417$ | $-0,0001$ | $0,091$ |
| $[5;\ 7,558]$ | $2,000$ | $0,0003$ | $0,417$ | $-0,0001$ | $0,091$ |

Порівняння знайдених коефіцієнтів із коефіцієнтами функції підтверджує можливість наближення функцій із змінним періодом їх рядами Фур'є. Питання повноти системи функцій та деякі інші проблемні питання в процесі досліджень.

1. Приймак М.В., Боднарчук І.О., Лупенко С.А. Умовно періодичні випадкові процеси із змінним періодом, Вісник Тернопільського державного технічного університету, 2005, 8:3, С. 17 – 21.

# Оцінки мір виняткових множин гладких функцій

**Б.Й. Пташник, М.М. Симотюк**
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
*ptashnyk@lms.lviv.ua, quaternion@ukr.net*

Позначимо: $\operatorname{mes} A$ — міра Лебега вимірної множини $A \subset \mathbb{R}$; $C^m[a, b]$ — простір дійснозначних функцій, $m$ раз неперервно диференційовних на $[a, b]$.

**Теорема.** *Нехай функції* $f \in C^n[a, b]$, $p_j \in C^n[a, b]$, $j \in \{1, \dots, n\}$, *є такими, що*

$$|L(d/dt)f(t)| := |f^{(n)}(t) + p_1(t)f^{(n-1)}(t) + \ldots + p_n(t)f(t)| \geq \delta > 0, \quad t \in [a, b].$$

*Тоді для довільного* $\varepsilon > 0$ *виконується оцінка*

$$\operatorname{mes} \{t \in [a, b] : |f(t)| < \varepsilon\} \leq C_0(\varepsilon/\delta)^{1/n},$$

*де* $C_0 = C_0(n, (b - a), G) > 0$, $G = 1 + \max_{1 \leq j \leq n} \|p_j(t); C^n[a, b]\|$.

Дане твердження встановлено з метою оцінювання знизу малих знаменників [1], що виникли при дослідженні багатоточкових задач для навантажених рівнянь із частинними похідними. Подібне твердження для випадку, коли $f \in C^{n+1}[a, b]$, $p_j \in C[a, b]$, $j \in \{1, \dots, n\}$, було доведено і застосовано у праці [2] для розв'язання проблеми малих знаменників у багатоточкових задачах для рівнянь без навантаження.

Доведення сформульованої теореми спирається на результати роботи [3]; при цьому побудовано розбиття (підпорядковане фундаментальній системі розв'язків рівняння $L(d/dt)y(t) = 0$) проміжка $[a, b]$ на відрізки, на кожному з яких диференціальний вираз $L(d/dt)$ розкладається у добуток диференціальних виразів першого порядку з дійсними коефіцієнтами, отримано оцінки зверху для кількості відрізків розбиття та коефіцієнтів факторизації.

Наведена теорема узагальнює лему 2.2 із [1, гл. 1], в якій $L(d/dt) := (d/dt)^n$.

*Дослідження частково підтримані ДФФД України (проект № Ф41.1/004).*

1. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

2. Симотюк М.М. Багатоточкова задача для псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними, Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2003, 46:2, С. 26–41.

3. Симотюк М.М. Про оцінки мір множин, на яких модуль гладкої функції обмежений зверху, Мат. методи та фіз.-мех. поля, 1999, 42:4, С. 90–95.

# Про необмеженість у скінчений момент часу розв'язку змішаної задачі для нелінійного еволюційного рівняння

**П.Я. Пукач**

Національний університет "Львівська політехніка", Україна

*ppukach@i.ua*

Нехай $\Omega$ – обмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega \in C^1$. Позначимо $Q_\tau = \Omega \times (0, \tau)$, $S_\tau = \partial\Omega \times (0, \tau)$, причому при $\tau = +\infty$ писатимемо $Q, S$ замість відповідно $Q_\tau$ і $S_\tau$. Нехай $\Omega_\tau = \{(x, t) : x \in \Omega,\, t = \tau\}$, $\tau \in (0, +\infty)$.

В області $Q$ розглядаємо першу змішану задачу для нелінійного рівняння

$$u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} D^\beta \left(a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u_t + D^\beta \left(b_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u\right)\right) + \sum_{|\alpha|=2} D^\alpha (b_\alpha(x)|D^\alpha u|^{q-2} D^\alpha u) - c_0(x)|u|^{p-2}u = 0 \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x) \tag{2}$$

та крайовими умовами

$$u|_S = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = 0, \tag{3}$$

де $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial {x_n}^{\alpha_n}}$, $\nu$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні $\partial\Omega$.

Функцію $u : \Omega \times [0, T) \to \mathbb{R}$ ($T$ – додатне число або $+\infty$) таку, що

$$u \in C([0, T_0]; W_0^{2,q}(\Omega)) \cap L^p((0, T_0); L^p(\Omega)), \quad u_t \in C([0, T_0]; W_0^{2,q}(\Omega)), \quad u_{tt} \in L^\infty((0, T_0); L^2(\Omega))$$

для довільного числа $T_0$ з інтервалу $(0, T)$, називаємо узагальненим розв'язком задачі (1)–(3) в області $Q_T$, якщо вона задовольняє початкові умови (2) та інтегральну тотожність

$$\int_{\Omega_t} \Big[ u_{tt} v + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u_t D^\beta v + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u D^\beta v +$$

$$+\sum_{|\alpha|=2} b_\alpha(x)|D^\alpha u|^{q-2}D^\alpha u D^\alpha v\ - c_0(x)|u|^{p-2}uv\Big] dx = 0$$

для майже всіх $t \in (0,T)$ та для всіх $v \in W_0^{2,q}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$. Якщо $T = +\infty$, то розв'язок називаємо глобальним.

Отримано достатні умови неіснування глобального за часовою змінною узагальненого розв'язку змішаної задачі (1)–(3) в припущенні, зокрема, що $p > q > 2$, $c(x) > 0$ [1]. Існування локального узагальненого розв'язку цієї задачі при виконанні певних (сильніших, ніж наведені у цій доповіді) умов на вихідні дані доведено в [2].

1. Пукач П.Я. Про необмеженість у скінчений момент часу розв'язку змішаної задачі для нелінійного еволюційного рівняння, Нелінійні коливання, 2011, 14, С. 350–358.

2. Пукач П.Я. Існування локальних розв'язків мішаної задачі для нелінійного еволюційного рівняння п'ятого порядку, Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Сер. фіз.- мат. науки, 2008, 601, С. 27–34.

# Оценки сингулярных чисел интегрального оператора через модуль непрерывности его ядра

**Е.И. Радзиевская**

Национальный университет пищевых технологий, Киев, Украина

*radzl58@mail.ru*

Рассмотрим в $L_2[0;1]$, интегральный оператор

$$(Af)(t) := \int_0^1 a(t,s)f(s)\,ds,\ \ f \in Ł_2,$$

с ядром Гильберта-Шмидта, т.е. $a(t,s)$ измеримая на $[0;1]\times[0;1]$ функция с суммируемым квадратом,

$$\int_0^1\int_0^1 |a(t,s)|^2\,dt\,ds < \infty.$$

Доклад посвящен оценкам сингулярных чисел ($s$-чисел) оператора $A$. Введем используемые далее обозначения: $\lambda_k(A)$ - собственные значения оператора $A$, занумерованные в порядке невозрастания их модулей; $s_k(A) = \sqrt{\lambda_k(AA^*)}$- сингулярные числа ($s$-числа) оператора $A$, где $A^*$ - оператор сопряженный к $A$. Рассмотрим случай, когда область значений оператора $A$ лежит в пространстве непрерывных функций. Введем понятие модуля непрерывности порядка $m = 1, 2, ...$ ядра $a(t,s)$ следующим образом.

Пусть $0 \le \delta \le m^{-1}$.

$$\omega_m(\delta,a) := \sup_{f\in L_2, |f\|_2=1}\ \sup_{0\le\ h\le 1}\ \sup_{0\le\ t\le 1-hm} \Big|\sum_{q=0}^{m}(-1)^q\binom{m}{q}(Af)(t+hq)\Big|$$

Для $\delta > m^{-1}$ считаем, что $\omega_m(\delta,a) = \omega_m(m^{-1},a)$.

**Теорема 1.** *Пусть область значений оператора $A$ лежит в пространстве непрерывных функций, а $m = 2, 3....$ Тогда*

$$\sum_{k=r}^{\infty} s_k^2(A) \le 25\omega_m^2\left(\frac{2}{r}, a\right), \quad r = m+1, m+2, ...$$

Из этой теоремы вытекает следующее утверждение.

**Следствие.** *Пусть область значений оператора $A$ лежит в пространстве непрерывных функций, и $m = 2, 3....$ Тогда*

$$s_k(A) \leq \left(\frac{10m}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \omega_m\left(\frac{4}{r}, a\right).$$


1. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука, 1965.

2. Ульянов П.Л. Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках, Мат. сб., 1970, 81:1, С. 104–131.


# Поперечники класів періодичних функцій багатьох змінних


**А.С. Романюк**

Інститут математики НАН України, Київ

*Romanyuk@imath.kiev.ua*


У доповіді мова буде йти про порядкові оцінки поперечників класів періодичних функцій багатьох змінних Нікольського–Бєсова $B^r_{p,\theta}$ і Соболєва $W^r_{p,\alpha}$ в просторі $L_q$, $q \in \{1, \infty\}$.

Для того, щоб навести деякі з отриманих результатів стосовно лінійних поперечників класів $B^r_{p,\theta}$ і $W^r_{p,\alpha}$ нагадаємо означення відповідної апроксимативної характеристики.

Лінійним поперечником центрально-симетричної множини $W$ у нормованому просторі $\mathcal{X}$ називається величина

$$\lambda_M(W, \mathcal{X}) = \inf_{\Lambda} \sup_{x \in W} \|x - \Lambda x\|_{\mathcal{X}},$$

де нижня грань береться по всіх лінійних неперервних операторах, які діють в $\mathcal{X}$ і розмірність області значень яких не перевищує $M$. Поперечник $\lambda_M(W, \mathcal{X})$ був введений в 1960 р. В.М. Тіхоміровим [1].

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$ — евклідів простір з елементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$ і $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d} [0; 2\pi]$ — простір $2\pi$-періодичних по кожній змінній функцій $f$ для яких

$$\|f\|_p = \left( (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)| < \infty.$$

Будемо вважати, що координати векторів $r = (r_1, \ldots, r_d)$, які входять в означення класів, впорядковані у вигляді: $0 < r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant r_d$.

Мають місце наступні твердження.

**Теорема 1.** *Нехай $2 \leq p \leq \infty$, $2 \leq \theta \leq \infty$ і $r_1 > 0$. Тоді*

$$\lambda_M(B^r_{p,\theta}, L_1) \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}}.$$

Зауважимо, що при $\theta = \infty$ порядок поперечника $\lambda_M(B^r_{p,\infty}, L_1)$ встановив В.М. Темляков [2].

**Теорема 2.** *Нехай* $1 < p < \infty$, $r_1 > 0$. *Тоді*

$$\lambda_M(W^r_{p,\alpha}, L_1) \asymp (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1}.$$

1. Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория приближений, Успехи мат. наук, 1960, 15:3, С. 81 – 120.

2. Темляков В.Н. Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью, Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1989, 189, С. 138 – 168.

# Базис Хаара в просторах функцій багатьох змінних та його апроксимативні властивості

**В.С. Романюк**

Інститут математики НАН України, Київ

*romanyuk@imath.kiev.ua*

Вивчаються властивості базису Хаара-Шаудера $\mathrm{H}^d = \{h_i\}_{i=0}^{\infty}$, $d \in \mathbb{N}$, в просторах Лебега $L_q\big([0,1]^d\big)$, наділених стандартною нормою $\|\cdot\|_q$. Базис $\mathrm{H}^d$ є результатом належного впорядкування системи $\mathbb{H}_0^d = \{h_{\overline{k}}\}_{\overline{k}\in Z_+^d}$ функцій $d$ змінних, побудованій на основі одновимірного базису Хаара і системи характеристичних функцій двійкового розбиття відрізка $[0,1]$ (щодо базисності системи $\mathbb{H}_0^d$ доведено відповідне твердження).

В доповіді анонсуються також деякі результати, що демонструють можливості базису $\mathrm{H}^d$ (системи $\mathbb{H}_0^d$) в задачах лінійної та нелінійної апроксимації індивідуальних функцій і класів функцій із просторів $L_q\big([0,1]^d\big)$. Ці можливості охарактеризовані, зокрема, оцінками наступних величин:

$$E_{V_n}(f; \mathbb{H}_0^d; L_q) := \inf_{u\in V_n} \|f-u\|_q \tag{1}$$

— найкращого наближення функції $f \in L_q\big([0,1]^d\big)$ елементами простору $V_n = \Big\{u : \ u = \sum\limits_{\overline{k}\in Y_{n,d}} c_{\overline{k}} h_{\overline{k}}, \ c_{\overline{k}} \in \mathbb{R}\Big\}$, $n \in \mathbb{N}$, де $Y_{n,d} := \big\{\overline{k} = (k_1, \dots, k_d) : \ 0 \le k_i < 2^n, \ i = \overline{1,d}\big\}$;

$$\sigma_m(f; \mathrm{H}^d; L_q) := \inf_{\substack{\Lambda\subset\mathbb{Z}_+ \\ \sharp\Lambda = m}} \inf_{c_\alpha\in\mathbb{R}} \Big\| f - \sum_{\alpha\in\Lambda} c_\alpha u_\alpha \Big\|_q \tag{2}$$

— найкращого $m$ -членного ($m \in \mathbb{N}$) наближення функції $f \in L_q\big([0,1]^d\big)$ за базисом $\mathrm{H}^d$. У вигляді виразів від коефіцієнтів Фур'є за системою $\mathbb{H}_0^d$ (розкладів за базисом $\mathrm{H}^d$) встановлено еквівалентне до стандартного зображення норми в ізотропних просторах Бєсова $B^r_{p,\theta}$, $0 < r < \frac{1}{p}$, $1 \le \theta < \infty$, та Гельдера-Нікольського $H^r_p$, $0 < r < \frac{1}{p}$. На основі цього зображення знайдено порядкові оцінки для точних верхніх меж величин $\sigma_m(f; \mathrm{H}^d; L_q)$ на одиничних кулях просторів $B^r_{p,\theta}$ і $H^r_p$.

# Наближення голоморфних функцій з класу Зигмунда сумами Фейєра

**Віктор Савчук, Марина Савчук**
Інститут математики НАН України, Київ
Інститут підготовки кадрів державної служби зайнятості України, Київ
*savchuk@imath.kiev.ua, savchuk_m@ukr.net*

Нехай $1 \le p \le \infty$. Розглянемо клас $\mathcal{Z}_p$ функцій $f(z) = a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$, голоморфних в крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, для яких

$$B_p(f) := \sup_{\varrho \in [0,1)} (1 - \varrho^2) M_p(\varrho, f'') \le 1,$$

де $M_p(\varrho, f) := (1/(2\pi) \int_0^{2\pi} |f(\varrho e^{it})|^p dt)^{1/p}$, якщо $p \ge 1$ і $M_\infty(\varrho, f) := \max_{t \in [0,2\pi]} |f(\varrho e^{it})|$.

А. Зигмунд [1] показав, що для голоморфної функції $f$

$$B_p(f) < \infty \Longleftrightarrow \|f^*(\cdot - h) - 2f^*(\cdot) + f^*(\cdot + h)\|_{L_p} = O(h),\ h \to 0+,\ (L_\infty = C)$$

де $f^*(t) := \lim_{\varrho \to 1-} f(\varrho e^{it})$. Тому клас $\mathcal{Z}_p$ можна розглядати як "голоморфну частину" класу Зигмунда, який складається з $2\pi$-періодичних функцій $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, які задовольняють умову

$$\|g(\cdot - h) - 2g(\cdot) + g(\cdot + h)\|_{L_p} \le C|h|,\ h \in \mathbb{R},$$

де $C$ – певна константа.

Об'єктом наших досліджень є величина

$$F_n(\mathcal{Z}_p; H_p) := \sup\left\{\|f - \sigma_n(f)\|_{H_p} : f \in \mathcal{Z}_p\right\},\ n \ge 2,$$

де

$$\sigma_n(f)(z) := \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) a_k z^k$$

– сума Фейєра функції $f$ і $\|f\|_{H_p} = \sup_{0 \le \varrho < 1} M_p(\varrho, f)$.

Оскільки $\mathcal{Z}_\infty \subset A(\overline{\mathbb{D}})$, де $A(\overline{\mathbb{D}})$ — диск-алгебра з нормою $\|f\|_{A(\overline{\mathbb{D}})} := \max_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |f(z)|$, то за принципом максимуму $F_n(\mathcal{Z}_\infty; H_\infty) = F_n(\mathcal{Z}_\infty; A(\overline{\mathbb{D}}))$.

**Теорема.** *При* $n \to \infty$

$$F_n\left(\mathcal{Z}_\infty; A(\overline{\mathbb{D}})\right) = \frac{\ln n}{2n} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

*і*

$$\frac{\ln n}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \le F_n(\mathcal{Z}_1; H_1) \le \frac{\ln n}{2n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. Zygmund A. Smooth functions, Duke Math. J., 1945, 12, P. 47–76.

# Усреднение квазипериодических функций и гармонические разложения

**Г.В. Сандраков**
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина
*sandrako@mail.ru*

Классическая теорема об усреднении утверждает, что временное среднее квазипериодической функции с рационально независимым набором частот $(\omega_1, \ldots, \omega_N)$ совпадает с пространственным средним. Для рационально зависимых частот, временное среднее квазипериодической функции зависит от начального положения и совпадает с пространственным средним по нерезонансному подтору $\mathbf{T}^{N-d}$, определяя функцию из $C(\mathbf{T}^d)$.

Таким образом, естественно попытаться построить "гильбертовы" пространства квазипериодических функций со значениями в $C(\mathbf{T}^d)$ и свести в некотором смысле неэргодическую ситуацию к эргодической. Пространство $C(\mathbf{T}^d)$ является простейшим примером $C^*$-алгебры. Поэтому будут рассматриваться функции со значениями в произвольной унитальной (имеющей единицу) $C^*$-алгебре $B$. Алгебра $B$, в отличие от поля $\mathbf{C}$, является только кольцом, и под гильбертовыми пространствами в данном случае естественно понимать гильбертовы модули [1].

В докладе предполагается рассмотреть некоторые свойства таких модулей: гармонические разложения в ряды Фурье, плотность тригонометрических многочленов (с коэффициентами из $B$), равенство Стеклова-Парсеваля. Кроме того, будут определены пространства Соболева функций со значениями в $B$, пространства Соболева-Безиковича квазипериодических функций со значениями в $B$ и рассмотрены некоторые свойства таких функций (теоремы вложения, следа и плотности).

1. E. C. Lance. Hilbert $C^*$-Modules. — Cambridge: University Press, 1995.

# Наближення періодичних аналітичних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами

**А.С. Сердюк**
Інститут математики НАН України, Київ
*serdyuk@imath.kiev.ua*

Нехай $C^\psi_\beta \mathfrak{N}$ — введені О.І. Степанцем [1] класи $2\pi$-періодичних неперервних $(\psi, \beta)$-диференційовних функцій $f$ таких, що їх $(\psi, \beta)$-похідна $f^\psi_\beta$ належить до множини $\mathfrak{N} \subset L_1$. В якості $\mathfrak{N}$ розглядаються одиничні кулі $U_p$ в просторі $L_p$, $1 \le p \le \infty$, тобто множини $U_p = \{\varphi \in L_p : \|\varphi\|_p \le 1\}$. При цьому покладаємо $C^\psi_{\beta,p} = C^\psi_\beta U_p$. Будемо вважати, що послідовності $\psi = \psi(k)$, які породжують класи $C^\psi_\beta \mathfrak{N}$, задовольняють умову $\mathcal{D}_q$: $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q$, $q \in (0,1)$. Цей факт записуватимемо: $\psi \in \mathcal{D}_q$. Класи $C^\psi_{\beta,p}$, $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0,1)$ складаються з $2\pi$-періодичних функцій $f$, які допускають регулярне продовження у смугу $|\mathrm{Im} z| \le \ln \frac{1}{q}$ комплексної площини.

Через $\widetilde{S}_{n-1}(f;x)$ позначимо тригонометричний поліном порядку $n-1$, який інтерполює функцію $f \in C$ у точках $x^{(n-1)}_k = 2k\pi/(2n-1)$, $k = 0, 1, ..., (2n-1)$, тобто такий, що $\widetilde{S}_{n-1}(f; x^{(n-1)}_k) = f(x^{(n-1)}_k)$.

Розглядається задача про знаходження асимптотичних рівностей величин

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^\psi_{\beta,p}; x) = \sup_{f \in C^\psi_{\beta,p}} |f(x) - \widetilde{S}_{n-1}(f;x)|, \quad x \in \mathbb{R}$$

при $n \to \infty$ за умови, що $\psi \in \mathcal{D}_q$.

**Теорема.** *Нехай* $\psi \in D_q$, $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $1 \le p \le \infty$. *Тоді для довільних* $x \in \mathbb{R}$ *при* $n \to \infty$ *виконується асимптотична рівність*

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\beta,p};x)=|\sin\frac{2n-1}{2}x|\psi(n)\left(\frac{2\|\cos t\|_{p'}}{\pi}F^{1/p'}\left(\frac{p'}{2},\frac{p'}{2};1;q^2\right)+O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}}+\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right),$$

*в якій* $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $F(a,b;c;z)$ — *гіпергеометрична функція Гаусса,*

$$\varepsilon_n=\varepsilon_n(\psi)=\sup_{k\ge n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}-q\right|, \qquad s(p)=\begin{cases}1, & p=\infty,\\ 2, & 1\le p<\infty,\end{cases}$$

*а* $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена відносно усіх розглядуваних параметрів.*

1. Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций. — Киев.: Наук. думка, 1987. — 268 с.

# Оцінки колмогоровських поперечників класів інтегралів Пуассона в рівномірній та інтегральній метриках

**А.С. Сердюк, В.В. Боденчук**
Інститут математики НАН України, Київ
*serdyuk@imath.kiev.ua, bodenchuk@ukr.net*

Нехай $L = L_1$ — простір $2\pi$-періодичних сумовних на $[0,2\pi]$ функцій $\varphi$ з нормою $\|\varphi\|_L = \|\varphi\|_1 = \int\limits_0^{2\pi}|\varphi(t)|dt$, $L_\infty$ — простір вимірних і суттєво обмежених $2\pi$-періодичних функцій $\varphi$ з нормою $\|\varphi\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_t|\varphi(t)|$, $C$ — простір неперервних $2\pi$-періодичних функцій $\varphi$, у якому норма задається рівністю $\|\varphi\|_C = \max\limits_t|\varphi(t)|$.

Інтегралом Пуассона функції $\varphi \in L$ називають функцію $f(x)$, яка майже скрізь може бути представлена у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)P_{q,\beta}(t)dt,\ \varphi\perp 1 \tag{1}$$

де $a_0 \in \mathbb{R}$ — довільна стала, а $P_{q,\beta}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)$ — ядро Пуассона з параметрами $q \in (0,1)$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Множину таких функцій $f \in L$ позначають через $L^q_\beta$. Функцію $\varphi$ з рівності (1) називають $(q,\beta)$-похідною функції $f$ і записують $f^q_\beta$. Розглядаються класи $L^q_{\beta,1} = \{f \in L^q_\beta : \|f^q_\beta\|_1 \leqslant 1\}$, $C^q_{\beta,\infty} = \{f \in C \cap L^q_\beta : \|f^q_\beta\|_\infty \leqslant 1\}$.

Розглядається задача про знаходження точних значень колмогоровських поперечників класів $\mathfrak{N} = C^q_{\beta,\infty}$ або $\mathfrak{N} = L^q_{\beta,1}$, тобто величин вигляду

$$d_m(\mathfrak{N},X) = \inf_{F_m\subset X}\sup_{f\in\mathfrak{N}}\inf_{g\in F_m}\|f-g\|_X,$$

де зовнішній inf береться по всіх $m$-вимірних лінійних підпросторах $F_m$ із $X$, коли в якості $X$ виступають простори $C$ або $L$ відповідно. Має місце наступне твердження.

**Теорема.** *Нехай $q \in (0,1)$. Тоді існує номер $n_0$ такий, що для довільного номера $n \geqslant n_0$ і довільного $\beta \in \mathbb{R}$ виконуються рівності*

$$d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(L^q_{\beta,1}, L) =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)\theta_n - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right|, \tag{2}$$

*де*

$$\theta_n = \arcsin \frac{(q^{2n}-1)\cos\dfrac{\beta\pi}{2}}{\sqrt{1-2q^{2n}\cos\beta\pi + q^{4n}}}.$$

При $\beta = 2l$, $l \in \mathbb{Z}$ теорема раніше встановлена Нгуен Тхи Тхьєу Хоа [1]. Крім того рівність (2) для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $0 < q \leqslant q(\beta)$, де $q(\beta) = 0,2$ при $\beta \in \mathbb{Z}$ та $q(\beta) = 0,196881$ при $\beta \notin \mathbb{Z}$, доведена в роботі В.Т. Шевалдіна [2].

1. Нгуен Тхи Тхьеу Хоа. Экстремальные задачи на некоторых классах гладких периодических функций : Дис. ... доктора физ.-мат. наук. — М. : МИАН им. Стеклова, 1994. — 219 с.

2. Шевалдин В.Т. Поперечники классов сверток с ядром Пуассона, Мат. заметки, 1992, 51:6, С. 126–136.

# Нерівності типу Лебега для сум Валле Пуссена на класах періодичних аналітичних функцій

**А.С. Сердюк, А.П. Мусієнко**

Інститут математики НАН України, Київ

*serdyuk@imath.kiev.ua, andreymap@rambler.ru*

Нехай $C^\psi_\beta L_s$ — множина $2\pi$-періодичних функцій $f$, що зображаються згортками

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Psi_\beta(t)dt,\ a_0 \in \mathbb{R},\ \varphi \in L_s,\ \varphi \perp 1,\ \beta \in \mathbb{R} \tag{1}$$

з фіксованими ядрами $\Psi_\beta(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos(kt - \frac{\beta\pi}{2})$, коефіцієнти $\psi(k)$ яких додатні і задовольняють умову $\mathcal{D}_q$: $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q$, $q \in (0,1)$. Функцію $\varphi$ з рівності (1) називають $(\psi,\beta)$-похідною функції $f$ і позначають через $f^\psi_\beta$.

Тригонометричні поліноми $V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x)$, де $S_k(f;x)$ — частині суми Фур'є порядку $k$ функції $f$, називають сумами Валле Пуссена функції $f$ з параметрами $n$ і $p$.

Через $E_m(\varphi)_s$ — позначимо найкраще наближення в просторі $L_s$ функції $\varphi \in L_s$ тригонометричними поліномами $t_{m-1}$ порядку не вищого $m-1$, тобто $E_m(\varphi)_s = \inf\limits_{t_{m-1}} \|\varphi(\cdot) - t_{m-1}(\cdot)\|_s$.

Встановлено асимптотично непокращувані нерівності типу Лебега, що виражають відхилення сум $V_{n,p}(f)$ для функцій з множини $C^\psi_\beta L_s$ в рівномірній метриці через найкращі наближення $(\psi,\beta)$-похідних цих функцій в метриці простору $L_s$.

**Теорема.** *Нехай $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n,p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$ і $1 \leq s \leq \infty$. Тоді для довільної функції $f \in C^\psi_\beta L_s$ справедлива нерівність*

$$\|f(x) - V_{n,p}(f;x)\|_C \leq \frac{\psi(n-p+1)}{p}\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}} K_{q,p}(s') + \right.$$

$$+O(1)\left[\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}}+\frac{\varepsilon_{n-p+1}}{(1-q)^2}\min\left\{p,\frac{1}{1-q}\right\}\right]\Bigg)E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\beta})_{L_s}, \qquad (2)$$

*в якій* $s'=\frac{s}{s-1}$, $\qquad \varepsilon_{n-p+1}=\sup\limits_{k\ge n-p+1}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}-q\right|$,

$$K_{q,p}(s')=2^{-1/s'}\left\|\frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt+q^{2p}}}{1-2q\cos t+q^2}\right\|_{s'} \quad i \quad \sigma(s',p)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad s'=1 \quad \text{і} \quad p=1,\\ 2 & \text{при} \quad 1<s'\le\infty \quad \text{і} \quad p=1,\\ 3 & \text{при} \quad 1\le s'\le\infty \quad \text{і} \quad p\in\mathbb{N}\backslash\{1\}.\end{cases}$$

*При цьому для будь-якої функції* $f\in C^{\psi}_{\beta}L_s, 1\le s\le\infty$ *і довільних* $n,p\in\mathbb{N}$, $p\le n$, *в просторі* $C^{\psi}_{\beta}L_s, 1\le s\le\infty$, *знайдеться функція* $F(x)=F(f;n;p;x)$ *така, що* $E_{n-p+1}(F^{\psi}_{\beta})_{L_s}=E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\beta})_{L_s}$, *і для неї при* $n-p\to\infty$ *виконується рівність:*

$$\|F(x)-V_{n,p}(F;x)\|_C=\frac{\psi(n-p+1)}{p}\Bigg(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}K_{q,p}(s')+$$

$$+O(1)\left[\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}}+\frac{\varepsilon_{n-p+1}}{(1-q)^2}\min\left\{p,\frac{1}{1-q}\right\}\right]\Bigg)E_{n-p+1}(F^{\psi}_{\beta})_{L_s}. \qquad (3)$$

*У* (2) *і* (3) $O(1)$ *— величини, рівномірно обмежені відносно всіх розглядуваних параметрів.*

# Равномерное приближение аналитических функций суммами Валле Пуссена

**А.С. Сердюк, Е.Ю. Овсий**
Институт математики НАН Украины, Киев
*serdyuk@imath.kiev.ua, ievgen.ovsii@gmail.com*

Пусть $C$ — пространство непрерывных $2\pi$-периодических функций $f$, в котором норма определяется равенством $\|f\|_C=\max\limits_t|f(t)|$, а $H^{\alpha}$ — класс Гельдера порядка $\alpha$. Рассмотрим введенные А.И. Степанцом [1] классы $C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha}$ функций $f$, представимых в виде свертки

$$f(x)=\frac{a_0(f)}{2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\Psi_{\beta}(t)\,dt, \quad \varphi\in H^{\alpha},$$

с ядром $\Psi_{\beta}(t)$ вида

$$\Psi_{\beta}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right),$$

коэффициенты $\psi(k)$ которого удовлетворяют условия

$$\psi(k)>0, \quad k\in\mathbb{N}, \quad \lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}=q, \quad q\in(0,1).$$

Множество таких $\psi$ обозначим через $D_q$. Сопоставим каждой функции $f\in C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha}$ ее сумму Валле Пуссена

$$V_{n,p}(f;x)=\frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}S_k(f;x),$$

где $S_k(f;x)$ — частные суммы Фурье порядка $k$ функции $f$, а $n,p\in\mathbb{N}$, $p\leqslant n$. В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

**Теорема.** *Пусть $\psi\in D_q$, $q\in(0,1)$, $\beta\in\mathbb{R}$ и $\alpha\in(0,1)$. Тогда при $n-p\to\infty$, $n,p\in\mathbb{N}$, $p\leqslant n$ имеет место асимптотическое равенство*

$$\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha}}\|f(\cdot)-V_{n,p}(\cdot)\|_C=\frac{\psi(n-p+1)}{p(n-p+1)^{\alpha}}\left(\frac{2^{2+\alpha}}{\pi^2}\frac{1-q^{2p}}{1-q^2}\mathbf{K}(q^p)\int\limits_0^{\pi/2}t^{\alpha}\sin t\,dt+\right.$$

$$\left.+O(1)\left(\frac{1}{(1-q)^{\gamma(p)}(n-p+1)^{1-\alpha}}+\frac{\varepsilon_{n-p+1}}{(1-q)^2}\min\left\{p,\frac{1}{1-q}\right\}\right)\right),$$

*где $\mathbf{K}(\rho)$ — полный эллиптический интеграл первого рода,*

$$\gamma(p)=\begin{cases}2, & p=1,\\ 3, & p=2,3,\ldots,n,\end{cases}$$

$\varepsilon_{n-p+1}=\sup\limits_{k\geqslant n-p+1}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}-q\right|$, *а $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по $n$, $p$, $q$, $\alpha$ и $\beta$.*

1. Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наукова думка, 1987. — 268 с.

# Асимптотика найкращих наближень узагальнених інтегралів Пуассона функцій, модулі неперервності яких не перевищують заданої мажоранти

**А.С. Сердюк, І.В. Соколенко**
Інститут математики НАН України, Київ
*serdyuk@imath.kiev.ua, sokol@imath.kiev.ua*

Нехай $C$ і $L$ — простори $2\pi$-періодичних функцій зі стандартними нормами $\|\cdot\|_C$ і $\|\cdot\|_L$, $\omega(t)$ — фіксований модуль неперервності і $H_{\omega_C}=\{\varphi\in C:\|\varphi(\cdot)-\varphi(\cdot+t)\|_C\le\omega(|t|)\}$, $H_{\omega_L}=\{\varphi\in L:\|\varphi(\cdot)-\varphi(\cdot+t)\|_L\le\omega(|t|)\}$.

Нехай, далі, $P^{\alpha,r}_{\beta}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos(kt-\beta\pi/2),\alpha>0,r>0,\ \beta\in\mathbb{R},$ — узагальнене ядро Пуассона, $C^{\alpha,r}_{\beta}H_{\omega_C}$ — множина функцій $f$, які можна зобразити у вигляді згортки

$$f(x)=\frac{a_0(f)}{2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)P^{\alpha,r}_{\beta}(t)dt,\quad\varphi\perp1,\tag{1}$$

$\varphi\in H_{\omega_C}$, а $L^{\alpha,r}_{\beta}H_{\omega_L}$ — множина $2\pi$-періодичних сумовних функцій, що еквівалентні відносно міри Лебега згорткам (1), в яких $\varphi\in H_{\omega_L}$.

Якщо функція $f$ належить до класу $C^{\alpha,r}_{\beta}H_{\omega_C}$, то при $r\in(0,1)$ вона є нескінченно дифереційовною (див. [1, лема 3.5.6]), при $r=1$ допускає аналітичне продовження в смугу $|\mathrm{Im}z|\le\alpha$ комплексної площини, а при $r>1$ є цілою функцією (див. [1, п. 1.8.4]).

Нехай $\mathcal{T}_{2n-1}$ — підпростір всіх тригонометричних поліномів порядку $\le n-1$. Досліджується асимптотична поведінка найкращих наближень

$$E_n(C^{\alpha,r}_{\beta}H_{\omega_C})_C=\sup_{f\in C^{\alpha,r}_{\beta}H_{\omega_C}}\inf_{T_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}}\|f-T_{n-1}\|_C,$$

$$E_n(L^{\alpha,r}_\beta H_{\omega_L})_L=\sup_{f\in L^{\alpha,r}_\beta H_{\omega_L}}\inf_{T_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}}\|f-T_{n-1}\|_L.$$

**Теорема.** *Нехай $\alpha>0,\ r>0,\ \ \beta\in\mathbb{R}$ і $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності. Тоді при $n\to\infty$ виконуються асимптотичні рівності*

$$\left.\begin{array}{l} E_n(C^{\alpha,r}_\beta H_{\omega_C})_C \\ \\ E_n(L^{\alpha,r}_\beta H_{\omega_L})_L \end{array}\right\}=e^{-\alpha n^r}\left(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t dt+O(1)\omega(1/n)\gamma_n(\alpha,r)\right),$$

*де*

$$\gamma_n(\alpha,r)=\begin{cases}(r\alpha n^r)^{-1}, & r\in(0,1),\\ \\ (1+\alpha^{-1})\,e^{-\alpha}n^{-1}, & r=1,\\ \\ e^{-\alpha r n^{r-1}}n^{-1}, & r>1,\end{cases}$$

*а величина $O(1)$ — рівномірно обмежена відносно всіх параметрів.*

1. Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наукова думка, 1987. — 268 с.

# Наближення неперервних періодичних функцій $\Lambda$–методами підсумовування їх рядів Фур'є

**Є.С. Сілін**

Слов'янський держ. пед. ун-т, Слов'янськ, Україна

*silin-evgen@meta.ua*

Нехай $C$ — простір неперервних $2\pi$-періодичних функцій,

$$S[f]=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\ kx+b_k\sin\ kx)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}A_k(f;x)$$

— ряд Фур'є функції $f\in C$, $\overline{\psi}=(\psi_1;\psi_2)$ — пара довільних фіксованих систем чисел $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k),\ k=0,1,\dots,\ \psi_1(0)=1,\ \psi_2(0)=0$. Якщо для даної функції $f$ і пари $(\psi_1;\psi_2)$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\psi_1(k)A_k(f;x)+\psi_2(k)\ \widetilde{A}_k\ (f;x)\Big),\quad \widetilde{A}_k\ (f,x)=a_k\sin kx-b_k\cos kx$$

є рядом Фур'є деякої функції $F\in C$, то $F$ називається $\overline{\psi}$-інтегралом функції $f$ [1]. Множина $\overline{\psi}$-інтегралів всіх функцій $f\in C$ позначається як $C^{\overline{\psi}}$. Покладемо $\mathcal{M}=\{\varphi:\operatorname{ess\,sup}|\varphi(t)|<\infty\}$, тоді через $C^{\overline{\psi}}_\infty$ будемо позначати множину $\overline{\psi}$-інтегралів функцій $f$ з одиничної кулі простору $\mathcal{M}$.

Будемо вважати, що значення пари $(\psi_1;\psi_2)$ є значеннями деяких опуклих донизу при всіх $v\geq 1$ функцій $\psi_i(v)$, $i=1,2$ неперервного аргументу таких, що $\lim\limits_{v\to\infty}\psi_i(v)=0$. Із множини $\mathfrak{M}$ всіх таких функцій виділимо підмножини $\mathfrak{M}_C$ й $\mathfrak{M}_0$ [1]. Нехай $\psi\in\mathfrak{M}$ і $\eta(t)=\psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right)$, $\mu(t)=\mu(\psi;t)=\frac{t}{\eta(t)-t}$.

Тоді $\forall t\geq 1$ $\mathfrak{M}_C=\{\psi\in\mathfrak{M}:\ 0<K_1\leq\mu(t)\leq K_2\}$, $\mathfrak{M}_0=\{\psi\in\mathfrak{M}:\ 0<\mu(t)\leq K_3\}$. Тут $K_i$, $i=\overline{1,3}$ — деякі додатні сталі, що не залежать від змінної $t$.

Нехай $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$, $n, k = 0, 1, 2, \dots$, $\lambda_0^{(n)} = 1$, $\lambda_k^{(n)} = 0$ при $k \geq n$ — нескінченна трикутна матриця чисел. Кожній $f \in C_\infty^{\overline{\psi}}$, виходячи з її розкладу в ряд Фур'є, поставимо у відповідність поліном

$$U_n(f;x;\Lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(n)} A_k(f,x), \quad n = 1, 2, \dots .$$

В роботі ми знаходимо асимптотичні формули для верхніх граней відхилень

$$\mathcal{E}(C_\infty^{\overline{\psi}}; U_n) = \sup_{f \in C_\infty^{\overline{\psi}}} \|f(\cdot) - U_n(f;\cdot;\Lambda)\|_C, \quad n \to \infty,$$

які виражені через коефіцієнти поліномів $U_n(f;x;\Lambda)$.

**Теорема.** *Нехай* $\psi_i \in \mathfrak{M}_0 \bigcup \mathfrak{M}_C$, $i = 1, 2$. *Тоді при* $n \to \infty$

$$\mathcal{E}(C_\infty^{\overline{\psi}}; U_n) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \xi(\tau_{k,2}^{(n)}, \lambda_{n-k}^{(n)} \overline{\psi}(n)) + O\left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{n} |\Delta^2 \tau_{k-1,1}^{(n)}| + |\Delta^2 \tau_{k-1,2}^{(n)}| \right) + O(\overline{\psi}(n)),$$

*де*

$$\xi(t,u) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} t, & |u| \leq |t|; \\ |t| \arcsin |\frac{t}{u}| + \sqrt{u^2 - t^2}, & |t| < |u|, \end{cases}$$

$\tau_{k,i}^{(n)} = (1 - \lambda_k^{(n)}) \psi_i(k)$, $\overline{\psi}(n) = \sqrt{\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)}$, $|\Delta^2 \tau_{k-1,i}^{(n)}| = \tau_{k-1,i}^{(n)} - 2\tau_{k,i}^{(n)} + \tau_{k+1,i}^{(n)}$, $i = 1, 2$.

1. Степанец А.И. Методы теории приближений: В 2 т. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002.

# Точные неравенства для производных функций малой гладкости, заданных на конечном отрезке

**Д.С. Скороходов**

Днепропетровский национальный университет, Украина

*dmitriy.skorokhodov@gmail.com*

Для $s \in [1, \infty]$ через $L_s$ обозначим множество функций $x : [0,1] \to \mathbb{R}$, интегрируемых в степени $s$ при $s < \infty$ и существенно ограниченных при $s = \infty$. Норму $\|\cdot\|_s$ в пространстве $L_s$ введем стандартным образом. Через $L_s^r$, $r \in \mathbb{N}$ и $r \geqslant 2$, обозначим множество функций $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, имеющих локально абсолютно непрерывную производную $f^{(r-1)}$, и таких, что $x^{(r)} \in L_s$. Пусть также $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant r-1$, и $q, s \in [1, \infty]$. Неравенство вида

$$\left\|f^{(k)}\right\|_q \leq A\|f\|_p + B\left\|f^{(r)}\right\|_s, \tag{1}$$

которое при некоторых фиксированных постоянных $A$ и $B$ имеет место для всех функций $f \in L_s^r$, называется *аддитивным неравенством типа Колмогорова.*

Обозначим через $A_{p,q}^{k,r-1}$ неулучшаемую постоянную в неравенстве Маркова-Никольского $\left\|Q^{(k)}\right\|_q \leq A_{p,q}^{k,r-1}\|Q\|_p$ для алгебраических многочленов $Q$ степени не выше $r-1$. Известно [1], что для всех $A \geq A_{p,q}^{k,r-1}$ найдется такое число $B$, что аддитивное неравенство вида (1) справедливо для всех функций $f \in L_s^r$. Поэтому вопрос о нахождении наименьшей возможной постоянной $B = B(A)$ в неравенстве (1) для каждого $A \geq A_{p,q}^{k,r-1}$ представляет особый интерес.

На данное время известно мало точных неравенств вида (1), причем большинство из них найдено в случае, когда $p = q = s = \infty$ и $r \leqslant 4$. В данном докладе рассмотрена ситуация, когда $r = 3$, $p = q = \infty$ и $s \in [1, \infty)$. В частности, имеет место следующая

**Теорема.** *Пусть* $A \geq A^{1,2}_{\infty,\infty} = 8$, $\rho_A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{8}{A}}$ *и*

$$G_A(t) = \begin{cases} 2t - \frac{1+\rho_A}{\rho_A} t^2, & t \in [0, \rho_A], \\ \frac{\rho_A}{1-\rho_A}(1-t)^2, & t \in [\rho_A, 1]. \end{cases}$$

*Тогда для любой функции* $f \in L^3_s$, $s \in [1, \infty)$, *выполнено неравенство*

$$\|f'\|_\infty \leq A\|f\|_\infty + \frac{1}{2}\, \|G_A\|_{(s-1)/s}\, \|f'''\|_s.$$

*Более того, обозначим через* $x_s \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ *решение уравнения*

$$\frac{1-2x_s}{2s} - \frac{1-x_s}{3s-1} = \frac{x_s^3}{6s-4} F\left(1, \frac{4s-2}{s-1}; \frac{4s-3}{s-1}; \frac{1+x_s}{2}\right),$$

*где* $F(a, b; c; x)$ *– гипергеометрическая функция, и положим* $A_s = \frac{2}{x_s(1-x_s)}$. *Тогда при* $s = 1$ *неравенство (1) является точным для всех* $A \geqslant 8$, *а при* $s \in (1, \infty)$ *– для всех* $A \in [8, A_s]$.

1. В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов. Неравенства для производных. – Киев: Наукова думка, 2003.

# Білінійні наближення класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ періодичних функцій двох змінних у просторі $L_q$

**К.В. Соліч**
Інститут математики НАН України, Київ
*sokava@mail.ru*

Досліджуються оцінки найкращих білінійних наближень класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ періодичних функцій двох змінних у просторі $L_q$ при деяких співвідношеннях між параметрами $p$, $q$, $\theta$. Властивості класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B \subset L_p(\pi_d)$ визначаються за допомогою: $\Omega(t)$, $t = (t_1, ..., t_d) \in \mathbb{R}^d_+$, — мажорантної функції для мішаного модуля неперервності $l$–го порядку ($l \in \mathbb{N}$) функції $f \in L_p(\pi_d)$; числових параметрів $p$ і $\theta$, $1 \leq p, \theta \leq \infty$. Крім того функція $\Omega(t)$ задовольняє, так звані, умови Барі – Стєчкіна ($S^\alpha$) і ($S_l$) [1].

Означимо досліджувану апроксимативну характеристику. Нехай $L_q(\pi_2)$, $q = (q_1, q_2)$, — множина функцій $f(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, зі скінченною мішаною нормою

$$\|f(x, y)\|_{q_1,q_2} = \|\, \|f(\cdot, y)\|_{q_1}\|_{q_2},$$

де норма обчислюється спочатку в просторі $L_{q_1}([-\pi; \pi])$ по змінній $x \in \mathbb{R}$, а потім від результату — по змінній $y \in \mathbb{R}$ в просторі $L_{q_2}([-\pi; \pi])$. Для класу функцій $F \subset L_q(\pi_2)$ означимо найкраще білінійне наближення порядку $M$:

$$\tau_M(F)_{q_1,q_2} := \sup_{f \in F} \inf_{u_j(x), v_j(y)} \|f(x, y) - \sum_{j=1}^{M} u_j(x) v_j(y)\|_{q_1,q_2},$$

де $u_j \in L_{q_1}([-\pi; \pi])$, $v_j \in L_{q_2}([-\pi; \pi])$ і $\tau_0(f)_{q_1,q_2} := \|f(x, y)\|_{q_1,q_2}$.

Зауважимо, що у випадку $q_1 = q_2 = q$ будемо писати $\tau_M(F)_q$.

**Теорема.** *Нехай* $1 \le p,\ q,\ \theta \le \infty$ *і* $\Omega \in \Phi^2_{\alpha,l}$, $\alpha > \alpha_0$, *де*

$$\alpha_0 = \begin{cases} \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, & 1 \le p \le q \le 2, \\ \frac{1}{2}, & 2 \le p \le q \le \infty, \\ \frac{1}{p}, & 1 \le p < 2 < q \le \infty. \end{cases}$$

*Тоді справедливі наступні оцінки*

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_q \asymp \begin{cases} \Omega(M^{-2})M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & 1 \le p \le q \le 2, \\ \Omega(M^{-2}), & 2 \le p \le q \le \infty, \\ \Omega(M^{-2})M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & 1 \le p < 2 < q \le \infty. \end{cases}$$

**Зауваження 1.** При $\theta = \infty$ твердження теореми є поширенням відповідних результатів В.М. Темлякова [2, с. 101, теорема 4.2] для класів $H^r_p$ на класи $S^{\Omega}_p H$.

**2.** З доведеної теореми при $\Omega(t) = t^r$ і відповідних обмеженнях на параметр $r > 0$ отримується твердження для класів $B^r_{p,\theta}$, встановлене в роботі [3].

1. Бари Н.К., Стечкин С.Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций, Тр. Моск. мат. о-ва, 1956, 5, С. 483–522.

2. Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной, Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1986, 178, С. 1–112.

3. Романюк А.С., Романюк В.С. Асимптотические оценки наилучших тригонометрических и билинейных приближений классов функций нескольких переменных, Укр. мат. журн., 2010, 62:4, С. 536–551.

# Сумісне наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена

**В.А. Сорич, Н.М. Сорич**

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Україна

*evruka@i.ua*

Нехай $C^q_{\beta,\infty}$ - клас неперервних $2\pi$ – періодичних функцій $f(x)$, які є згортками ядер Пуассона $P^q_\beta = \sum_{t=0}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)$ із функціями $\varphi :\| \varphi \|_\infty \leqslant 1$, $\varphi \perp 1$. Нехай, далі, числа $q_i, \beta_i$ $(i = \overline{1,m})$ такі, що $0 < q < q_i \le 1$, $\beta_i \in R$, $\beta \in R$.

У цьому повідомленні, з використанням результатів [1], досліджується асимптотична поведінка величини

$$\varepsilon_{n,m}(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}) = \sup_{f \in C^q_{\beta,\infty}} \| \sum_{i=1}^{m} q_i^{n-p+1} \big(f^{q_i}_{\beta_i}(x) - V_{n,p}(f^{q_i}_{\beta_i}; x)\big) \|_c,$$

де $f^{(q_i)}_{\beta_i}(x)$ — похідні в сенсі О.І. Степанця при $\psi_i(k) = q_i^{-k}$, $V_{n,p}(f,x)$ – суми Валле-Пуссена $\Big(V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p+1}^{n} S_k(f;x)$, $S_k(f;x)$ – сума Фур'є порядку $k\Big)$.

**Теорема.** Якщо $n \to \infty$ і $n - p \to \infty$, то справедлива рівність

$$\varepsilon_{n,m}(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}) = \frac{2q^{n-p+1}}{\pi^2 p} \left( \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{A^2(t) + B^2(t)}dt + O(1)\frac{1}{n-p+1} \begin{cases} \dfrac{q}{q^* - q}, & p = 1 \\ \dfrac{qq^{*2}}{(q^* - q)^3}, & p = 2, 3, \ldots \end{cases} \right),$$

де

$$A(t)=\sum_{i=1}^{m} z_i^2(t) z_i^*(pt)\cos\bigl(2\theta_i(t)+\beta_i\frac{\pi}{2}-\delta_i(t)\bigr),$$

$$B(t)=\sum_{i=1}^{m} z_i^2(t) z_i^*(pt)\sin\bigl(2\theta_i(t)+\beta_i\frac{\pi}{2}-\delta_i(t)\bigr), z_q(t)=(1-2q\cos t+q^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$z_q^*(t)=(1-2q^p\cos t+q^{2p})^{\frac{1}{2}}, \theta_q(t)=\operatorname{arctg}\frac{q\sin t}{1-q\cos t}, \delta_q(t)=\operatorname{arctg}\frac{q^p\sin t}{1-q^p\cos t},$$

$$z_i(t)=z_{\frac{q}{q_i}}(t), z_i^*(t)=z^*_{\frac{q}{q_i}}(t), \theta_i(t)=\theta_{\frac{q}{q_i}}(t), \delta_i(t)=\delta_{\frac{q}{q_i}}(t),$$

$q^*=\min\limits_i q_i$, $O(1)$– величина, рівномірно обмежена по $n, q, q_i, \beta, \beta_i$.

1. Сердюк А.С. Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле-Пуссена, Укр. мат. жур., 2004, 56:1, С. 97–107.

# Найкраще наближення аналогів класів Бєсова з логарифмічною гладкістю

**С.А. Стасюк**

Інститут математики НАН України, Київ

*stasyuk@imath.kiev.ua*

Нехай $L_q$, $1\le q\le\infty$, — простір $2\pi$-періодичних функцій $f$ зі скінченною нормою

$$||f||_q=\left((2\pi)^{-1}\int\limits_0^{2\pi}|f(x)|^q\,dx\right)^{1/q}, \quad 1\le q<\infty,$$

$$||f||_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in[0,2\pi]}|f(x)|.$$

Для $r>0$, $1\le\theta\le\infty$ позначимо

$$B^{0,r}_{\infty,\theta}:=\left\{f\in L_\infty: ||f||_{B^{0,r}_{\infty,\theta}}\le 1\right\},$$

де

$$||f||_{B^{0,r}_{\infty,\theta}}:=\left(\sum_{s=0}^{\infty}((s+1)^r||\delta_s(f)||_\infty)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}, \ \ 1\le\theta<\infty,$$

$$||f||_{B^{0,r}_{\infty,\infty}}:=\sup_s(s+1)^r||\delta_s(f)||_\infty,$$

і

$$\delta_s(f):=\sum_{[2^{s-1}]\le k<2^s}\widehat{f}(k)e^{ikx}, \quad \widehat{f}(k):=(2\pi)^{-1}\int\limits_0^{2\pi}f(x)e^{-ikx}dx.$$

Класи $B^{0,r}_{\infty,\theta}$ при $1\le\theta<\infty$ є аналогами класів Бєсова з логарифмічною гладкістю, а при $\theta=\infty$ $B^{0,r}_{\infty,\infty}\equiv LG^r$, де $LG^r$ — класи, введені в [1].

Нехай $t_m(x):=\sum\limits_{k=-m}^{m}c_ke^{ikx}$, де $c_k$ — довільні числа. Для $F\subset L_q$ покладемо

$$E_m(F)_q:=\sup_{f\in F}\inf_{t_m}||f-t_m||_q$$

— найкраще наближення функціонального класу $F$ тригонометричними поліномами $t_m$.

Мають місце наступні твердження.

**Теорема 1.** *Нехай* $1 \le \theta < \infty$, $r > 1 - \frac{1}{\theta}$, *тоді*

$$E_m(B^{0,r}_{\infty,\theta})_\infty \asymp (\log_2 m)^{-r+1-\frac{1}{\theta}}.$$

**Теорема 2.** *Нехай* $1 < q < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $r > (\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})_+$, *тоді*

$$E_m(B^{0,r}_{\infty,\theta})_q \asymp (\log_2 m)^{-r+(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+},$$

*де* $a_+ = \max\{a;\, 0\}$.

У випадку $\theta = \infty$, тобто для класів $LG^r$, відповідні порядкові оцінки величин $E_m(LG^r)_q$ встановлені в [1].

1. Кашин Б. С., Темляков В. Н. Об одной норме и аппроксимационных характеристиках классов функций многих переменных, Теория функций, СМФН, 2007, 25, С. 58–79.

# Раціональна модифікація експоненціальних інтеграторів

**Роксоляна Столярчук**
Національний університет “Львівська політехніка”, Україна
*roksols@yahoo.com*

Просторова дискретизація багатьох еволюційних рівнянь з частинними похідними призводить до жорстких систем звичайних диференціальних рівнянь. Для розв’язання таких систем необхідно розробити ефективні чисельні методи з хорошою стійкістю та високою точністю отриманих результатів.

Розглядаються раціональні багатокрокові методи для жорсткої задачі

$$u'(t) = Au(t) + g(t, u(t)), \quad u(0) = u_0, \tag{1}$$

де матриця $A$ має жорсткий спектр, $u(t)$ є лінійною частиною, а $g(t,u)$ – гладка нелінійність, що задовольняє локальну умову Ліпшиця.

Розв’язок задачі (1) задовольняє інтегральне рівняння Вольтерра

$$u(t_{n+1}) = e^{hA}u_n + \int_0^h e^{(h-\tau)A} g(t_n + \tau, u(t_n + \tau))d\tau. \tag{2}$$

Раціональний багатокроковий метод, який має вигляд

$$u_{n+1} = R(hA)u_n + h\sum_{j=0}^{p-1} R_j(hA) g(t_{n-j}, u_{n-j}), \tag{3}$$

можна розглядати як апроксимацію співвідношення (2), де $R(hA)$,$R_j(hA)$ апроксимує $e^{hA}$, а інтеграл в (2) апроксимується квадратурами за участю попередніх величин, що є природнім для структури багатокрокового методу.

В якості ще однієї спроби для наближення розв'язку задачі (1) розглядається дробово-раціональний підхід, запропонований в [2]:

$$(\sum_{j=0}^{p}\alpha_j Z^j)u_{n+1}=\sum_{j=0}^{p}\alpha_j Z^j T_{p-j,n}, \quad Z=hA. \tag{4}$$

Співвідношення (4) розглядаємо як основу для різноманітних модифікацій в залежності від того, як апроксимуються Тейлоріські коефіцієнти.

В даній роботі пропонується багатокрокова заміна Тейлорівських наближень, результатом якої є поєднанням раціональної апроксимації лінеаризованої задачі з апроксимацією типу багатокрокової для нелінійної частини.


1. Hochbruck M., Ostermann A. Exponential integrators, Acta Numerica, 2010, P. 209–286.

2. Slonevsky R., Stolyarchuk R. Rational-fractional methods for solving stiff systems of differential equations, Journal of Mathematical Sciences, 2008, 150:5, P. 2434–2438.

3. Verwer J.G. On generalized linear multistep methods with zero-parasitic roots and adaptive principal root, Numer. Math., 1976, 27, P. 143–155.


# Обчислення сингулярних інтегралів у методі граничних елементів стосовно до двовимірних крайових задач теорії пружності


**М.А. Сухорольський, І.С. Костенко, І.М. Зашкільняк, О.З. Любицька**

Національний університет "Львівська політехніка" , Україна

*irakos@gmail.com*


Двовимірні крайові задачі теорії пружності можна привести, ґрунтуючись на теорії потенціалів, до інтегральних рівнянь з сингулярними ядерними функціями, зокрема з ядерними функціями, що мають логарифмічну особливість або особливість похідної від логарифмічної функції. Традиційно інтегральні рівняння такого типу розв'язують методом колокації з використанням рівномірної апроксимації густин. В даній роботі, ґрунтуючись на послідовнісному підході до подання узагальнених функцій, досліджено збіжність інтегральних сум для контурних інтегралів (інтегральних рівнянь) з сингулярними ядерними функціями – похідними від логарифмічної функції. Наведено оцінку цих наближень.

Розглянемо криволінійний інтеграл,

$$J(t_0)=\int_L [\frac{\partial}{\partial n(t_0)}\ln|t_0-t|+G(t_0,t)]g(t)dl(t), \tag{1}$$

який містить похідну від логарифмічного потенціалу простого шару (можливо у неявному вигляді). Тут $t_0(x_0,y_0)\in D_0$ і $t_0(x_0,y_0)\notin L$; $|t_0-t|=\sqrt{(x_0-x)^2+(y_0-y)^2}$; $D_0$ і $L=\partial D_0$ - є, відповідно, обмеженою областю і границею цієї області, $t(x,y)\in L$ ; $g(t)$ - функція гельдерівського класу, $|g(t')-g(t'')|\le A|t'-t''|^{\mu}$ , $t',t''\in L$, $0\le\mu\le 1$ , $A=const$ ; $G(t_0,t)$ - неперервна функція за двома змінними і гельдерівського класу за змінною $t$ з показником $\mu_1$, $0\le\mu_1\le 1$ ; $\frac{\partial}{\partial n(t_0)}$ - похідна за напрямком одиничного вектора $\bar{n}(t_0)=\{n_1(t_0);n_2(t_0)\}$.

Виберемо дві множини точок на кривій $L$, $E=\{t_k(x_k,y_k),k=\overline{1,n}\}$, $t_{n+1}=t_1$; $E_{0k}=\{t_{0k}(x_{0k},y_{0k}),k=\overline{1,n}\}$, $t_{0n+1}=t_{01}$ . Точки $t_k$ розбивають криву $L$ на $n$ частин $L_k$, точки $t_{0k}$ довільно вибираємо на дугах $t_{k-1}t_k$ .

Розглянемо також інтегральну суму для інтегралу (1)

$$J_n(t_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial n(t_0)} \ln |t_0 - t_k| g(t_k) \delta l_k + \sum_{k=1}^{n} G(t_0, t_k) g(t_k) \delta l_k, \tag{2}$$

де $\delta l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}$.

Розглянемо випадок множини $E_{0k}$, коли точки $t_{0k}(x_{0k}, y_{0k})$ є середніми точками дуг розбиття. Оцінено порядок малості відносно $n$ відхилення інтегральної суми (2) від відповідного інтеграла (1), $|J(t_0) - J_n(t_0)|$ при $t_0 \to t_{0k} \in L$ вздовж нормалі до $L$ в точці $t_{0k}$. При цьому вважаємо, що граничний перехід відбувається за законом

$$|t_0 - t_{0k}| = \frac{\varepsilon_0}{n^\alpha}, \tag{3}$$

де $\varepsilon_0$ і $\alpha$ – додатні числа, $0 \le \alpha \le 1$ .

**Теорема.** *Якщо $L$ - замкнутий контур Ляпунова, то за виконання умови (3) відхилення інтеграла (1) від відповідної інтегральної суми (2) справджує нерівність*

$$|J_1(t_0) - J_n(t_0)| \le \frac{A(t_0)}{n^{\mu_0}},$$

*де $t_0 \in D$; $g(t)$ - функція, що справджує умову Гельдера; $G(t_0, t)$ - неперервна функція за змінною $t_0$ і справджує умову Гельдера за змінною $t$; $\mu_0 = \min(\mu, \mu_1, 1 - \alpha)$, $A(t_0) \le \infty$ - додатна величина.*

# О РЯДАХ ИЗ МОДУЛЕЙ БЛОКОВ ЧЛЕНОВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

**С.А. Теляковский**[1]

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

*sergeyAltel@yandex.ru*

Пусть $\Lambda$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел $1 = n_1 < n_2 < \ldots$, для которой сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j}.$$

Если $\gamma \in (0, 1)$ и для чисел $b_k \to 0$, $k \to \infty$, сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| \, k^\gamma,$$

то ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} b_k \sin kx \right| \tag{1}$$

сходится при всех $x$. Пусть $G_\Lambda(x)$ обозначает его сумму.

**Теорема 1.** *Если $\gamma \in (0, 1)$, то интеграл*

$$\int_0^\pi G_\Lambda(x) \, \frac{dx}{x^\gamma}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11 – 01 – 00417).

*сходится в том и только том случае, когда сходится ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |b_{n_{j+1}}| \big(n_{j+1} - n_j\big)^{\gamma}.$$

Если в (1) синусы заменить на косинусы, то полученный ряд при $x \in (0, \pi]$ будет сходится и для функции $F_\Lambda(x)$ – суммы этого ряда, будет справедлив аналог теоремы 1.

**Теорема 2.** *Если сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| \, \log(k+1),$$

*то интеграл*

$$\int_0^{\pi} F_\Lambda(x)\, dx$$

*сходится в том и только том случае, когда сходится ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |b_{n_{j+1}}| \, \log(n_{j+1} - n_j + 1).$$

Теорема 2 аналогична установленному в [1] утверждению о функции $G_\Lambda(x)$.

Доказательства приведенных результатов следуют схеме рассуждений из [1].

1. Trigub R.M. A note on the paper of Telyakovskii "Certain properties of Fourier series of functions with bounded variation East journal on approximation, 2007, 13:1, P. 1–6.

# Наилучшие приближения и кратные приближения типа свертки в пространстве $S_k^p$

**М.Ф. Тиман, О.Б. Шаврова**

Днепропетровский государственный аграрный университет, Украина

*mtiman@yandex.ru, _oxana_13@mail.ru*

Рассматриваются периодические, интегрируемые по Лебегу функции многих переменных $f(x), \quad x = (x_1, ..., x_k)$ на кубе периода $Q^k = [0,\, 2\pi]^k$, для которых при некотором $p$ $(1 \le p < \infty)$ сходится кратный ряд $p$-ых степеней их коэффициентов Фурье. Кроме этого, для таких функций изучаются так называемые кратные преобразования типа свертки вида

$$F(f; \sigma; x; h) = \int_{Q^k} f(x - h\, u)\, d\sigma(u). \tag{1}$$

Для функций одной переменной оценки таких преобразований для классических пространств $L_p$ проведены в работах: Шапиро (см. Acta Math., 1968. – V.120, № 3-4. – P. 279-292), Шапиро и Боман (см. Bull.Amer.Math.Soc., 1969. – V.75, № 6. – P.1266-1268.), Тиман М.Ф. (см. М.:ДАН СССР, 1971. – Т.198, № 4.– С.776-779).

Для так называемых пространств $S^p$, которые систематически рассматривались в работах Степанца А.И. (см. Препр./НАН Украины. Ин-т математики; 2000.2, Киев, 2000. – 52 с. и Препр./НАН Украины. Ин-т математики; 2001.2, Киев, 2001. – 85c); общие оценки преобразований типа свертки при $k = 1$ изучались в работе Шавровой О.Б. (см. "Вісник

Дніпропетровського університету. Математика". Дніпропетровськ. – 2006, № 11. – С. 128-134).

Для отдельных случаев функций $\sigma(u)$, определяющих общие преобразования типа свертки (1) оценки таких преобразований в метриках $S^p$- пространства изложены в работе Степанец А. И., Сердюк А.С. (см. Укр. мат. Журнал. – 2002. – т. 54, № 1. – С. 106-124).

В данной работе рассматриваются общие оценки преобразования (1) в метриках пространства $S_k^p$ с помощью частных наилучших приближений тригонометрическими полиномами, когда для любого натурального $k$ $d\sigma(u) = d\sigma_1(u) \cdots d\sigma_k(u)$. Случай пространств $L_p \quad (1 \le p < \infty)$ для функций двух переменных рассмотрен раннее в работе Шавровой О.Б. (см. Труды ИПММ НАН Украины. – Том 21, – Донецк, 2010. – С.238-244).

# Опис деяких класів функцій в термінах формули середніх значень

**О.Д. Трофименко**
Донецький національний університет, Україна
*odtrofimenko@gmail.com*

Нехай $s \in \mathbb{Z}$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$, $0 \le s \le m-1$.
Далі $J_s(z)$ - функція Бесселя порядку $s$ та $B_R$ - круг радіусу $R$ на $\mathbb{C}$.
Нехай $\varphi(z) = J_{s+1}(zr) - \sum\limits_{n=s}^{m-1} \frac{(zr)^{2n-s+1}(-1)^{n-s-1}}{(2n+2)(n-s)!n!2^{2n-s}}$, де $r \in (0, R)$.
Позначимо через $Z_\varphi$ - множину всіх нулів функції $\varphi(z)$.
Нехай $\Phi_{\lambda,\eta}^{k,l} = \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^\eta (J_k(\lambda\rho)) Y_l^{(k)}(\sigma)$, де $Y_l^{(k)}(\sigma)$ - фіксований ортонормований базис простору сферичних гармонік порядку $k$ на колі $S^1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda \in Z_\varphi$, $\eta = 0, ..., n_\lambda - 1$ ($n_\lambda$ - кратність $\lambda$), $l = 0, 1$.

**Теорема.** *Нехай $f \in C^{2m}(B_R)$ і $r \in (0, R)$ - фіксований. Тоді для того, щоб $f$ задовольняла рівності*

$$\sum_{n=s}^{m-1} \frac{r^{2n+2}}{(2n+2)(n-s)!n!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^n f(z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|\zeta - z| \le r} f(\zeta)(\zeta - z)^s d\xi d\eta,$$

$|z| < R - r$, *необхідно і достатньо, щоб*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{1} \sum_{\lambda \in Z_T} \sum_{\eta=0}^{n_\lambda - 1} c_{\lambda,\eta,k,l} \Phi_{\lambda,\eta}^{k,l} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{p=0}^{\frac{s-1-|k|}{2}} c_{k,p} \rho^{|k|+2p} e^{ik\varphi}$$

*де* $c_{k,p} \in \mathbb{C}$, $c_{\lambda,\eta,k,l} \in \mathbb{C}$ *і* $\max\limits_\eta |c_{\lambda,\eta,k,l}| \le c \frac{2+|\lambda|^\gamma}{|\lambda|^{2+2m}}$, *а* $c$, $\gamma$ *- деякі константи, що не залежать від* $\lambda$, $\eta$ .
Даний результат можна застосовувати до теореми про два радіуси для деяких поліаналітичних функцій.
Можна також показати, що при достатньо великих $|\lambda|$ $n_\lambda = 1$. Це дозволяє для константи $c_{\lambda,\eta,k,l}$ отримати наступну оцінку
$|c_{\lambda,\eta,k,l}| \le c|\lambda|^{-b}$, де $b > 0$ не залежить від $\lambda$.

1. Maxwell O. Reade. A theorem of F'edoroff, Duke Math.J., 1948, 18, P. 105–109.

2. Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations. — Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers, 2003.

3. Трофименко О.Д. Узагальнення теореми про середнє для поліаналітичних функцій у випадках кола та круга, Вісник Донецького національного університету, 2009, 1, серія А, С. 28-31.

# Нерівність типу Бернштейна для норм $(\psi;\beta)$-похідних тригонометричних поліномів в узагальнених просторах Лебега

**Чайченко С.О.**
Слов'янський державний педагогічний університет
*stolch@mail.ru*

Нехай $p = p(x)$ — $2\pi$-періодична вимірна і істотно обмежена функція. Через $L^{p(\cdot)}$ позначають простори вимірних $2\pi$-періодичних функцій $f$ таких, що $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^{p(x)}\, dx < \infty$.

Якщо $\operatorname{ess\,inf}\limits_{x} |p(x)| > 1$ і $\bar{p} := \operatorname{ess\,sup}\limits_{x} |p(x)| < \infty$, то $L^{p(\cdot)}$ є банаховими просторами [1] з нормою, яка може бути задана формулою

$$\|f\|_{p(\cdot)} := \inf\left\{\alpha > 0 : \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{f(x)}{\alpha}\right|^{p(x)} dx \le 1\right\}.$$

Позначимо через $\mathcal{P}^{\gamma}$ множину $2\pi$-періодичних показників $p = p(x) > 1,\ \bar{p} < \infty$, які на періоді задовольняють умову Діні-Ліпшиця порядку $\gamma$ :

$$\sup_{x_1,x_2\in[-\pi;\pi]} \big\{|p(x_1) - p(x_2)| : \quad |x_1 - x_2| \le \delta\big\} \left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{\gamma} \le K, \quad 0 < \delta < 1.$$

Нехай $L$ — простір $2\pi$-періодичних сумовних на періоді функцій, $f \in L$ і

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos\ kx + b_k(f)\sin\ kx)$$

— ряд Фур'є функції $f$. Нехай, далі, $\psi(k)$ — довільна функція натурального аргументу і $\beta \in \mathbb{R}$. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\Big(a_k(f)\cos\big(kx + \frac{\beta\pi}{2}\big) + b_k(f)\sin\big(kx + \frac{\beta\pi}{2}\big)\Big)$$

є рядом Фур'є деякої функції з $L$, то цю функцію, наслідуючи О.І. Степанця [2, с. 142 – 143], називають $(\psi;\beta)$-похідною функції $f(\cdot)$ і позначають через $(D^{\psi}_{\beta} f)(\cdot)$.

Функції $\psi(k)$ будемо обирати з множини $\mathfrak{M}^*$, де

$$\mathfrak{M}^* = \big\{\psi(k) :\ \psi(k) - \psi(k+1) \ge 0,\ \lim_{k\to\infty}\psi(k) = 0,\ k \in \mathbb{N}\big\}.$$

**Теорема.** *Нехай $p \in \mathcal{P}^{\gamma}, \gamma \ge 1,\ \beta \in \mathbb{R}$ і $\psi \in \mathfrak{M}^*$. Тоді для довільного тригонометричного поліному $T_n$, порядку не вищого за $n$, виконується нерівність*

$$\|D^{\psi}_{\beta} T_n\|_{p(\cdot)} \le \frac{K_p}{\psi(n)}\|T_n\|_{p(\cdot)}, \tag{1}$$

*де $K_p$ — стала, яка залежить тільки від функції $p = p(x)$.*

Використовуючи нерівність (1), одержуються обернені теореми теорії наближення для $(\psi;\beta)$-диференційовних функцій у метриці просторів $L^{p(\cdot)}$.

1. Шарапудинов И.И. О топологии пространства $L^{p(x)}([0;1])$, Мат. заметки, 1979, 26:4, С. 613–632.

2. Степанец А.И. Методы теории приближений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. — 427 с.

# Продолжение функций с ограниченным средним колебанием

**Р.В. Шанин**

Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова, Украина

*ruslanshanin@gmail.com*

Пусть локально суммируемая функция $f$ задана на нтервале $I_0 \subset \mathbb{R}$. Говорят, что она имеет ограниченное среднее колебание на $I_0$ ($f \in BMO(I_0)$), если

$$\|f\|_{*,I_0} = \sup_{I \subset I_0} \frac{1}{|I|} \int\limits_I |f(x) - f_I| dx < +\infty,$$

где верхняя грань берется по всем ограниченным интервалам $I \subset I_0$, $f_I = |I|^{-1} \int\limits_I f(x)dx$ – среднее значение $f$ на $I$.

Рассматривается задача продолжения функции $f \in BMO(I_0)$ на $\mathbb{R}$ таким образом, чтобы продолженная функция имела ограниченное среднее колебание на $\mathbb{R}$.

Пусть $0 < \gamma \le 1$. Для ограниченного интервала $I_0$ через $I_\gamma = (1+2\gamma)I_0$ обозначим интервал, концентрический с $I_0$ и имеющий длину $|I_\gamma| = (1+2\gamma)|I_0|$. Пусть оператор $T^\gamma : BMO(I_0) \to BMO(\mathbb{R})$. Будем говорить, что $T^\gamma$ удовлетворяет условию $\mathcal{A}$ ($T^\gamma \in \mathcal{A}$), если $T^\gamma f(x) = f_{I_0}$, $x \in \mathbb{R} \setminus I_\gamma$.

**Теорема 1.** *Пусть $0 < \gamma \le 1$, ограниченный интервал $I_0 \subset \mathbb{R}$. Существует оператор $T_0^\gamma \in \mathcal{A}$, такой, что*

1) *для любой $f \in BMO(I_0)$ справедлива оценка*

$$\|T_0^\gamma f\|_{*,\mathbb{R}} \le \left(6 + 6e + \frac{e}{4}\ln\frac{1}{\gamma}\right)\|f\|_{*,I_0};$$

2) *существуют такие $f \in BMO(I_0)$ и $\gamma_0$, что для всех $\gamma < \gamma_0$ справедливо*

$$\|T_0^\gamma f\|_{*,\mathbb{R}} \ge \left(\frac{e}{4}\ln\frac{1}{\gamma} - \frac{e}{4}\right)\|f\|_{*,I_0}.$$

Введем в рассмотрение величину

$$d(\gamma) = \inf_{T^\gamma \in \mathcal{A}} \sup_{f \in BMO(I_0)} \frac{\|T^\gamma f\|_{*,\mathbb{R}}}{\|f\|_{*,I_0}}.$$

Из теоремы 1 следует, что $d(\gamma) \le 6 + 6e + \frac{e}{4}\ln\frac{1}{\gamma}$. Имеет место

**Теорема 2.** *Справедливо равенство*

$$\lim_{\gamma \to 0+} \frac{d(\gamma)}{\ln\frac{1}{\gamma}} = \frac{e}{4}.$$

Таким образом, норма оператора $T_0^\gamma$ при $\gamma \to 0+$ эквивалентна наилучшему продолжению.

# Порядкові оцінки наближень "гріді" апроксимантами класів функцій $\mathcal{F}^\psi_{q,\infty}$ в просторах $L_p(T^d)$

**А.Л. Шидліч**

Інститут математики НАН України, Київ

*andy709@list.ru*

Нехай $R^d$, $d \geq 1$, — $d$-вимірний простір з елементами $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_d)$, і $L_p^d = L_p(T^d)$, $1 \leq p < \infty$, $T^d = \prod\limits_{j=1}^{d}[-\pi,\pi]$, — простір $2\pi$-періодичних за кожною змінною функцій $f(\mathbf{x})$ зі стандартною нормою $||f||_{L_p^d}$. Покладемо $(\mathbf{k},\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^d k_j x_j$ і $\widehat{f}(\mathbf{k}) := (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x})e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})}d\mathbf{x}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$.

Нехай, далі, $\psi = \psi(t)$, $t \geq 0$, — довільна додатна спадна до нуля функція, $0 < q < \infty$ і

$$\mathcal{F}^\psi_{q,\infty} := \left\{ f \in L_1^d \ : \ \sum_{\mathbf{k}\in Z^d} \left| \frac{\widehat{f}(\mathbf{k})}{\psi(||\mathbf{k}||_\infty)} \right|^q \leq 1 \right\},$$

де $\psi(||\mathbf{0}||_\infty) := \psi(1)$, $||\mathbf{k}||_\infty := \max\{|k_1|,\ldots,|k_d|\}$. Для довільної функції $f \in L_1^d$ позначимо через $\{\mathbf{k}(l)\}_{k=1}^\infty$ перестановку чисел $\{\widehat{f}(\mathbf{k})\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ таку, що

$$|\widehat{f}(\mathbf{k}(1))| \geq |\widehat{f}(\mathbf{k}(2))| \geq \ldots. \tag{1}$$

Якщо така перестановка не єдина, то через $\{\mathbf{k}(l)\}_{k=1}^\infty$ позначимо будь-яку з перестановок, яка задовольняє умову (1). Розглядається задача про дослідження для функцій $f \in \mathcal{F}^\psi_{q,\infty}$ поведінки при $n \to \infty$ величин

$$||f - G_n(f)||_{L_p^d} := ||f(\cdot) - \sum_{l=1}^{n} \widehat{f}(\mathbf{k}(l))e^{i(\mathbf{k}(l),\cdot)}||_{L_p^d}, \tag{2}$$

за умови, що $\mathcal{F}^\psi_{q,\infty} \subset L_p^d$. Величини (2) називають наближеннями в просторі $L_p^d$ функції $f$ за допомогою "greedy" апроксимант.

**Теорема.** *Нехай $1 \leq p < \infty$, $0 < q < \infty$, $\psi$ — довільна додатна спадна до нуля функція, для якої $\psi(t)/\psi(2t) \leq K_1$, $t \geq 1$, і яка при $0 < p/(p-1) < q$, крім цього, є опуклою вниз і задовольняє умову*

$$\frac{t|\psi'(t)|}{\psi(t)} \geq K_2 > \begin{cases} d(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}), & 1 < p \leq 2, \\ d(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}), & 2 \leq p < \infty, \end{cases} \quad , \quad \psi'(t) := \psi'(t+).$$

*Тоді*

$$\sup_{f\in\mathcal{F}^\psi_{q,\infty}} ||f - G_n(f)||_{L_p^d} \asymp \begin{cases} \frac{\psi(n^{\frac{1}{d}})}{n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}}, & 1 \leq p \leq 2, \\ \frac{\psi(n^{\frac{1}{d}})}{n^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}-1}}, & 2 \leq p < \infty. \end{cases}$$

Зазначимо, що у випадку, коли $\psi(t) = t^{-r}$, $r > 0$, аналогічні порядкові оцінки для величин $\sup\limits_{f\in\mathcal{F}^\psi_{q,\infty}} ||f - G_n(f)||_{L_p^d}$ були отримані в роботі [1].

Зазначимо також, що при $0 < q \leq p/(p-1)$ умови даної теореми задовольняють, наприклад, функції $\psi(t) = t^{-r}\ln^{\varepsilon}(t+e)$ для всіх $r > 0$ та $\varepsilon \in \mathbb{R}$ і функції $\psi(t) = \ln^{\varepsilon}(t+e)$ для всіх $\varepsilon < 0$. Якщо ж $1 < p/(p-1) < q$, то умови теореми, зокрема, задовольняють функції $\psi(t) = t^{-r}\ln^{\varepsilon}(t+e)$ при всіх $\varepsilon \in \mathbb{R}$ та $r > d(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$, якщо $1 < p \leq 2$, і при всіх $\varepsilon \in \mathbb{R}$ та $r > d(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q})$, якщо $2 < p < \infty$.

1. Temlyakov V.N. Greedy Algorithm and $m$-Term Trigonometric Approximation, Constr. Approx., 1998, 14:4, P. 569–587.

# Наближення функцій з класів Нікольського-Бєсова цілими функціями спеціального вигляду

**С.Я. Янченко**
Інститут математики НАН України, Київ
*Sergiy.Yan@Rambler.ru*

Вивчаються апроксимативні властивості класів $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ функцій багатьох змінних. Дані класи були розглянуті Амановим Т. І. [1], при значенні параметра $\theta = \infty$ вони співпадають з класами Нікольського — $S^r_pH(\mathbb{R}^d)$ [2].

Нехай $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ — простір вимірних функцій $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$ визначених на $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$, зі стандартною скінченною нормою.

Визначимо апроксимативну характеристику, про яку йтиме мова у доповіді.

Розглянемо множину $\mathfrak{M}$, яка складається із скінченної кількості векторів $s = (s_1, \dots, s_d)$ з цілочисловими координатами і множину

$$Q_{2^s} := \left\{\lambda \in \mathbb{R}^d : \ \eta(s_j)2^{s_j-1} \leqslant |\lambda_j| < 2^{s_j}, \quad j = \overline{1,d}\right\}, \text{де } \eta(0) = 0 \ \text{ и } \ \eta(t) = 1, \ t > 0.$$

Для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < q < \infty$, покладемо

$$S^{\mathfrak{M}}(f,x) = \sum_{s \in \mathfrak{M}} \delta^*_s(f,x), \tag{1}$$

де $\delta^*_s(f,x) = \mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}f \cdot \chi_{Q_{2^s}})$, $\mathfrak{F}f$ и $\mathfrak{F}^{-1}f$ — відповідно пряме й обернене перетворення Фур'є функції $f$, а $\chi_{Q_{2^s}}$ — характеристична функція множини $Q_{2^s}$. Рівність (1) визначає цілу функцію $S^{\mathfrak{M}}(f,x)$, яка належить простору $L_q(\mathbb{R}^d)$ [3], носій перетворення Фур'є якої зосереджений на множині $\bigcup_{s\in\mathfrak{M}} Q_{2^s}$.

Для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, розглянемо наступну апроксимативну характеристику

$$e^{\mathfrak{F}}_m(f)_q = \inf_{\mathfrak{M}: mes \bigcup\limits_{s\in\mathfrak{M}} Q_{2^s} \leqslant m} \|f(\cdot) - S^{\mathfrak{M}}(f,\cdot)\|_q,$$

де $mesA$ позначає лебегову міру множини $A$.

Якщо $F \subset L_q(\mathbb{R}^d)$ – деякий клас функцій, то покладемо

$$e^{\mathfrak{F}}_m(F)_q = \sup_{f\in F} e^{\mathfrak{F}}_m(f)_q.$$

Мають місце наступні твердження.

**Теорема 1**. Нехай $1 < p < q < \infty$, $r_1 > 1/p - 1/q$. Тоді для $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ справедливе порядкове співвідношення

$$e^{\mathfrak{F}}_m(S^r_{p,\theta}B)_q \asymp m^{-(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}(\log^{\nu-1} m)^{(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{q} - \frac{1}{\theta})_+},$$

де $a_+ = \max\{a;\ 0\}$.

**Теорема 2**. Нехай $1 < p \leqslant 2$, $r_1 > 0$. Тоді для $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ має місце порядкова оцінка

$$e_m^{\mathfrak{F}}(S^r_{p,\theta}B)_p \asymp m^{-r_1}(\log^{\nu-1} m)^{(r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta})_+}.$$


1. Аманов Т.И. Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{(r)_*}_{p,\theta}B$ $(0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi,\ j = 1,...,n)$, Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1965, 77, С. 5 – 34.

2. Никольский С.М. Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера, Сиб. мат. журн., 1963, 4:6, С. 1342 – 1364.

3. Лизоркин П.И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций, Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1969, 105, С. 89 – 167.


## On an extremal problem in approximation theory


**F.G. Abdullayev**

Mersin University, Turkey

*fabdul@mersin.edu.tr*


Let $\mathbb{C}$ be a complex plane, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ and let $G \subset \mathbb{C}$ be a finite Jordan region with $0 \in G$; $L := \partial G$, $\Omega := \overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{G}$; $w = \varphi(z)$ be the conformal mapping of $G$ onto the disk $B(0, \rho_0) := \{w : |w| < \rho_0\}$ normalized by $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$; where $\rho_0 = \rho_0\,(0, G)$ is a conformal radius of $G$ with respect to 0. For $p > 0$ let $A^1_p(G)$ denote the set of analytic in $G$ functions $f(z)$ normalized by $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ and such that $\|f\|_p := \|f\|_{A^1_p(G)} < \infty$, where $d\sigma_z$ denotes two dimensional Lebesque measure.

Let us consider the extremal problem:

$$\|f\|_p\,,\ f \in A^1_p(G) \to \inf .$$

Well known (see, for exaple, [1, p.435]), that the unique function

$$\varphi_p(z) := \int\limits_0^z [\varphi'(\zeta)]^{\frac{2}{p}}\, d\zeta, \quad z \in G,$$

is the solution of this extremal problem.

Let us denote by $\wp_n$ the class of all polynomials $P_n(z)$, $\deg P_n(z) \leq n$, satisfying the conditions: $P_n(0) = 0$, $P'_n(0) = 1$. For each $p > 0$ we consider the following extremal problem:

$$\left\{\|\varphi_p - P_n\|_p\,,\ P_n \in \wp_n\right\} \to \inf .$$

For any $p > 0$ there exists a polynomial $P^*_{n,p}(z)$ furnishing a minimum to the integral $\|\varphi_p - P_n\|_p$ in the class $\wp_n$, and for $p > 1$ this polynomial are determined uniquely. This unique polynomial we call the $n$-th generalized Bieberbach polynomial for the pair $(G, 0)$ and denote from $\pi_{n,p}(z)$. In case of $p = 2$, $\pi_{n,2}(z)$ coincides with the Bieberbach polynomial for the pair $(G, 0)$.

If $G$ is a Carathéodory region, then $\|\varphi_p - \pi_{n,p}\|_p \to 0$ for $n \to \infty$, and so the sequence $\{\pi_{n,p}(z)\}^\infty_{n=0}$ converges uniformly to $\varphi_p(z)$ on compact subsets of $G$. Our purpose is to extend the uniform convergence of the sequence $\{\pi_{n,p}(z)\}^\infty_{n=0}$ to $\varphi_p(z)$ on $\overline{G}$. Moreover, we will investigate the estimate

$$\|\varphi_p - \pi_{n,p}\|_{C(\overline{G})} := \max\left\{|\varphi_p(z) - \pi_{n,p}(z)|\,,\ z \in \overline{G}\right\} = O(\varepsilon_{n,p}),$$

where $\varepsilon_{n,p} = \varepsilon_{n,p}(G) \to 0,\ n \to \infty$, depending on the geometric properties of $G$.

1. Privalov I.I. Introduction to the theory of functions of a complex variable. — Moscow: Nauka, 1984.

# On the approximation properties of some extremal polynomials in regions of the complex plane

**F.G. Abdullayev, P. Özkartepe**
Mersin University, Turkey
*fabdul@mersin.edu.tr, pelinozkartepe@mersin.edu.tr*

Let $\mathbb{C}$ be a complex plane, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ and let $G \subset \mathbb{C}$ be a finite Jordan region with $0 \in G$; $L := \partial G$, $\Omega := \overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{G}$; $w = \varphi(z)$ be the conformal mapping of $G$ onto the disk $B(0, \rho_0) := \{w : |w| < \rho_0\}$ normalized by $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$.

For $p > 0$ let $A_p^1(G)$ denote the set of analytic in $G$ functions $f(z)$ normalized by $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ and such that

$$\|f\|_p := \|f\|_{A_p^1(G)} := \left( \iint_G |f'(z)|^p \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

where $d\sigma_z$ denotes two dimensional Lebesque measure.

Let us set

$$\varphi_p(z) := \int_0^z [\varphi'(\zeta)]^{\frac{2}{p}} \, d\zeta, \ z \in G,$$

and let $\pi_{n,p}(z)$ be the generalized Bieberbach polynomial of degree $n$ for the pair $(G, 0)$ that minimizes the norm $\|\varphi_p - P_n\|_p$ in the class of all polynomials $P_n(z)$, $\deg P_n \le n$; $P_n(0) = 0$, $P_n'(0) = 1$.

Well known, if $G$ is a Carathéodory region, then $\|\varphi_p - \pi_{n,p}\|_p \to 0$ for $n \to \infty$. Our purpose is investigate the estimate

$$\|\varphi_p - \pi_{n,p}\|_p = O(\varepsilon_{n,p}),$$

where $\varepsilon_{n,p} = \varepsilon_{n,p}(G) \to 0,\ n \to \infty$, depending on the geometric properties of $G$ in case when the region $G$ has a interior and exterior zero angles.

In particular, for the Bieberbach polynomials obtained the best estimate at the rate of convergence to $\varphi$ for these regions.

# Defect-based error analysis of exponential splitting methods

**Winfried Auzinger, Othmar Koch, Mechthild Thalhammer**
Institute for Analysis and Scientific Computing,
Vienna University of Technology, Austria
*w.auzinger@tuwien.ac.at*

In many applications, linear or nonlinear evolution equations appear where the right hand side splits up in two parts,

$$\tfrac{d}{dt}\, u(t) = H(u(t)) = F(u(t)) + G(u(t)), \quad u(t_0) = u_0,$$

where $u : [0,T] \to \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ a Banach space. Splitting approximations are motivated by the fact that separate numerical integration of the individual subproblems associated with $F$ and $G$, respectively, can usually be performed in a much more efficient way than for the full problem at hand. Let $\Phi_H(t;\cdot)$ denote the flow of the full problem, and consider the flows $\Phi_F(t;\cdot)$ and $\Phi_G(t;\cdot)$ of the two subproblems. The simplest splitting methods are the first order Lie-Trotter splitting method and the second order Strang splitting method: One integration step from $t_n$ up to $t_{n+1} = t_n + h$ with stepsize $h$, starting from $u_n$, is given by

$$u_{n+1} = \mathcal{S}(h;u_n) = \Phi_F(h;\Phi_G(h;u_n)) \qquad \text{(Lie-Trotter splitting)},$$

or

$$u_{n+1} = \mathcal{S}(h;u_n) = \Phi_F(\tfrac{h}{2};\Phi_G(h;\Phi_F(\tfrac{h}{2};u_n))) \qquad \text{(Strang splitting)},$$

respectively.

The aim of this contribution is to show how the accuracy of such schemes can be analyzed and also controlled via the *defect* of the splitting approximation, i.e., the residual of the splitting flow with respect to the original evolution equation, which is a computable quantity. We explain the idea in detail for the linear case; the analysis is based on generalized Sylvester equations which are satisfied by the individual subflows.

**Theorem.** *Consider the defect $\mathcal{D}_{n+1}$ of a splitting step $u_n \mapsto u_{n+1}$ with stepsize $h$, i.e.*

$$\mathcal{D}_{n+1} = \tfrac{d}{dt}\, \mathcal{S}(t;u_n)\big|_{t=h} - H(\mathcal{S}(h;u_n)).$$

*Then, under appropriate regularity assumptions,*

$$\tfrac{h}{2}\, \mathcal{D}_{n+1} \qquad \text{or} \qquad \tfrac{h}{3}\, \mathcal{D}_{n+1}$$

*is an asymptotically correct estimate for the local error of a Lie-Trotter or Strang splitting step, respectively. The error of the estimate is asymptotically, for $h \to 0$, of higher order than the local error itself, and it can be characterized in terms of iterated commutators of the operators $F$ and $G$.*

The extension to nonlinear problems and higher-order splitting schemes is also briefly discussed; this subject to current investigations. Numerical results are given for a time-dependent Schrödinger equation with a harmonic potential.

1. W. Auzinger, O. Koch, M. Thalhammer. Defect-based local error estimators for splitting methods, with application to Schrödinger equations. Part I: The linear case, J. Comput. Appl. Math., 2012, 236, P. 2643–2659.

# A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR SECOND ORDER HYPERBOLIC EQUATION IN THE RECTANGLE

**E.I. Azizbekov**
Baku State University, Baku, Azerbaijan
*azel_ azerbaijan@mail.ru*

Consider the equation equation

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = q(t)u(x,t) \tag{1}$$

in the domain $D_T = \{(x,t) : 0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$ and state for it a problem with initial conditions

$$u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), (0 \le x \le 1), \tag{2}$$

and non-local conditions

$$u(0,t) = \beta u(1,t) \quad (0 \le t \le T), \tag{3}$$

$$\int_0^1 u(x,t)dx = 0 \quad (0 \le t \le T). \tag{4}$$

where $\beta \ne \pm 1$ is a given number, $q(t)$, $f(t,x)$, $\phi(x)$, $\psi(x)$ are given functions; a and $u(x,t)$ is the sought function.

Earlier, the boundary value problems for hyperbolic equations with non-local integral conditions were considered in the papers [1-3].

Here, for $\beta = 0$ we have the boundary condition type Ionkin [4].

**Definition.** Under the classic solution of problem (1)-(4) we understand the function $v(x,t)$, continuous in a closed domain $D_T$ together with all its derivatives contained on equation (1), and satisfying all conditions (1)-(4) in the ordinary sense.

Sufficient conditions on the data that allow us to prove the existence and uniqueness of classical solutions of boundary value problem (1) - (4).

For obtain the main results using following lemma.

**Lemma.** *Let* $q(t) \in C[0,T]$, $f(x,t) \in C(D_T)$, $\phi(x), \psi(x) \in C[0,1]$, $\int_0^1 f(x,t)dx = 0$, *and the following agreement conditions be fulfilled:*

$$\begin{aligned} &\phi(0) - \beta\phi(1) = 0, \quad \textstyle\int_0^1 \phi(x)dx = 0, \\ &\psi(0) - \beta\psi(1) = 0, \quad \textstyle\int_0^1 \psi(x)dx = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

*Then the problem on finding the classic solution of problem* (1)-(4) *is equivalent to the problem on defining of the function* $u(x,t)$ *from* (1)-(3) *and*

$$u_x(0,t) = u_x(1,t). \tag{6}$$

1. L. S. Pulkina. Non local problem with integral conditions for a hyperbolic equation, Differential Equations, 2004, 40:7, P. 887–892.

2. A. Bouziani. Solution forte d'un probleme mixte avec conditions non locales pour une classe d'equations hyperboliques, Bulletin de la Classe des Sciences, Academie Royale de Belgique, 1997, 8, P. 53–70.

3. S. A. Beilin. Existence of solutions for one-dimensional wave equations with non-local condition, Electronic Journal of Differential Equations, 2001, 76, P. 1–8.

4. N. I. Ionkin. Solution of a boundary value problem of heat conductivity theory with non-classical boundary conditions, Differential Equations, 1977, 13:2, P. 294–304.

# On the weighted variable spaces $L_{p(x),\,\omega}$ for $0 < p(x) < 1$ and weighted Hardy inequality

**Rovshan A. Bandaliev**
Institute of Mathematics and Mechanics of National Academy of Sciences of Azerbaijan
*bandaliyevr@gmail.com*

Let $R^n$ be the $n$-dimensional Euclidean space of points $x = (x_1, ..., x_n)$ and $\Omega$ be a Lebesgue measurable subset in $R^n$ and $|x| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$. Suppose that $p$ is a Lebesgue measurable function on $\Omega$ such that $0 < \underline{p} \leq p(x) \leq \overline{p} < 1$, $\underline{p} = ess\ \inf_{x\in\Omega} p(x)$, $\overline{p} = ess\ \sup_{x\in\Omega} p(x)$, and $\omega$ is a weight function on $\Omega$, i.e. $\omega$ is non-negative, almost everywhere (a.e.) positive function on $\Omega$. By $L_{p(x),\,\omega}(\Omega)$ we denote the set of measurable functions $f$ on $\Omega$ such that

$$I_{p,\,\omega}(f) = \int\limits_{\Omega} \left(|f(x)|\,\omega(x)\right)^{p(x)}\,dx < \infty.$$

Note that the expression $\|f\|_{L_{p(x),\,\omega}(\Omega)} = \|f\|_{p,\,\omega,\,\Omega} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int\limits_{\Omega}\left(\frac{|f(x)|\,\omega(x)}{\lambda}\right)^{p(x)} dx \leq 1\right\}$ defines a quasi-Banach spaces.

**Lemma.** *Let $0 < \underline{p} \leq p(x) \leq \overline{p} < 1$ and $f, g \in L_{p(x),\,\omega}(\Omega)$. Then*

$$\|f\|_{p,\,\omega,\,\Omega} + \|g\|_{p,\,\omega,\,\Omega} \leq \||f| + |g|\|_{p,\,\omega,\,\Omega} \leq 2^{1/\underline{p}}\left(\|f\|_{p,\,\omega,\,\Omega} + \|g\|_{p,\,\omega,\,\Omega}\right),$$

*where $\underline{p} = ess\ \inf_{x\in\Omega} p(x)$.*

**Theorem 1.** *Let $0 < \underline{p} \leq p(x) \leq \overline{p} < 1$ and $p'(x) = \dfrac{p(x)}{p(x)-1}$ and $\omega$ be a weight function defined on $\Omega$. Then the inequality*

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)\,g(x)|\,dx \geq \left(\frac{1}{\overline{p}} + \frac{1}{\overline{p}'}\right)\|f\|_{p,\omega,\Omega}\,\|g\|_{p',\,\omega^{-1},\,\Omega}$$

*holds for every $f \in L_{p(x),\omega}(\Omega)$ and $g \in L_{p'(x),\omega^{-1}}(\Omega)$.*

We consider the classical Hardy operator defined as $Hf(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)\,dt$, where $f$ is nonnegative function on $(0,\infty)$.

**Theorem 2.** *Let $x \in (0,\infty)$, $0 < \underline{p} \leq p(x) \leq q(x) \leq \overline{q} < 1$, $r(x) = \dfrac{\underline{p}\,p(x)}{p(x)-\underline{p}}$ and $f(x)$ are non-negative and decreasing function defined on $(0,\infty)$. Suppose $\omega_1$ and $\omega_2$ are weight functions defined on $(0,\infty)$. Then for any $f \in L_{p(x),\,\omega_1}(0,\,\infty)$ the inequality*

$$\|Hf\|_{L_{q(\cdot),\,\omega_2}(0,\infty)} \leq \underline{p}^{\frac{1}{\underline{p}}}\,c_{p,q}\,d_p\left\|\frac{t^{1/p'}\,\left\|\frac{\omega_2}{x}\right\|_{L_{q(\cdot)}(t,\infty)}}{\omega_1}\right\|_{L_{r(\cdot)}(0,\infty)}\|f\|_{L_{p(\cdot),\,\omega_1}(0,\infty)},$$

*where* $c_{p,q} = \left(\|\chi_{S_1}\|_{L_\infty(0,\,\infty)} + \|\chi_{S_2}\|_{L_\infty(0,\infty)} + \underline{p}\left(\dfrac{1}{\underline{q}} - \dfrac{1}{\overline{q}}\right)\right)\left(\|\chi_{S_1}\|_{L_\infty(0,\infty)} + \|\chi_{S_2}\|_{L_\infty(0,\infty)}\right)$,

$S_1 = \left\{x \in (0,\infty) :\ p(x) = \underline{p}\right\}$, $S_2 = (0,\infty)\setminus S_1$, *and* $d_p = \left(1 + \dfrac{\overline{p}-\underline{p}}{\overline{p}} + \|\chi_{S_1}\|_{L_\infty(0,\infty)}\right)^{1/\underline{p}}$.

# Existence theorems for analytic in a ball functions of bounded $L$-index in direction

**A.I. Bandura, O.B. Skaskiv**

Ivano-Frankivs'k National Technical University Oil and Gas, Ukraine

L'viv Ivan Franko National University, Ukraine

*andriykopanytsia@gmail.com, skask@km.ru*

Let $F$ be an analytic function in $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < R\}$, $0 < R \le +\infty$. And $L(z)$ is a positive continuous function for $|z| < R$ such that $L(z) > \frac{\beta}{R-|z|}$, $(|z| < R)$, $\beta = \text{const} > 1$.

**Definition** *An analytic in disc function of $F(z)$, $|z| < R$, is called function of bounded $L$-index in the direction of $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, if there exists $m_0 \in \mathbb{Z}_+$, such that for $m \in \mathbb{Z}_+$ and every $z$, $|z| < R$, next inequality is true*

$$\frac{1}{m!L^m(z)}\left|\frac{\partial^m F(z)}{\partial \mathbf{b}^m}\right| \le \max\left\{\frac{1}{k!L^k(z)}\left|\frac{\partial^k F(z)}{\partial \mathbf{b}^k}\right| : 0 \le k \le m_0\right\},$$

*where* $\frac{\partial^0 F(z)}{\partial \mathbf{b}^0} = F(z)$, $\frac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}} = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial F(z)}{\partial z_j} b_j$, $\frac{\partial^k F(z)}{\partial \mathbf{b}^k} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}}\left(\frac{\partial^{k-1} F(z)}{\partial \mathbf{b}^{k-1}}\right), k \ge 2$. *If $L(z) \equiv 1$ then $F(z)$ is called function of bounded index in direction* $\mathbf{b}$.

For one-dimensional case for some time mathematicians were interested two problems — the problem of existence an entire function of bounded $l$-index for a given $l$ and the problem of existence function $l$ for a given entire function $f$ such that $f$ is of bounded $l$-index (see [1]-[4]). It is clear that the same problems can be formulated for analytic in a ball function.

For fixed $z^0 \in \mathbb{D}_R$ we consider function $F(z^0 + t\mathbf{b})$. If $F(z^0 + t\mathbf{b}) \not\equiv 0$, then we denote $p_{\mathbf{b}}(z^0 + a_k^0 \mathbf{b})$ is a multiplicity zero $a_k^0$ of function $F(z^0 + t\mathbf{b})$. If $F(z^0 + t\mathbf{b}) \equiv 0$ for some $z^0 \in \mathbb{C}^n$, then we put $p_{\mathbf{b}}(z^0 + t\mathbf{b}) = 1$.

Our main results is next.

**Theorem 1.** *In order that for analytic in a ball $\mathbb{D}_R$ function $F$, $z \in \mathbb{C}^n$, there exists a positive continuous function $L(z)$ such that $F(z)$ is a function of bounded $L$-index in the direction of* $\mathbf{b}$ *it is necessary and sufficient that all $p_k^0$ were uniformly bounded, i.e. $\exists p \in \mathbb{Z}_+ \ \forall z^0 \in \mathbb{D}_R \ \forall k$ $p_{\mathbf{b}}(z^0 + a_k^0 \mathbf{b}) \le p$.*

1. Bordulyak M. T., Sheremeta M. M. On the existence of entire functions of bounded $l$-index and $l$-regular growth, Ukr. math. journ., 1996, 48:9, P. 1166–1182 (in Russian).

2. Goldberg A. A., Sheremeta M. M. On the existence of an entire transcendental function of bounded $l$-index, Mat. zametki, 1995, 57:1, P. 125–129 (in Russian).

3. Bordulyak M. T. A proof of Sheremeta conjecture concerning entire function of bounded $l$-index, Matem. Studii, 1999, 11:2, P. 108–110.

4. Sheremeta M.M. Remark to existence theorem for entire function of bounded l-index, Matem. Studii, 2000, 13:1, P. 97–99.

# Infinite-dimensional dynamical system approximation of granular flows

**Denis Blackmore**[1,*] **and Anatoliy K. Prykarpatsky**[2,3]

[1] New Jersey Institute of Technology, New Jersey, USA

[2]AGH University of Science and Technology, Krakow, Poland

[3]Ivan Franko State Pedagogical University, Drogobych, Ukraine

*deblac@m.njit.edu, pryk.anat@ua.fm, pryanat@cybergal.com*

We shall briefly describe our recent research on the analysis and applications of the approximate continuum model for particulate flows on manifolds

$$u_t + \nabla_u u = E(x,t) + \int_M \Theta\left(x, y, t, u_{\|x}(y,t) - u(x,t); \mu\right) dy,$$

which was introduced in [1]. Here $\nabla_u$ is the usual covariant derivative (for fixed $t$) on the $m$-dimensional Riemannian manifold $M$, $E$ is the external force, $dy$ is the standard Lebesgue measure based differential associated with integration on $M$, $u_{\|x}$ is the parallel transport of the (velocity) vector $u(y,t)$ along a geodesic from $y$ to $x$ on $M$, and $\mu$ is a parameter vector embodying the physical characteristics of the system. Everything is assumed to be smooth (i.e. $C^\infty$) with the integrand (kernel) having compact support for each fixed $x$. Our focus shall be on the case where $M = \mathbb{R}^m$, as this is where most applications are found, so that the equation assumes the following simpler form:

$$u_t + \nabla_u u = E(x,t) + \int_{\mathbb{R}^m} \Theta\left(x, y, t, u(y,t) - u(x,t); \mu\right) dy,$$

where $\nabla_u u = u \cdot \nabla u = (u \cdot \nabla u_1, \ldots, u \cdot \nabla u_m)$ for any natural number $m$ in $\mathbb{N}$ and $dy$ denotes the standard $m$-dimensional Lebesgue measure.

Two main questions are addressed: (1) What are the dynamics of the above model? (2) How well do the dynamical predictions from the model agree with simulation and experimental results - especially those obtained from granular flows? It is shown in [2] that the model for the 1-dimensional case for perfectly elastic granular flows is integrable, with soliton solutions of the same form seen in simulations, while in [3] it was found that the behavior of a tapped 1-dimensional system is in close agreement with model predictions. Encouraged by these successes, we plan to extend the analysis and applications to higher dimensions.

Another problem of interest is related to vortices that can be generated by the model when the kernel has certain kinds of singularities. We plan to use various techniques, such as those delineated in [4], to investigate these vortical flows - especially in the planar case.

1. D. Blackmore, R. Samulyak and A. Rosato. New mathematical models for for particle flow dynamics, J. Nonlin. Math. Phys., 1999, 6, P. 198–221.

2. D. Blackmore, K. Urban, K. and A. Rosato. Integrability analysis of regular and fractional Blackmore-Samulyak-Rosato fields, Condensed Matter Phys., 2010, 13, 43403: P. 1–7.

3. D. Blackmore, A. Rosato, X. Tricoche, K. Urban and V. Ratnaswamy. Tapping dynamics for a column of particles and beyond, J. Mech. Materials & Structures, 2011, 6, P. 71–86

4. D. Blackmore, A.K. Prykarpatsky and V.Hr. Samoylenko. Nonlinear Dynamical Systems of Mathematical Physics. — Singapore: World Scientific, 2011.

*Research supported in part by NSF Grant CMMI-1029809.

# APPROXIMATION PROPERTIES OF THE FUNCTION $mup_s(x)$

**I.V. Brysina, V.A. Makarichev**

National N.Ye. Zhukovsky aerospace university "Kharkiv aviation institute", Ukraine

*iryna.brysina@gmail.com, victor.makarichev@gmail.com*

Consider the function

$$mup_s(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \cdot F_s(t)dt,$$

where

$$F_s(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{s\cdot t}{(2s)^k}\right)}{s^2 \cdot \frac{t}{(2s)^k} \cdot \sin\frac{t}{(2s)^k}} \text{ and } s = 2, 3, 4, \ldots.$$

The function $mup_s(x)$ is a solution with a compact support of the functional differential equation

$$y'(x) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{s} \left(y(2s\cdot x + 2s - 2k + 1) - y(2s\cdot x - 2k + 1)\right).$$

Let $s = 2^m$, where $m \in \mathbb{N}$. Denote by $\widetilde{MUP}_m$ the space of functions $\varphi(x)$ such that

$$\varphi(x) = \sum_j c_j \cdot mup_{2^m}\left(\frac{x}{\pi} - \frac{j}{2^m}\right),\ x \in [-\pi, \pi]$$

and $\varphi^{(p)}(-\pi) = \varphi^{(p)}(\pi)$ for any $p = 0, 1, 2, \ldots$. Dimension of $\widetilde{MUP}_m$ equals $2^{m+1}$.

Let $\widetilde{W}_2^1$ be a class of functions $f \in C_{[-\pi,\pi]}$ such that $f(-\pi) = f(\pi)$, $f(x)$ is absolutely continuous and $\|f'\|_{L_2[-\pi,\pi]} \leq 1$.

The following result was obtained.

**Theorem 1.** *For any $m \in \mathbb{N}$ it is true that*

$$E_{L_2[-\pi,\pi]}\left(\widetilde{W}_2^1, \widetilde{MUP}_m\right) \leq C \cdot d_{2^m}\left(\widetilde{W}_2^1, L_2[-\pi,\pi]\right),$$

*where*

$$E_X(K, L) = \sup_{\varphi\in K} \inf_{\psi\in L} \|\varphi - \psi\|_X$$

*is the best approximation of the class $K$ by $L$ in norm of $X$ and*

$$d_N(K, X) = \inf_{dim\ L=N} \sup_{\varphi\in K} \inf_{\psi\in L} \|\varphi - \psi\|_X$$

*is the Kolmogorov width.*

# Approximation of subharmonic functions in the unit disc

**Igor Chyzhykov**
Ivan Franko National University of L'viv, Ukraine
*chyzhykov@yahoo.com*

**Theorem.** *Let $u$ be a subharmonic function in $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. There exist an absolute constant $C$ and an analytic function $f$ in $\mathbb{D}$ such that $\int_{\mathbb{D}} |u(z) - \log|f(z)|| \, dm(z) < C$ where $m$ denotes the planar Lebesgue measure.*

We also give some sufficient conditions that provide possibility of such kind of approximation in the uniform metric outside, probably, some exceptional set.

1. Chyzhykov I. Approximation of subharmonic functions in the unit disk, J. math physics, analysis, geometry, 2008, 4:1, P. 211–236.

# On fuzzy approximation space

**Gökhan Çuvalcioğlu**
University of Mersin, Mersin, Turkey
*gcuvalcioglu@mersin.edu.tr*

The combination of the rough set theory, vague set theory and fuzzy set theory is a new research direction.. This paper mainly concerns the problem of how to construct rough approximations of a vague set in fuzzy approximation space and what is the intuitionistic Fuzzy approximation space and its property. Firstly, a new operator and its complement operator are introduced, and some new properties are examined. Secondly, the approximation operators are constructed based on this operator.

Finally, some properties of two types of approximation operators are studied.

1. L.A. Zadeh. Fuzzy sets, Information and Control, 1965, 8, P. 338–356.

2. Z. Pawlak. Rough sets, International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11, P. 341–356.

3. Z. Pawlak. Rough sets and fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 1985, 17, P. 99–102.

4. Y.Y. Yao. Semantics of fuzzy sets in rough set theory, LNCS Transactions on Rough Sets, 2004, 2, P. 310–331.

5. J. Wang, S.Y. Liu, J. Zhang. Roughness of a vague set, International Journal of Computational Cognition, 2005, 3:3, P. 83–87.

6. M. Banerjee, K.P. Sankar. Roughness of a fuzzy set, Information Sciences, 1996, 93, P. 235–246.

7. T. Eswarlal. Roughness of a Boolean vague set, International Journal of Computational Cognition, 2008, 6:1, P. 8–11.

8. K. Atanassov, S. Stoeva. Intuitionistic fuzzy sets, in: Polish Symposium on Interval and Fuzzy Mathematics, 1983, P. 23–26.

9. K. Atanassov, V. Kreinovch. Intuitionsitic fuzzy interpretation of interval dada, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 1999, 5, P. 1–8.

10. K. Atanassov. Remark on the intuitionistic fuzzy logics, Fuzzy Sets and Systems, 1998, 95, P. 127–129.

11. G. Deschrijver, E. Kerre. On the composition of intuitionistic fuzzy relations, Fuzzy Sets and Systems, 2003, 136, P. 333–361.

12. Sh.M. Chen. Measures of similarity between vague sets, Fuzzy Sets and Systems, 1995, 74, P. 217–227.

13. H. Bustince, P. Burillo. Vague sets are intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 1996, 79, P. 403–405.

14. J. Wang, S.Y. Liu, J. Zhang. Roughness of a vague set, International Journal of Computational Cognition, 2005, 3:3, P. 83–87.

15. G.L. Liu. The axiomatic systems of rough fuzzy sets on fuzzy approximation spaces, Chinese Journal of Computers, 2004, 27, P. 1187–1191 (in Chinese).

16. A. Mieszkowicz-Rolka, L. Rolka. Fuzzy rough approximations of process data, International Journal of Approximate Reasoning, 2008, 49, P. 301–315.

## On Degree of Approximation by Fourier Series in Generalized Hölder Metric

**U. Değer**

Mersin University, Turkey

*udeger@mersin.edu.tr*

In this work, we studies the degree of approximation of functions by matrix means of their Fourier series in a new space of functions introduced in [1]. Especially, we extend some results of Leindler [2] to more general $C_\lambda$-method obtained by deleting a set of rows from the Cesáro matrix $C_1$.

1. G. Das, A. Nath and B. K. Ray. An estimate of the rate of convergence of Fourier series in generalized Hölder metric, Analysis and Applications, (Ujjain, 1999), Narosa (New Delhi, 2002), P. 43 – 60.

2. L. Leindler. A relaxed estimate of the degree of approximation by Fourier series in generalized Hölder metric, Analysis Mathematica, 2009, 35, P. 51–60.

## Faster Rate of Convergence on Modified Discrete and Integral Operators

**Naokant Deo**

Delhi Technological University, Delhi, India

*dr_naokant_deo@yahoo.com*

In this contribution we consider modified discrete [1] operators and we are able to achieve faster convergence for our modified operators over the original operators. Our results include some approximation properties, which include rate of convergence and Voronovskaya kind results. In the last section we discuss about integral [2] operators.

1. Balázs K. Approximation by Bernstein type rational functions, Acta Math. Acad. Sci. Hungar, 1975, 26:1, P. 123–134.

2. Lupaş A. Die Folge der Beta operatorem, Dissertation, Universität Stuttgart, 1972.

## The correspondence between the formal multiple power series and multidimensional $g$-fraction with independent variables

**Roman Dmytryshyn**

Vasyl Stefanyk PreCarpathian National University, Ukraine

*dmytryshynr@hotmail.com*

One of the methods of expanding the functions of multiple variables, given by the formal multiple power series, into a branched continued fractions is the construction of corresponding branched continued fractions [1].

The correspondence between the multidimensional $g$-fraction with independent variables

$$\cfrac{s_0}{1+\sum\limits_{i_1=1}^{N}\cfrac{g_{i(1)}z_{i_1}}{1+\sum\limits_{i_2=1}^{i_1}\cfrac{g_{i(2)}(1-g_{i(1)})z_{i_2}}{1+\sum\limits_{i_3=1}^{i_2}\cfrac{g_{i(3)}(1-g_{i(2)})z_{i_3}}{1+\ddots}}}}, \tag{1}$$

where $s_0>0$, $i(k)=i_1,i_2,\ldots,i_k$ is multiindex, $0<g_{i(k)}<1$, $k\geq 1$, $1\leq i_n\leq i_{n-1}$, $1\leq n\leq k$, $i_0=N$, $N\in\mathbb{N}$, $g_{i(0)}=0$, $\mathbf{z}=(z_1,z_2,\ldots,z_N)\in\mathbb{C}^N$, and formal multiple power series

$$\sum_{|m(N)|\geq 0}(-1)^{|m(N)|}s_{m(N)}\mathbf{z}^{m(N)}, \tag{2}$$

where $m(N)=m_1,m_2\ldots,m_N$ is multiindex, $m_i\in\mathbb{Z}_+$, $0\leq i\leq N$, $|m(N)|=m_1+m_2+\cdots+m_N$, $\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N$, $\mathbf{z}^{m(N)}=z_1^{m_1}\cdot z_1^{m_1}\cdot\ldots\cdot z_N^{m_N}$, $s_{m(N)}\in\mathbb{R}$, moreover $s_{0(N)}=s_{0,0,\ldots,0}=s_0$, means that the expansion of each $n$th approximant, $n\geq 1$, into the formal multiple power series coincides with the given series for all homogeneous polynomials to the degree $n-1$ inclusively.

We study the correspondence between the formal multiple power series (2) and the multidimensional $g$-fraction with independent variables (1). As a result the algorithm for the expansion of the formal multiple power series (2) into the corresponding multidimensional $g$-fraction with independent variables (1) has been constructed and the conditions of existence of such an algorithm have been established. The expansion of some functions into corresponding multidimensional $g$-fraction with independent variables (1) is constructed and efficiency of approaching by approximants of the obtained expansion is shown.

1. Bodnar D.I. Branched continued fractions. — Kiev: Naukova Dumka, 1986 (in Russian).

## On the best approximation from below by isotone subadditive functions

**O. Dovgoshey and E. Petrov**

Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NASU, Donetsk, Ukraine

*aleksdov@mail.ru, eugeniy.petrov@gmail.com*

Let $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$. For given $\bar{a}=(a_1,\ldots,a_n)$ and $\bar{b}=(b_1,\ldots,b_n)$ from $\mathbb{R}_+^n$ we shall write $\bar{a}\leqslant\bar{b}$ if and only if $a_i\leqslant b_i$ for every $i\in\{1,\ldots,n\}$. Recall that a function $\Phi:\mathbb{R}_+^n\to\mathbb{R}_+$ is *isotone* if $\Phi(\bar{x})\leqslant\Phi(\bar{y})$ whenever $\bar{x}\leqslant\bar{y}$, moreover $\Phi$ is *subadditive* if $\Phi(\bar{x}+\bar{y})\leqslant\Phi(\bar{x})+\Phi(\bar{y})$ for all $\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}_+^n$.

**Theorem 1** ([1])**.** *Let $A$ be a nonempty subset of $\mathbb{R}_+^n$. The following conditions are equivalent for every function $\Phi:A\to\mathbb{R}_+$.*

*(i) There is an isotone and subadditive function $\Psi:\mathbb{R}_+^n\to\mathbb{R}_+$ such that $\Psi|_A=\Phi$.*

*(ii) The implication*

$$(\bar{x}\leqslant\sum_{i=1}^{m}\bar{x}^i)\Rightarrow(\Phi(\bar{x})\leqslant\sum_{i=1}^{m}\Phi(\bar{x}^i))$$

*holds for all $\bar{x}$, $\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^m\in A$ and every positive integer $m$.*

For given $A \subseteq \mathbb{R}^n_+$ and $\bar{x} \in \mathbb{R}^n_+$ define the subset $\mathbf{S}(\bar{x}) = \mathbf{S}(\bar{x}, A)$ of the set $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A^k$, where $A^1 = A$, $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$ and so on, by the rule: an element $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^k)$ of the set $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A^k$ belongs to $\mathbf{S}(\bar{x})$ if and only if $\bar{x} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} \bar{x}^i$.

**Theorem 2**([1]). *Let $A$ be a nonempty subset of $\mathbb{R}^n_+$ such that for every $j \in \{1, \dots, n\}$ there is $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A$ satisfying the inequality $a_j > 0$. Then, for every $\Phi : A \to \mathbb{R}_+$, the function*

$$\Psi(\bar{x}) := \inf\{\sum_{i=1}^{m} \Phi(\bar{x}^i) : (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^m) \in \boldsymbol{S}(\bar{x})\}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n_+$$

*has the following properties.*

*(i) $\Psi$ is isotone and subadditive.*

*(ii) The inequality $\Phi(\bar{x}) \geqslant \Psi(\bar{x})$ holds for every $\bar{x} \in A$.*

*(iii) The function $\Psi$ is a continuation of $\Phi$, $\Psi|_A = \Phi$, if and only if condition (ii) from Theorem 1 is fulfilled.*

*(iv) If $F : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ is isotone subadditive function such that the inequality $\Phi(\bar{x}) \geqslant F(\bar{x})$ holds for every $\bar{x} \in A$, then the inequality $\Psi(\bar{x}) \geqslant F(\bar{x})$ also holds for every $\bar{x} \in \mathbb{R}^n_+$.*

Theorem 1 gives us an intrinsic description of functions $\Phi : A \to \mathbb{R}_+$ which have isotone subadditive continuations on $\mathbb{R}^n_+$. The function $\Psi$ defined in Theorem 2 is the largest subadditive isotone minorant of the given $\Phi : A \to \mathbb{R}_+$. For the case $A = \mathbb{R}^n_+$, the function $\Psi$ is closely related to the infimal convolution and has some similar properties [2].

1. O. Dovgoshey, E. Petrov and G. Kozub. Metric products and continuation of isotone functions, (in preparation).

2. Thomas Strömberg. The operation of infimal convolution, Dissertations Math. (Rozprawy Mat.), 1996. — 58 p.

## Functional inequalities in functional analysis

**Włodzimierz Fechner**
University of Silesia, Katowice, Poland
*fechner@math.us.edu.pl; wlodzimierz.fechner@us.edu.pl*

Alfred Tarski in 1930 posed as a question (or an exercise) and then proved the following identity for real numbers $x, y$ (see ref. no. 8.):

$$\big|\,|x| - |y|\,\big| = |x + y| + |x - y| - |x| - |y|. \tag{1}$$

More recently, Lech Maligranda (see ref. no 6. and 7.) presented the following multi-dimensional analogue of the identity of Tarski:

$$\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \leq \|x + y\| + \|x - y\| - \|x\| - \|y\| \leq \min\{\|x + y\|, \|x - y\|\} \tag{2}$$

for any elements $x, y$ from an arbitrary normed space.

The purpose of the talk is to present a few results in functional equations and inequalities which are motivated by foregoing inequalities. We will discuss the following problems:

**A)** functional inequality (see ref. no 2.):

$$|f(x) - f(y)| \leq f(x+y) + f(x-y) - f(x) - f(y) \leq \min\{f(x+y), f(x-y)\}; \qquad (3)$$

**B)** functional equation (see ref. no 2.):

$$|f(x) - f(y)| = f(x+y) + f(x-y) - f(x) - f(y); \qquad (4)$$

**C)** stability of functional equation (4) (see ref. no 2.):

$$\big\| \, |f(x) - f(y)| - [f(x+y) + f(x-y) - f(x) - f(y)] \, \big\| \leq \varepsilon; \qquad (5)$$

**D)** composite functional equation (see ref. no 1. and 5.):

$$f(f(x) - f(y)) = f(x+y) + f(x-y) - f(x) - f(y); \qquad (6)$$

**E)** stability of composite functional equation (6) (see ref. no 4.):

$$\big\| f(f(x) - f(y)) - [f(x+y) + f(x-y) - f(x) - f(y)] \big\| \leq \varepsilon;$$

**F)** composite functional inequalities (see ref. no 3.):

$$f(f(x) - f(y)) \leq f(x+y) + f(f(x-y)) - f(x) - f(y);$$

$$f(f(x) - f(y)) \leq f(f(x+y)) + f(x-y) - f(x) - f(y);$$

$$f(f(x) - f(y)) \leq f(f(x+y)) + f(f(x-y)) - f(f(x)) - f(y).$$


1. W. Fechner. On a composite functional equation on Abelian groups, Aequationes Math., 2009, 78, P. 185–193.

2. W. Fechner. Functional characterization of a sharpening of the triangle inequality, Math. Inequal. Appl., 2010, 13:3, P. 571–578.

3. W. Fechner. On some composite functional inequalities, Aequationes Math., 2010, 79:3, P. 307–314.

4. W. Fechner. Stability of a composite functional equation related to idempotent mappings, J. Approx. Theory, 2011, 163, P. 328–335.

5. T. Kochanek. On a composite functional equation fulfilled by modulus of an additive function, Aequationes Math., 2010, 80:1, P. 155–172.

6. L. Maligranda. Simple norm inequalities, Amer. Math. Monthly, 2006, 113, P. 256–260.

7. L. Maligranda. Some remarks of the triangle inequality for norms, Banach J. Math. Anal., 2008, 2:2, P. 31–41.

8. A. Tarski. Problem no. 83, Parametr 1/6 (1930), 231; Solution: Młody Matematyk 1/1 (1931), 90 (in Polish).

# Regulated Functions with Values in $C(H,\mathbb{C})$: approximation by step functions.

**L. A. O. Fernandes and R. Arbach**
State University of Sro Paulo, UNESP-Ilha Solteira, BRAZIL
*lafo@mat.feis.unesp.br,roseli@mat.feis.unesp.br*

We use that every regulated function $f:[a,b]\to A$ is an uniform limit of a sequence of step functions to construct an aproximation for integral functionals (in Dushnik sense), when $A$ is a Banach algebra. This is a consequence of the Theorem below.

If $x, y \in A$ and $c, d \in [a,b]$, we will denote by $f_d^x$ and $g_c^y(t)$ the "jump "functions

$$f_d^x(t) = [\mathcal{X}_{[a,d[}x](t) = \begin{cases} x\ , t\in [a,d[\ , \\ \\ 0\ , t\in [d,b]\ , \end{cases} \qquad g_c^y(t) = [\mathcal{X}_{]c,b]}y](t) = \begin{cases} 0\ , t\in [a,c]\ , \\ \\ y\ , t\in ]c,b]\ . \end{cases}$$

We consider two Banach algebras $A$ and $B$, with multiplications $\times_{A}$ and $\times_{B}$, respectivaly, and denote by $\mathcal{L}(A,B)$ the Banach algebra of linear operators between $A$ and $B$.

**Theorem.** *Let $f_d^x, g_c^y : [a,b]\to A$ be two jump functions, as above, $c, d\in[a,b]$, $c<d$, and $x, y\in A$. Consider a bounded semivariation function $\alpha:[a,b]\to\mathcal{L}(A,B)$. Then*

$$\int_a^b \cdot\, d\,\alpha(t)\cdot[f_d^x \times_B g_c^y](t) = [\alpha(d)-\alpha(c)]\cdot[x\times_A y]\ .$$

The hypothesis about the family of linear operators $\alpha$ is sufficient to garantee the existence of the Dushnik integral in the formula above (see the reference [6]). For examples we consider the Banach algebras $C(H,\mathbb{C})$, of all complex continuous functions, and $G([a,b], C(H,\mathbb{C}))$, of all regulated functions $f:[a,b]\to C(H,\mathbb{C})$. The functionals considered then are defined on $G([a,b], C(H,\mathbb{C}))$.

1. J. Dieudonnй. Foundations of Modern Analysis. — Academic Press, 1969.
2. R. G. Douglas. Banach Algebra Techniques in Operator Theory. — Springer, 1998.
3. L. A. O. Fernandes and R. Arbach. Regulated Functions with values in the Banach Algebra of Quaternions, ICAEM, World Congress on Engineering (WCE), 2011, 1, P. 196-201.
4. L. A. O. Fernandes and R. Arbach. Integral Functionals on the Space of Regulated Functions with values in Banach Algebras, 8TH International Conference on Functions Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis, FSDONA 2011, Tabarz/Thuringia, Germany, 2011.
5. D. Frankovб. Regulated Functions, Mathematica Bohemica, 1991, 116:1, P. 20-59.
6. C. S. Hцnig. Volterra-Stieltjes Integral Equations. Math. Studies 16, North Holland Publ. Company, 1975.
7. C. Goffman, G. Moran and D. Waterman. The Structure of Regulated Functions, Proceedings of the American Mathematical Society, 1976, 57:1, P. 61-65.
8. W. Rudin. Functional Analysis: second edition. — McGraw-Hill, 1991.

# Bounds on the range of multivariate rational functions by Bernstein expansion with applications

**Jürgen Garloff, Andrew P. Smith**
Faculty of Computer Science, University of Applied Sciences (HTWG) Konstanz
*garloff@htwg-konstanz.de*

Bernstein polynomials are often used for the approximation of multivariate polynomials. The expansion of a given $n$-variate polynomial $p$ into Bernstein polynomials can also be used to tightly bound the range of $p$ over an $n$-dimensional box, see [1, 4]. The interval spanned by the minimum and the maximum of the coefficients of this expansion encloses the range. A disadvantage of this approach is that the number of the coefficients to be computed explicitly grows exponentially with the number of variables $n$. In [3] a method was presented by which the number of coefficients which are needed for the enclosure is only approximately linear in the number of the terms of the polynomial.

The talk addresses the question of the way in which the tight bounds on the range of a polynomial can be employed to construct bounds on the range of the ratio of two multivariate polynomials. The naive method of bounding the ranges of the two polynomials independently and dividing the two resulting intervals neglects the dependency between the variables of the polynomials and may result in gross overestimation of the range.

In our talk, a linearisation technique is presented which leads to much tighter enclosures for the ranges of rational functions.

In the second part of our talk, we apply these bounds to the enclosure of the solution set of a parametric system of linear equations. This is a system of linear equations where the coefficients of the matrix and the right hand side depend on parameters which vary within given intervals. We employ a parametric residual iteration based on interval arithmetic [2] which requires bounding the range of a multivariate rational function over a box. Applications to the verified solution of some simple finite element models for truss structures are also presented.

1. J. Garloff. Convergent bounds for the range of multivariate polynomials, in K. Nickel, ed., Interval Mathematics 1985, Lecture Notes in Computer Science vol. 212, 37–56. - Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1986.

2. J. Garloff, E. D, Popova, and A. P. Smith. Solving linear systems with polynomial parameter dependency with application to the verified solution of problems in structural mechanics, in A. Chinchuluun, P. M. Pardalos, R. Enkhbat, and E. N. Pistikopoulos, eds., Proceedings of the International Conference on Optimization, Simulation and Control, Ulaanbaatar, Mongolia (2010), Series Springer Optimization and Its Applications, Springer-Verlag, to appear.

3. A. P. Smith. Fast construction of constant bound functions for sparse polynomials, J. Global Optimization, 2009, 43 (2–3), P. 445–458.

4. M. Zettler and J. Garloff. Robustness analysis of polynomials with polynomial parameter dependency using Bernstein expansion, IEEE Trans. Automat. Contr., 1998, 43, P. 425–431.

# On the Convergence and Summability of Multiple Fourier series of Functions of Bounded Partial Generalized Variation

**Ushangi Goginava**
Tbilisi State University, Georgia
*zazagoginava@gmail.com*

The convergence and summability by Cesáro method of multiple Fourier series of functions of bounded partial $\Lambda$ -variation is investigated. The sufficient and neccessary conditions on the sequence $\Lambda = \{\lambda_n\}$ found for the convergence of partial sums and Cesáro means of Fourier series of functions of bounded partial $\Lambda$ -variation. We introduce a new concept of $\Lambda$ -variation of bivariate functions and investgate its connection with the convergence of double Fourier series.

## On Lomonosov Spaces

**Omer Gok**
Yildiz Technical University, Istanbul, Turkey
*gok@yildiz.edu.tr*

Let $A \subset C(K, X)$ be a subset of the space $C(K, X)$ of continuos functions from a topological space $K$ to a locally convex space $X$.The convex subset $L(A) \subset C(K, X)$,defined by
$L(A) = \{\sum_{k=1}^{n} a_k T_k : T_k \in A, a_k \in C(K, X) and \sum_{k=1}^{n} a_k = 1; n < \infty\}$ is called the Lomonosov space associated with the set A, and a function $\gamma \in L(A)$ is called a Lomonosov function.

The set $S = \{x' \in X' : \|x'\| \leq 1\}$ denotes the unit ball in the dual space $X'$ equipped with its $weak^*$ toplology.

In this talk we give a characterization of transitivity for the algebra $m(C(K))$ in terms of the Lomonosov space $L((m(C(K)))^*)$ with respect to the uniform topology induced on $C(S, X')$ by the $weak^*$ topology on the dual Banach space $X'$.

1. Abramovich Y.A., Arenson E.L., Kitover A.K. Banach C(K)-Modules and Operator Preserving Disjointness, 277. — J.Wiley, Essex, 1992.

2. Simonic A. A construction of Lomonosov functions and applications to the invariant subspace problem, Pasific J.Math., 1990, 175, P. 257-270.

## Trigonometric series and correlation between continuous and discrete in natural sciences

**M.L. Gorbachuk and V.I. Gorbachuk**
Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine
*imath@horbach.kiev.ua*

As is well-known, trigonometric series, which emerged in 17th centure, have played especially important role in the further development of mathematics. It suffices to recall that the problem of trigonometric-series expansions of functions has stimulated appearing a number of basis notions of mathematical analysis, such, for example, as function, generalized function, convergence, summability of a series, integral, variation etc, and led to finding one of the fundamental methods for solution of problems of mathematical physics, namely,the separation of variables method.

However, since antiquity, the development of natural, in particular, mathematical sciences was being realized under the influence of two opposite, but sometimes interconnected tendencies. Their essence may be characterized by the words continues and discrete. The theory of trigonometric series, created under impact of contradiction between these notions, established their one-to-one correspondence with each other, and made it possible to give for various physical processes both continuous and discrete interpretation simulteneously.

In the talk, the attention is focussed on the following topics connected with relationship between continuity and discreteness in the different historical periods:

- the discussions among Hellenic mathematicians (Pythagorean school's views, Zeno papadoxes, Democrite geometric atom, Eudox ratio theory, Archimedes' view points on the possibility of co-existence of continuous and discrete);

- the wave and corpuscular light theory and power series (Huygens, Newton);
- the waves superposition principle and trigonometric series (discussion by d'Alembert, Euler, and D. Bernoulli);
- the heat theory and representation of a function in the form of trigonometric series (Lagrange, Fourier, Poisson, Ostrogradskii, Dirichlet, Riemann, Du Bois-Reymond, Fejér, Luzin);
- wave and matrix quantum mechanics and Riesz-Fisher theorem;
- generalized functions and trigonometric series.

The especial attention is given to the subjects of the latter item.

## On approximation of solutions of the Cauchy problem for parabolic differential equations in a Banach space

**V.M. Gorbachuk**
National Technical University of Ukraine "KPI Kyiv, Ukraine
*volod@horbach.kiev.ua*

Let $A$ be a closed linear operator with dense domain $\mathcal{D}(A)$ in a Banach space $\mathfrak{B}$. Denote by $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$ the space of entire vectors of exponential type for the operator $A$:

$$\mathfrak{G}_{\{0\}}(A) = \{x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(A^n) \big| \exists\alpha > 0, \exists c = c(x) > 0, \forall k \in \mathbb{N} : \|A^k x\| \le c\alpha^k\}.$$

Consider the Cauchy problem

$$y'(t) = Ay(t), \quad t \in (0, \infty), \tag{1}$$

$$y(0) = x, \quad x \in \mathfrak{B}. \tag{2}$$

If the operator $A$ is bounded, then $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A) = \mathfrak{B}$, and the solution of problem (1)-(2) is represented in the form

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k x}{k!}. \tag{3}$$

Moreover, series (3) converges uniformly on each compact set $K \subset \mathbb{C}$, and the following estimate holds:

$$\left\| y(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k x}{k!} \right\| \le c_1 \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \alpha^{n+1}, \quad \alpha \le \|A\|, \ 0 < c_1 = const. \tag{4}$$

If $A$ is unbouded, then series (3) may, generally, be nonconvergent for any $x \in \mathfrak{B}, x \ne 0$, even in the case where problem (1)-(2) is uniformly correct. But for $x \in \mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$, this series converges and estimate (4) is fulfilled.

We show that the condition $\overline{\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)} = \mathfrak{B}$ and correctness of problem (1)-(2) imply that every solution $y(t)$ of (1)-(2) admits the approximation by polynomials $P_n(t)$ of the form

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_{kn} t^k, \quad c_{kn} = \frac{A^k x_n}{k!},$$

where $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A) \ni x_n \to x$ in $\mathfrak{B}$ as $n \to \infty$, and give an estimate for the approximation error by means of both the error of approximation of $x$ by entire vectors $x_n$ of exponential type for the operator $A$ and estimate (4) for the solutions $y_n(t)$ of (1)-(2) with $x = x_n$. Observe that such approximation may be used in the case where $A$ is the generating operator of an analytic semigroup of linear operators with angle $\theta = \frac{\pi}{2}$, whose resolvent $R_\lambda(A)$ satisfies the condition

$$\int_0^1 \ln\ln M(s)\, ds < \infty, \quad M(s) = \sup_{\lambda : \Im\lambda \geq s} \|R_\lambda(A)\|,$$

when approaching to the real axis. The latter takes place if, for example, $A$ is an upper semi-bounded selfadjoint operator on a Hilbert space.

The method proposed above is applicable to the construction of approximate solutions of the Cauchy problem for certain classes of systems of parabolic partial differential equations. Note also that the similar results are valid for solutions of the Dirichlet problem for an abstract elliptic equation in a Banach space.

## Riesz potentials on commutative hypergroups

**Mubariz G. Hajibayov**
National Aviation Academy, Baku, Azerbaijan,
Institute of Mathematics and Mechanics, Baku, Azerbaijan
*hajibayovm@yahoo.com*

Let $(K, *)$ a commutative hypergroup (see [1 ], [2]). It is well known that every commutative hypergroup $K$ possesses a Haar measure which will be denoted by $\lambda$. That is, for every Borel measurable function $f$ on $K$,

$$\int_K f(\delta_x * \delta_y) d\lambda(y) = \int_K f(y) d\lambda(y) \;\; (x \in K),$$

where $\delta_z$ is a point measure on $K$. Define the generalized translation operators $T^x$, $x \in K$, by

$$T^x f(y) = \int_K f d(\delta_x * \delta_y)$$

for all $y \in K$. If $K$ is a commutative hypergroup, then $T^x f(y) = T^y f(x)$ and the convolution of two functions is defined by

$$(f * \varphi)(x) = \int_K T^x f(y) \varphi(y^\sim) d\lambda(y),$$

where $y^\sim$ is a involution of $y \in K$ For $1 < p < \infty$, the Lebesgue space $L^p(K, \lambda)$ is defined as

$$L^p(K, \lambda) = \{f : f \,\text{is}\, \lambda\text{-measurable on}\, K, \|f\|_p = \left( \int_K |f(x)|^p \, d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

Let $\rho(x, y)$ be a quasi-metric on $K$ and $e$ be an identity element of hypergroup $K$. Define a ball $B(e, r) = \{y \in K : \rho(e, y) < r\}$ with a center $e$ and a radius $r$. Let

$$\lambda B(e, r) = A r^N, \tag{1}$$

where $A$ is a positive constant.

For $0<\alpha<N$, define the Riesz potential

$$I_\alpha f(x)=\left(\rho(e,\cdot)^{\alpha-N}*f\right)(x),$$

on commutative hypergroup $(K,*)$.

**Theorem.** *Let $(K,*)$ be a commutative hypergroup, with quasi-metric $\rho$ and Haar measure $\lambda$ satisfying (1). Assume that $1<p<\infty$, $0<\alpha<\frac{N}{p}$. If $f\in L^p(K,\lambda)$, then $I_\alpha f\in L^q(K,\lambda)$ and*

$$\|I_\alpha f\|_q\le C\|f\|_p,$$

*where* $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}$ *and* $C=\frac{3pq}{p-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\frac{N}{\alpha}A^{\frac{N-\alpha}{N}}$.


1. W. R. Bloom and H. Heyer. Harmonic analysis of probability measures on hypergroups. — Berlin: de Gruyter Stud. Math., vol. 20, Walter de Gruyter & Co., 1995.

2. R. L. Jewett. Spaces with an abstract convolution of measures, Adv. in Math., 1975, 18:1, P. 1 – 101.


## Logarithms of entire functions form nowhere dense set in the space of plurisubharmonic functions


**Markiyan Hirnyk**

Lviv Academy of Commerce, Lviv, Ukraine

*hirnyk@yandex.ua*


We need a few definitions to formulate our result. A sequence of plurisubharmonic functions $u_n$ is said to converge exponentially and uniformly on compacts to the function $u$ if $\exp u_n$ converges to $\exp u$ uniformly on compacts. One can prove that the limit function $u$ is plurisubharmonic too. As far as we know it, we introduce this convergence in the first time. The topology in the space of all the plurisubharmonic functions $PSH$, induced by exponential convergence, is also generated by the following metrics. Let $C_j$ be an exhausting sequence of compacts, i. e. $\forall j(C_j\subset C_{j+1})$, $\cup_{j=1}^{\infty}C_j=\mathbb{C}^p$. We put $d_j(u,v):=\sup\{|\exp u(z)-\exp v(z)|:\ z\in C_j\}$. Then the metrics on $PSH$ is defined by

$$d(u,v):=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^{-j}d_j(u,v)}{1+d_j(u,v)}. \qquad (1)$$

Our principal result is as follows.

**Theorem.** *The set of the logarithms of the moduli of entire functions* $\log|E|$ *is nowhere dense in $PSH$ with metrics (1).*

# On Convergence of Nörlund Branched Continued Fraction on Polydisc

**Natalya Hoyenko, Lesya Manzij, Volodymyr Hladun**
Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
National University "Lvivska Politechnika", Lviv, Ukraine
*hoyenko@gmail.com, lesly@ukr.net, v_hladun@yahoo.com*

Let

$$v_0(\mathbf{z}) + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathbf{D}}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{u_{i(k)}(\mathbf{z})}{v_{i(k)}(\mathbf{z})}$$

be the Nörlund branched continued fraction with coefficients

$$u_{i(k)}(\mathbf{z}) = \frac{(a+k)(b_{i_k}+p_{i(k)})}{(c+k-1)(c+k)} z_{i_k}(1-z_{i_k}), \quad k=1,2,\ldots,$$

$$v_{i(k)}(\mathbf{z}) = 1 - \frac{a+k}{c+k} z_{i_k} - \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j + p_{i(k)j}}{c+k} z_j, \quad k=0,1,2,\ldots,$$

where $a, b_1, \ldots, b_N, c$ are complex numbers ($c \neq 0, -1, -2, \ldots$), $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$, $i(n) \in \mathfrak{I} = \{i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k : i_s = \overline{1,N}, s = \overline{1,k}, k \in \mathbb{N}\}$, $i(0) = 0$, $z_{i_0} = z_1$, $p_{i(k)} = \sum_{l=1}^{k-1} \delta_{i_j}^{i_k} + \delta_{i_k}^{1}$, $i = \overline{1,N}$, and $\delta_i^j$ is the Kronecker symbol.

Using the correspondence of the Nörlund branched continued fraction to the formal multiple power series [1] and convergence remains of the Nörlund branched continued fraction, we proved the uniformly convergence of the Nörlund branched continued fraction on a polidysc for arbitrary complex parameters of the Lauricella functions [2].

**Theorem.** *Let $a, b_1, \ldots, b_n, c$ are complex numbers ($c \neq 0, -1, -2, \ldots$), then the Nörlund branched continued fraction*

$$\left( v_0(\mathbf{z}) + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathbf{D}}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{u_{i(k)}(\mathbf{z})}{v_{i(k)}(\mathbf{z})} \right)^{-1}$$

*converges uniformly on every compact subset of the polydisc*

$$G := \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |z_j| < 1/8, j = \overline{1,N} \right\}$$

*to the ratio of the Lauricella hypergeometric functions*

$$\frac{F_D^{(N)}(a+1, b_1+1, b_2, \ldots, b_N; c+1; \mathbf{z})}{F_D^{(N)}(a, b_1, b_2, \ldots, b_N; c; \mathbf{z})}.$$

1. Jones W. B., Thron W. J. Continued fractions: analytic theory and applications. – London, Amsterdam, Don Mills, Ontario, Sydney, Tokyo, 1980.

2. Exton H. Multiple hypergeometric functions and applications. – New York–Sydney–Toronto, Chichester, Ellis Horwood, 1976.

# Copositive Approximation By Elements of Finite Dimensional Chebyshev Subspaces of $C(Q)$

**Aref Kazem Kamal**
Dept Of Math & Stat., S. Q. University, Oman
*akamal@squ.edu.om*

If M is a subspace of $C(Q)$, $f \in C(Q)$ and $g \in M$, then $g$ is said to be "*copositive*" with $f$ on $Q$ if $f(x)g(x) \geq 0$ for all $x \in Q$. The element $g_0 \in M$ is called a "*best copositive approximation*" for $f$ from $M$ if $g_0$ is copositive with $f$ on $Q$ and; $||f - g_0|| = inf\{||f - g||;$ $g \in M$, and $g$ is copositive with $f$ on $Q\}$. If $Q$ is a compact subset of real numbers then the n-dimensional subspace $M$ of $C(Q)$ is called a "*Chebyshev subspace of* $C(Q)$" if each $g \neq 0$ in $M$ has at most $n-1$ zeros. If each $g \in M$ has no more than $n-1$ changes of sign then the $n$-dimensional Chebyshev subspace $M$ is called a "Strong Chebyshev subspace".

In this talk the author writes a simple characterization for the best copositive approximation for elements of $C(Q)$ by elements of finite dimensional Strong Chebyshev subspaces $M$ of $C(Q)$. The results are given when $Q$ is any compact subset of real numbers. He will also show that this best copositive approximation is unique. At the end of the talk the author applies this result for different types of $Q$.

# Solution to time dependent wave propagation in an unbounded medium using a numerical Laplace transform and potential theory

**Korey Kilburn**
Edinboro University of Pennsylvania, USA
*kkilburn@edinboro.edu*

This talk presents the development of a semi-analytic technique developed for the determination of far field acoustic radiation in the time domain. This method solves linear, time dependent wave propagation in an unbounded medium using a numerical Laplace transform and potential theory. The end result is a robust procedure that is accurate and computationally efficient. The Transform Potential Theoretic (TPT) method is mesh-less and can handle arbitrary geometries. The procedure assumes the linearity of the sound field away from a bounded region surrounding the object. The TPT method depends on the sound pressure on the boundary of this region (referred to as the Kirchhoff surface). The Euler equations are linearized about a uniform mean flow. First, the problem is transformed via the Laplace transform (with appropriate initial conditions) into a reduced wave equation. By application of a dependent variable transformation, the anisotropic terms are removed and a Helmholtz-like equation with complex wave number is obtained where both single and double layer potential theory applies. This allows the calculation of the far-field acoustic pressure in the Laplace domain. Then, an inversion of the dependent variable transform is applied. Upon application of numerical inverse Laplace transform techniques, far-field acoustic pressure is then successfully obtained as a function of space and time. Using transient monopole radiation in a uniform free-stream, accuracy is analyzed with excellent results. This method shows many advantages over direct simulation, including vast savings in computational time. The free-stream Mach number is only a parameter in the TPT method and has no bearing on the run time, unlike direct methods.

1. Kilburn, Korey, A Laplace Transform/Potential-Theoretic Method For Transient Acoustic Propagation in Three-Dimensional Subsonic Flows, Dissertation, 2010.

# Function approximation by two-dimensional continued fractions

**Khrystyna Kuchmins'ka**
Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine, L'viv, Ukraine
*kuchminska_khrys@hotmail.com*

The two-dimensional continued fraction (TDCF) approximation of two-variable functions are grouped into several families, the main ones being the two-dimensional $C$-fractions, $S$-fractions, $g$-fractions, associated fractions, $J$-fractions, and both the Thiele-type and Newton-Thiele-type interpolating TDCFs. The following properties of these TDCFs can be checked:

(i) defining property; (ii) symmetry property; (iii) projection property; (iv) reciprocal property.

Inverse, reciprocal or blending partial differences serve to construct two-dimensional interpola-ting continued fractions [1,2]. Passing to the limits in these fractions we receive a Thiele-type or associated - type TDCF expansion. An alternative of this scheme for the construction of such fractions (as in the case of the Thiele continued fraction expansion) is based on the Viscovatoff-like algorithm [1].

Approximation constructions for two-variable analytic functions are based on correspondence of a TDCF to the formal double Taylor series. In particular, we consider regular two-dimensional $C$-fractions

$$\Phi_0 + \mathop{D}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i,i} z_1 z_2}{\Phi_i}, \tag{1}$$

or

$$(\Phi_0 + \mathop{D}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i,i} z_1 z_2}{\Phi_i})^{-1}, \tag{2}$$

where

$$\Phi_k = 1 + \mathop{D}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{k+j,k} z_1}{1} + \mathop{D}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{k,k+j} z_2}{1}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{3}$$

with approximants

$$f_n = \Phi_0^{(n)} + \mathop{D}_{i=1}^{n} \frac{a_{i,i} z_1 z_2}{\Phi_i^{(n-i)}}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

or

$$f_n = (\Phi_0^{(n-1)} + \mathop{D}_{i=1}^{n-1} \frac{a_{i,i} z_1 z_2}{\Phi_i^{(n-i-1)}})^{-1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

where

$$\Phi_i^{(0)} = 1, \quad \Phi_i^{(k)} = 1 + \mathop{D}_{j=1}^{k} \frac{a_{i+j,i} z_1}{1} + \mathop{D}_{j=1}^{k} \frac{a_{i,i+j} z_2}{1}, \quad i = 0, 1, \ldots,\ k = 1, 2, \ldots .$$

We will discuss the approximate properties of other types of TDCFs, differ from (1),(3),(4) or (2),(3),(5) also, and the error estimates of the approximation.

1. Кучмінська Х. Й. Двовимірні неперервні дроби. — Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2010.

2. Kuchminskaya Kh. Yo. On approximation of functions by two-dimensional continued fractions, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 1987, 1237, P. 205 — 216.

# Local error in the approximation of Bergman kernel function

**M. Kucukaslan and Y.G. Dardagan**
Mersin University, Mersin, Turkey
*mkucukaslan@mersin.edu.tr, ydardagan@gmail.com*

Let $G$ be a finite region in the complex plane bounded by Jordan curve $L = \partial G$. Let $z_0 \in B \subset G$ be a fixed point and $K(z; z_0)$ be the Bergman Kernel function of $G$ with respect to $z_0$.

Also let $K_n(z, z_0)$ denote the $n$-th degree polynomial approximation to $K(z, z_0)$ given by the classical Bergman Kernel method.

We are going to investigate approximation error of $K_n(z, z_0)$ to $K(z, z_0)$ in the weighted $L_2(h, G)$ norm for some regions of the complex domain which has singularity on the boundary, i.e.

$$\|K(\cdot, z_0) - K_n(\cdot, z_0)\|_{L_2(h,G)} \leq \frac{c(z_0, B)}{n^{\beta(h,\partial G)}}$$

when the constant $c(z0, B)$ depends on the compact subset $B$ of $G$ and $\beta(h, \partial G)$ depends on the properties of the weight function and geometric properties of the boundary.

# Approximation of Functions by Matrix-Euler Means of Fourier series in generalized Hölder Metric

**Shyam Lal**
Department of Mathematics, Faculty of Science, Banaras Hindu University, Varanasi, India
*shyam_ lal@rediffmail.com*

The degree of approximation of a function $f$ belonging to $Lip\alpha$ class by Nörlund summability method $(N, p_n)$ has been determined by several investigators like Khan[3], Qureshi[4], Leindler[5], Stepantes[2] and Lal[7]. Working in quite different direction, Mazharand Totik[8], and Chandra[6] have studied the approximation of functions in Hölder space $H^{(w)}$. But till now no work seems to have been done to obtain the degree of approximation of functions $f$ belonging to class $H_r^{(w)}$, $r \geq 1$, by product matrix-Euler $(\Delta E_1)$ summability means. In an attempt to make an advance study in this direction, in this paper, a new estimate for degree of trigonometric approximation of a function $f \in H_r^{(w)}$ space has been determined. It is important to note that space $H_r^{(w)}$ $r \geq 1$ is a generalization of $H^{(w)}$ and $H_{(\alpha),r}$ and $H_\alpha$ spaces. Some important applications of main theorem has been also investigated.

In fact we prove the following:

**Theorem.** Let $\Delta = (a_{n,k})$ be a regular lower triangular infinite matrix such that $a_{n,k} \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta a_{n,k}| = O\left(\frac{1}{n+1}\right), \ (n+1)a_{m,n} = O(1).$$

If $f : [0, 2\pi] \to R$ is $2\pi$-periodic, Lebesgue integrable on $[0, 2\pi]$ and is belonging generalized $H_r^{(w)}$ class $r \geq 1$; $w$, $v$ be positive, non-decreasing then the degree of approximation of $f$ by triangular-Euler means $t_n^{\Delta E} = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \frac{1}{2^k} \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} s_\nu$ of its Fourier series is given by

$$\left\|t_n^{\Delta E} - f\right\|_r^{(v)} = O\left(\frac{1}{n+1}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\pi} \frac{w(t)}{t^2 v(t)} dt\right).$$

1. A. Zygmund. Trigonometric series, 2nd rev.ed., I, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 51, 1968.
2. A. I. Stepantes. Uniform approximation by trigonometric polynomials. — Kiev, 1981.
3. Khan Huzoor H. On the degree of approximation of functions belonging to the class $Lip(\alpha, p)$, Indian J. Pure Appl. Math., 1974, 5:2, P. 132–136.
4. Kutbuddin Qureshi. On the degree of approximation of a function belonging to weighted $W(L_p, \xi(t))$ class, Indian J. Pure Appl. Math., 1982, 13:4, P. 471–475.
5. L. Leindler. Trigonometric approximation in $L_p$-norm, J. Math. Anal. Appl., 2005, 302:1, P. 129-136.
6. P. Chandra. On the generalized Fejer means in the metric of the Hölder space, Math, Nachr., 1982, 109, P. 39-45.
7. Shyam Lal. Approximation of functions belonging to the generalized Lipschitz Class by $C^1.N_p$ summability method of Fourier series, Applied Mathematics and Computation, 2009, 209, P. 346-350.
8. S. M. Mazhar and V. Totik. Approximation of continuous functions by T-means of Fourier series, J. Approximation Theory, 1990, 60, P. 174-182.

## Approximation of holomorphic functions by Zygmund means

**Iryna Meremelia**
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv
*irameremelya@gmail.com*

Let $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k z^k$, $\widehat{f}_k := f^{(k)}(0)/k!$, be a holomorphic function in the unit disk $\mathbb{D} := = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ and

$$Z_{n,r}(f)(z) := \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k^r}{n^r}\right) \widehat{f}_k z^k, \quad r, n \in \mathbb{N},$$

be a Zygmund means of Taylor series of function $f$.

We determine the exact value of the quantity

$$\mathcal{E}_n(H_p^{m+r}; Z_{n,r}) := \sup\{\|f - Z_{n,r}(f)\|_p : f \in H_p^{m+r}\},$$

where

$$H_p^{m+r} := \left\{ f : f \text{ is holomorphic in } \mathbb{D} \text{ and } \left\| \frac{\partial^{m+r}}{\partial \theta^{m+r}} f(z) \right\|_p \leq 1, \theta = \arg z \right\}, \ m \in \mathbb{N},$$

and $\|\cdot\|_p$ is a norm in the Hardy space $H_p$.

**Theorem 1.** *Let $1 \leq p \leq \infty$, $r \in \mathbb{N}$. Then for any $m \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{E}_n(H_p^{m+r}; Z_{n,r}) = \frac{1}{n^r} \quad \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

In the case when $m = 0$ we have the following statement.

**Theorem 2.** *Let $1 \leq p \leq \infty$, $r \in \mathbb{N}$. Then*

$$\frac{1}{n^r} \leq \mathcal{E}_n(H_p^r; Z_{n,r}) \leq \frac{2^r}{(n+1)^r} \quad \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

It was shoved by A. Zygmund [1] that inequalities $\mathcal{E}_n(H_p^r; Z_{n,r}) \leq A_r n^{-r}$, $r \in \mathbb{N}$, holds for some constant $A_r$. But compared with our result the constant $A_r$ is strictly greater than $2^r$.

For $r = 1$ the theorems 1 and 2 was proved by V.V. Savchuk [2,3].


1. Zygmund A. The approximation of functions by typical means of their Fourier series, Duke Math. J., 1945, 12, P. 695–704.

2. Савчук В.В. Приближения средними Фейера функций класса Дирихле, Мат. заметки, 2007, 81:5, С. 744 – 750.

3. Савчук В.В. Наближення класів голоморфних функцій сумами Фейєра, Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. пр. Ін-ту математики НАН України, 2012, 9:1, С. 309– 323.


# Trigonometric approximation of functions of generalized Zygmund class by Hausdorff matrix summability means of its Fourier series


**Abhishek Mishra**

Banaras Hindu University, Varanasi, India

*abhi87mangal@gmail.com*


Alexits [3] investigated the degree of approximation of functions $f \in Lip\alpha$, $0 < \alpha < 1$ by $(C, \delta)$ means of its Fourier series. Later on Khan and Ram [4] has obtained an estimate of degree of approximation by Euler's mean for functions belonging to $Lip(\xi(t), r)$. Working in a slight different direction Lal and Singh [5] obtained the degree of approximation by product summability of the form $(C, 1)(E, 1)$. Being the product of two Hausdorff matrices $(C, 1)(E, 1)$ means is also a Hausdorff matrix. Recently Rhoades, Ozkoklu and Albayrak [3] established a theorem on the degree of approximation of functions $f \in Lip(\alpha, r)$ class by regular Hausdorff means of its Fourier series. But till now no work seems to have been done to obtain the degree of approximation of functions of generalized Zygmund class by regular Hausdorff matrix summability means. It is important to note that Lipschitz class is a sub class of Zygmund class. In an attempt to make an advance study in this direction, in this paper, a new theorem on the degree of approximation of functions of generalized Zygmund class by regular Hausdorff matrix summability means of its Fourier series has been established in the following form

**Theorem.** *If $f : [0, 2\pi] \to R$ is $2\pi$-periodic, Lebesgue integrable on $[0, 2\pi]$ and is belonging to the class $Zyg(\xi, r), (r \geq 1)$, then its degree of approximation by regular Hausdorff matrix summability means $t_n^H$ of its Fourier series satisfies,*

$$\left\| t_n^H - f \right\|_r = O\left( \frac{1}{n+1} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\pi} \frac{\xi(t)}{t^2} dt \right)$$

*for n=0,1,2,3,...,*

*provided $\xi(t)$ is a positive monotonic non-decreasing function of $t$.*

Some important and interesting applications of the main theorem has also been obtained in the form of corollaries.


1. A. Zygmund. Trigonometric series, 2nd rev.ed. I. -Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1968.

2. B.E. Rhoades, Kevser Ozkoklu and Inci Albayrak. On the degree of approximation of functions belonging to a Lipschitz class by Hausdorff means of its Fourier series, Applied Mathematics and Computation, 2011, 217, P. 6868-6871.

3. G. Alexits. Convergence problems of orthogonal series. — London: Pergamon Press, 1961.

4. Huzoor H. Khan and Govind Ram. On the degree of approximation, Ser. Math. Inform., 2003, 18, P. 47–57.

5. Shyam Lal and Prem Narain Singh. On the approximation of $Lip(\xi(t), p)$ function by $(C, 1)(E, 1)$ means of its Fourier series, Indian J. pure appl. math., 2002, 33:9, P. 1443-1449.

# On the Asymptotic Stablity of Bound States in 4D Quadratic Schrödinger Equation

**Özgür Mızrak**
Mersin University, Mersin, Turkey
*ozgurmizrak@gmail.com*

In this work the quadratic nonlinear Schrödinger equation in four space dimensions with potential is considered.

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = (-\Delta + V)u + \lambda|u|u, \quad x \in \mathbb{R}^4, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Asymptotic stability of the nonlinear bound states, ie. periodic in time localized in space solutions is studied. It is shown that all solutions with small, localized in space initial data, converge to the set of bound states. Hence, the center manifold in this problem is a global attractor. This result is coincides with papers of Pillet and Wayne [1] and Soffer and Weinstein [2]. Our method is better in the sense that ours is also applicable to sub-quadratic nonlinearities.

1. Claude-Alain Pillet and C. Eugene Wayne. Invariant manifolds for a class of dispersive, Hamiltonian, partial differential equations, J. Differential Equations, 1997, 141:2, P. 310–326.

2. A. Soffer and M. Weinstein. Multichannel nonlinear scattering. II. The case of anisotropic potentials and data, J. Differential Equations, 1992, 98, P. 376–390.

# A Common Fixed Point Theorem for Weakly Compatible Mappings in Non-Archimedean Menger PM-Spaces

**Amit Singh**
Govt. Degree College Billawar, Jammu and Kashmir, INDIA
*singhamit841@gmail.com*

In the present paper we prove a unique common fixed point theorem for four weakly compatible self maps in non-Archimedean Menger PM-spaces without using the notion of continuity. Our result generalizes and extends the results of Khan and Sumitra [1] and others.

1. M.A. Khan, Sumitra. A common fixed point theorem in non-Archimedean Menger PM-space, Novi Sad J. Math., 2009, 39:1, P. 81-87.

# A Note About Connected Topological Groups

**Ali Tavakoli**
Department of Mathematics, Majlesi Branch, Islamic Azad University, Isfahan, Iran
*at4300125@gmail.com*

In this paper we will give the positive answer to the following problem proposed by N. Aronszajn (Problem 2.48 of [1]);
Let $G$ be a connected topological group locally satisfying some identical relation $f|U = 1$, where $U$ is a neighborhood of the identity element of $G$. Is it true that $f|G = 1$?
We have the following theorems:
**Theorem 1.** *All locally relation satisfy for discrete topological groups.*
**Theorem 2.** *For every Abelian connected topological groups and every compact connected topological groups, the Aronszajn' problem has positive answer.*

1. V. D. Mazurov and E. I. Khukhro. The kourovka notebook, Unsolved problems in group theory, Seventeenth edition, Russian Academy of Sciences Siberian Division, Institute of Mathematics, Novosibirsk, 2010.

# Approximation Properties of some Positive Linear Operators with two Variables

**Tuncay Tunc, Ersin Simsek**
Mersin University, Mersin, Turkey
*ttunc77@hotmail.com, ersinnsimsek@hotmail.com*

In this study, we introduce some two dimensional hybrid positive linear operators by means of Szasz-Mirakyan and Bernstein operators and investigate some approximation properties of these operators in the space of functions which are continuous on some compact subsets of two dimensional Euclidean space. We also find the order of this approximation by using modulus of continuity, and give the Voronovskaya-type theorem for the sequence of this operators. Furthermore, we obtain the partial derivatives of this operators for a given function, converges the partial derivatives of the function.

# Approximation of differentiable functions to average by polynomials in a segment and by entire functions of exponential type at the whole real axis

**S. B. Vakarchuk**
Albert Nobel University, Dnipropetrovs'k, Ukraine
*sbvakarchuk@mail.ru*

Let us consider one of the obtained results according to the theme, indicated at the title of abstract. Different aspects of the approximation by entire functions of exponential type at the whole real axis $\mathbb{R} := \{x : -\infty < x < \infty\}$ were studied in the works of S. N. Bernshtein, N. I. Akhiezer, S. M. Nikolsky, A. F. Timan, M. F. Timan, I. I. Ibragimov and many others (see, for example, [1] - [3]). Let $L_2^r(\mathbb{R}), r \in \mathbb{N}$, be a class of functions $f \in L_2(\mathbb{R})$, whose derivatives $f^{(r-1)}$ $(f^{(0)} \equiv f)$ are locally absolutely continuous and $f^{(r)} \in L_2(\mathbb{R})$. For $f \in L_2(\mathbb{R})$ we assume $A_\sigma(f)_2 := \inf\{\|f - g\|_2 : g \in B_{\sigma,2}\}$ where $B_{\sigma,2}$ is the subspace of entire functions of exponential type $\leqslant \sigma$ belonging to $L_2(\mathbb{R})$.

Let $\omega_k(f, t)_2$ be the integral modulus of continuity of $k$-th order for a function $f \in L_2(\mathbb{R})$. We assume the ratio $0/0$ be equal to zero.

**Theorem.** *Let $0 < \sigma < \infty; 0 < t \leqslant \pi/\sigma; \mu, r \in \mathbb{Z}_+, \mu \leqslant r; k \in \mathbb{N}; 0 < p \leqslant 2;$ $\psi$ is a nonnegative measurable and summable function at the segment $[0, t]$ which is nonequivalent to zero. Then the next double inequalities hold*

$$\frac{1}{\beta_{\sigma,k,\mu,p}(\psi,t)} \leqslant \sup_{f\in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{A_\sigma(f^{(r-\mu)})_2}{\left\{\int\limits_0^t \omega_k^p(f^{(r)},t)_2\psi(\tau)d\tau\right\}^{1/p}} \leqslant \frac{1}{\inf\{\beta_{u,k,\mu,p}(\psi,t) : \sigma \leqslant u < \infty\}},$$

*and*

$$\frac{1}{\sigma^\mu(\sigma t)^k} \leqslant \sup_{f\in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})_2}{\omega_k(f^{(r)},t)_2} \leqslant \frac{1}{\sigma^\mu}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{(\sigma t)^2}\right\}^{k/2},$$

*were*

$$\beta_{u,k,\mu,p}(\psi,t) := 2^{k/2}u^\mu\left\{\int\limits_0^t (1-\cos u\tau)^{kp/2}\,\psi(\tau)d\tau\right\}^{1/p}$$

*(in the case $r = 0$ $L_2^0(\mathbb{R}) \equiv L_2(\mathbb{R})$ and* sup *is calculated in terms of functions $f \in L_2(\mathbb{R})$ which are nonequivalent to zero).*

For classes of functions determined by means of the modulus of continuity, the exact values of the linear, Bernshtein and Kolmogorov average widths are found in $L_2(\mathbb{R})$.

1. Vakarchuk S.B. Exact constant in an inequality of Jackson type for $L_2$ approximation on the line and exact values of mean widths of functional classes, East Journal on Approximations, 2004, 10:1, P. 27–39.

2. Vakarchuk S.B., Vakarchuk M.B. On the best mean square approximation by means of entire functions of finite degree on the straight line, Bulletin of Dnipropetrovsk University. Mathematics, 2009, 17:14, P. 36–41 (in Russian).

3. Vakarchuk S.B., Doronin V.G. The best mean square approximation by entire functions of finite degree at the line and exact values of the mean widths of functional classes, Ukrainian Mathematical Journal, 2010, 62:8, P. 920–941.

## On the approximation of higher derivatives of interpolating splines

**Yuriy S. Volkov**

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia

*volkov@math.nsc.ru*

It is well known that polynomial splines $s(x)$ interpolating the values of a smooth function $f(x)$ possess good approximation properties; moreover, not only such splines approximate the function $f(x)$, but also their derivatives $s^{(k)}(x)$ approximate the corresponding derivatives $f^{(k)}(x)$ of the function being interpolated. We suppose that simple spline $s(x)$ of degree $2n-1$ interpolates the values of a sufficiently smooth function $f(x)$ at the points of the partition $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$. Most surprisingly, we can approximate the derivative $f^{(2n)}(x)$ of the interpolated function, although the derivative of any link (a polynomial piece) of such a spline is identically zero. It is the value of the discontinuity

$$\beta_i = s^{(2n-1)}(x_i + 0) - s^{(2n-1)}(x_i - 0)$$

of the highest, $(2n-1)$th, derivative of the spline at the point $x_i$ divided by the step-width of the uniform grid (called a jump) that approximates the $(2n)$th derivative of the function $f(x)$.

We discuss the problems of the approximation of derivatives of the interpolation spline and the convergence of the interpolation process. The interrelation of questions of approximation of the higher and lower derivatives is shown. Found that the jump can not only approximate the $(2n)$th derivative on uniform grids, but also on some nonuniform special grids.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 11-07-00447), and by the Joint Projects of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences and the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (project 2012-32).

## On the two-dimensional moment problem

**Sergey M. Zagorodnyuk**
V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine
*Sergey.M.Zagorodnyuk@univer.kharkov.ua*

We present an algorithm towards solving the two-dimensional moment problem. Recall that this problem consists of finding a non-negative Borel measure $\mu$ in $\mathbb{R}^2$ such that (see [1-3])

$$\int_{\mathbb{R}^2} x_1^m x_2^n d\mu = s_{m,n}, \qquad m, n \in \mathbb{Z}_+,$$

where $\{s_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{Z}_+}$ is a prescribed sequence of complex numbers.
The algorithm gives the necessary and sufficient conditions for the solvability of the moment problem. An idea of our algorithm is to extend the symmetric operators related to the two-dimensional moment problem, not "entirely", but on a discrete set of points. It is shown that all solutions of the two-dimensional moment problem can be constructed on this way. Roughly speaking, the final algorithm reduces to the solving of finite and infinite linear systems of equations with parameters.
In a consequence, analogous results are obtained for the complex moment problem.

1. J.A. Shohat, J.D. Tamarkin. The Problem of Moments. — New York City: Amer. Math. Soc., 1943.

2. N.I. Akhiezer. Classical Moment Problem. — Moscow: Fizmatlit., 1961. (in Russian).

3. Ju.M. Berezanskii. Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators. — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1968. (Russian edition: Naukova Dumka, Kiev, 1965).

4. S.M. Zagorodnyuk. On the two-dimensional moment problem, Ann. Funct. Anal., 2010, 1:1, P. 80–104.

## Іменний покажчик / Author Index