Нерівність спектральної щілини на просторах конфігурацій та концентраційні властивості пуасонівської міри

Д. Л. Фінкельштейн

Математика УДК 517.515

Анотація

We consider the Laplace operator with Neumann boundary conditions on a configuration space with Poisson measure over a bounded domain. The spectrum of this operator is considered and a structure of its vacuum space is studied. The corresponding spectral gap inequality is proved. The applications of this results to study of the concentration properties of the Poisson measure are presented.

Розглянемо обмежену область Λ у $\mathbb{R}^d$, що задовольняє таким умовам: 1) справедлива формула Гауса-Остроградського $\int_\Lambda (\operatorname{div} w)(x)\,dx = \int_{\partial\Lambda} (w(s), \nu)\,dS$ для довільного гладкого векторного поля w на $\bar{\Lambda}$ (div — дівергенція у $\mathbb{R}^d$, ν — зовнішня нормаль до границі $\partial\Lambda$ області Λ); 2) справедлива нерівність Пуанкаре

$$\int_\Lambda \left(f(x) - \frac{1}{m(\Lambda)} \int_\Lambda f(x)\,dx \right)^2 dx$$
$$= \int_\Lambda f^2(x)\,dx - \frac{1}{m(\Lambda)} \left(\int_\Lambda f(x)\,dx \right)^2 \leq C \int_\Lambda |\nabla f|^2(x)\,dx,$$

для довільної гладкої функції f на $\bar{\Lambda}$ (∇ — градієнт у $\mathbb{R}^d$); 3) нехай $\mathcal{D}_{\mathcal{N}(\Lambda)}$ — множина гладких функцій на $\bar{\Lambda}$, що задовольняють умові Неймана на границі $\partial\Lambda$ області Λ, тоді оператор $H = \left(-\Delta, \mathcal{D}_{\mathcal{N}(\Lambda)}\right)$ є істотньо самоспряженим у $L^2(\Lambda)$ (Δ — лапласіан у $\mathbb{R}^d$).

Ці умови регулярності області та кускової гладкості границі області. Вони виконуються, зокрема, якщо Λ — куля або куб у $\mathbb{R}^d$.

Зауважимо, що оскільки $\operatorname{Ker} H = \{c \in \mathbb{R}\}$, то

$$\operatorname{Pr}_{\operatorname{Ker} H} f = \frac{1}{m(\Lambda)} \int_{\Lambda} f(x) dx,$$

а отже, при $f \in \mathcal{D}_{\mathcal{N}(\Lambda)}$ внаслідок рівності

$$\int_{\Lambda} |\nabla f|^2 (x)\, dx = \int_{\Lambda} H f(x) \cdot f(x) dx,$$

нерівність Пуанкаре можна записати у вигляді «нерівності спектральної щілини»:

$$\int_{\Lambda} \left(f(x) - \operatorname{Pr}_{\operatorname{Ker} H} f(x)\right)^2 dx \leq C \int_{\Lambda} H f(x) \cdot f(x) dx$$

$$= C \int_{\Lambda} H \left(f(x) - \operatorname{Pr}_{\operatorname{Ker} H} f(x)\right)(x) \cdot \left(f(x) - \operatorname{Pr}_{\operatorname{Ker} H} f(x)\right) dx, \quad f \in \mathcal{D}_{\mathcal{N}(\Lambda)},$$

це означає, що на множині $\mathcal{D}_{\mathcal{N}(\Lambda)} \bigcap (\operatorname{Ker} H)^{\perp}$ оператор H є строго додатнім ($H \geq \frac{1}{C}$).

Розглянемо простір конфігурацій над Λ (простір всіх скінченних підмножин:

$$\Gamma_{\Lambda} = \left\{\gamma \subset \Lambda \middle| |\gamma| < \infty\right\}.$$

Будь-яку конфігурацію можна ототожнити с мірою Радона на $\mathbb{R}^d$: $\gamma = \sum_{x \in \gamma} \varepsilon_x$, що дає змогу вести на просторі конфігурацій топологію, індуковану топологією простору узагальнених функцій $\mathcal{D}'$, тобто топологію, у якій відображення $\gamma \mapsto \langle \varphi, \gamma \rangle = \sum_{x \in \gamma} \varphi(x), \varphi \in \mathcal{D}$ є неперервними $\left(\mathcal{D} = C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$. Зауважимо, що побудована за цією топологією борелівська σ-алгебра є мінімальною σ-алгеброю у якій всі відображення $\gamma \mapsto \langle \varphi, \gamma \rangle$ є вимірними.

Простір Γ_Λ розкладається у диз'юктне об'єднання просторів $n-$частинкових конфігурацій: $\Gamma_\Lambda = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_\Lambda^{(n)}$, де $\Gamma_\Lambda^{(n)} = \{\gamma \subset \Lambda | \, |\gamma| = n\} \simeq \widetilde{\Lambda^n}/_{S_n}$ (тут $\widetilde{\Lambda^n}$ — множина Λ^n без діагоналей, S_n — група перестановок).

Пуасонівська міра на Γ_Λ визначається за формулою

$$\pi_\Lambda = e^{-m(\Lambda)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \widehat{m^n},$$

де $\widehat{m^n}$ — образ міри Лебега m^n на $\Gamma_\Lambda^{(n)}$ при ізоморфізмі $\Gamma_\Lambda^{(n)} \simeq \widetilde{\Lambda^n}/_{S_n}$.

У просторі $L^2(\Gamma_\Lambda) := L^2(\Gamma_\Lambda, \pi_\Lambda)$ розглянемо щільну множину циліндричних функцій:

$$\mathcal{F}C_b^\infty(\Gamma_\Lambda, \mathcal{D}) = \left\{ F(\cdot) = g_F(\langle \varphi_1, \cdot \rangle, \ldots, \langle \varphi_N, \cdot \rangle) \, \middle| \varphi_k \in \mathcal{D}; g_F \in C_b^\infty\left(\mathbb{R}^N\right) \right\}. \tag{1}$$

В роботі [1] побудована диференціальна геометрія на просторі конфігурацій. Так, градієнт функції F у точці γ визначається як елемент дотичного простору $T_\gamma(\Gamma_\Lambda)$ (простору послідовностей векторних полів, проіндексованих точками конфігурації γ), такий що

$$\nabla^\Gamma F(\gamma) = \Big(\nabla_x F(\gamma) \Big)_{x \in \gamma} \in T_\gamma(\Gamma_\Lambda).$$

Оператор Лапласа визначється таким чином:

$$\Delta^\Gamma F(\gamma) = \sum_{x \in \gamma} \Delta_x F(\gamma).$$

Цей оператор на загальних циліндричних функціях не буде симетричним. В роботі [2] знайдені необхідні і достатні умови симетричності на більш вузьких класах функцій. Зокрема показано, що якщо ввести клас функцій, що задовольняють умові Неймана, а саме

$$\mathcal{F}C_b^\infty\left(\Gamma_\Lambda, \mathcal{D}_{\mathcal{N}(\Lambda)}\right) := \left\{ F \in \mathcal{F}C_b^\infty(\Gamma_\Lambda, \mathcal{D}) | \, \varphi_k \in \mathcal{D}_{\mathcal{N}(\Lambda)} \right\},$$

то оператор

$$H^{\Gamma_\Lambda} := -\Delta^\Gamma \restriction_{\mathcal{F}C_b^\infty\left(\Gamma_\Lambda, \mathcal{D}_{\mathcal{N}(\Lambda)}\right)}.$$

буде образом одначастинкового оператора $\left(-\Delta, \mathcal{D}_{\mathcal{N}(\Lambda)}\right)$ під дією канонічного ізоморфізму Вінера-Іто-Сігала (див. [1]) між простором $L^2\left(\Gamma_\Lambda, \pi_\Lambda\right)$ і фоківським простором $\operatorname{Exp}\left(L^2\left(\Lambda\right)\right)$, і отже, буде істотньо самоспряженим у $L^2\left(\Gamma_\Lambda, \pi_\Lambda\right)$. Більше того, оскільки оператор $\left(-\Delta, \mathcal{D}_{\mathcal{N}(\Lambda)}\right)$ має лише точковий спектр

$$0=\mu_1<\mu_2\leq\mu_3\leq\ldots,$$

то і оператор H^{Γ_Λ} буде володіти цією властивістю.

Перший результат цієї статті полягає в тому, що власний підпростір оператора H^{Γ_Λ}, що відповідає нульовому власному значенню, вже буде нескінченно вимірним. Більш точно, справедливе таке твердження.

Твердження 1. *Нехай* $\operatorname{Ker} H^{\Gamma_\Lambda}$ *— (незамкнене) ядро незамкненого оператора* H^{Γ_Λ}*. Тоді*

$$\operatorname{Ker} H^{\Gamma_\Lambda}=\left\{F=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\chi_{\Gamma_\Lambda^{(n)}}\,\middle|\, F\in\mathcal{F}C_b^{\infty}\left(\Gamma_\Lambda, \mathcal{D}_{\mathcal{N}(\Lambda)}\right)\right\}.$$

Для замикання цього ядра будемо використовувати те саме позначення. Очевидно, умовою того, що $\sum_{n=0}^{\infty}c_n\chi_{\Gamma_\Lambda^{(n)}}\in L^2\left(\Gamma_\Lambda\right)$ є така нерівність:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n^2\left(m\left(\Lambda\right)\right)^n}{n!}<+\infty.$$

Основна ідея доведення полягає в тому, що якщо

$$F\left(\cdot\right)=g_F\left(\left\langle\varphi_1,\cdot\right\rangle,\ldots,\left\langle\varphi_N,\cdot\right\rangle\right)\in\mathcal{F}C_b^{\infty}\left(\Gamma_\Lambda, \mathcal{D}_{\mathcal{N}(\Lambda)}\right),$$

то розглянувши для кожного $n\geq 1$ функцію

$$f^{(n)}\left(x_1,\ldots,x_n\right):=g_F\left(\sum_{k=1}^{n}\varphi_1\left(x_k\right),\ldots,\sum_{k=1}^{n}\varphi_N\left(x_k\right)\right)=F\left(\left\{x_1,\ldots,x_n\right\}\right),$$

дістанемо, що вона задовольняє звичайній умові Неймана як функція nd змінних на області $\Lambda^n\subset\mathbb{R}^{dn}$.

Ядро $\operatorname{Ker} H^{\Gamma_\Lambda}$, звичайно, не пусте. Наприклад, функція $F\left(\gamma\right)=e^{-|\gamma|}=e^{\langle -1,\gamma\rangle}\in\mathcal{F}C_b^{\infty}\left(\Gamma_\Lambda, \mathcal{D}_{\mathcal{N}(\Lambda)}\right)$ йому належить. Більше того, легко бачити, що справедливий такий наслідок Твердження 1:

Наслідок 2. *Незамкнене ядро* $\operatorname{Ker} H^{\Gamma_\Lambda}$ *має такий вид:*

$$\operatorname{Ker} H^{\Gamma_\Lambda} = \left\{ c\left(|\cdot|\right) | c \in C_b^\infty\left(\mathbb{R}\right) \right\}.$$

Очевидно, що для всіх $F \in \operatorname{Ker} H^{\Gamma_\Lambda}$ виконується, що $\nabla^\Gamma F\left(\gamma\right) = 0$, отже, взагалі кажучи, нерівність Пуанкаре, тобто нерівність виду

$$\int_{\Gamma_\Lambda} \left(F\left(\gamma\right) - \int_{\Gamma_\Lambda} F\left(\gamma\right) d\pi_\Lambda\left(\gamma\right) \right)^2 d\pi_\Lambda\left(\gamma\right) \leq \text{const.} \int_{\Gamma_\Lambda} \left|\nabla^\Gamma F\left(\gamma\right)\right|^2_{T_\gamma(\Gamma)} d\pi_\Lambda\left(\gamma\right),$$

не може бути вірною на просторі Γ_Λ, оскільки якщо $F \in \operatorname{Ker} H^{\Gamma_\Lambda}$, то права частина рівна 0, але F не обов'язково тотожно стала.

Знайдемо проекцію довільної циліндричної функції F на ядро.

Твердження 3. *Нехай* $F \in \mathcal{F}C_b^\infty\left(\Gamma_\Lambda, \mathcal{D}\right)$, *і позначимо проекцію* F *на* $\operatorname{Ker} H^{\Gamma_\Lambda}$ *через* $\operatorname{Pr}_{\operatorname{Ker} H^{\Gamma_\Lambda}} F$. *Тоді*

$$\operatorname{Pr}_{\mathtt{Ker} H^{\Gamma_\Lambda}} F\left(\gamma\right) = \sum_{n=0}^\infty \chi_{\Gamma_\Lambda^{(n)}}\left(\gamma\right) \frac{1}{\left(m\left(\Lambda\right)\right)^n} \int_{\Lambda^n} F\left(\left\{x_1, \ldots, x_n\right\}\right) dx_1 \ldots dx_n.$$

Це випливає з того факту, що якщо $H^{(n)}$ — це n-частинковий оператор Лапласа на функціях у Λ^n, які задовольняють граничним умовам Неймана, то

$$\operatorname{Pr}_{\operatorname{Ker} H^{(n)}} f^{(n)} = \frac{1}{\left(m\left(\Lambda\right)\right)^n} \int_{\Lambda^n} f^{(n)}\left(\left\{x_1, \ldots, x_n\right\}\right) dx_1 \ldots dx_n$$

Добре відомо, що нерівність Пуанкаре має наступну мультиплікативну властивість (див., напр., [3]):

Твердження 4. *Нехай* $f^{(n)}$ *— симетрична гладка функція на* $\bar{\Lambda}^n$. *Тоді справедлива нерівність Пуанкаре (і константа* C *не залежить від* n*):*

$$\int_{\Lambda^n} \left(f^{(n)}\left(x_1, \ldots, x_n\right) - \frac{1}{\left(m\left(\Lambda\right)\right)^n} \int_{\Lambda^n} f^{(n)}\left(x_1, \ldots, x_n\right) dx_1 \ldots dx_n \right)^2 dx_1 \ldots dx_n$$
$$\leq C \int_{\Lambda^n} \left|\nabla^{(n)} f^{(n)}\right|^2 \left(x_1, \ldots, x_n\right) dx_1 \ldots dx_n.$$

Звідси ми дістанемо нерівність спектральної щілини на просторі конфігурацій Γ_Λ.

Теорема 5. *Для довільної функції* $F \in \mathcal{F}C_b^\infty(\Gamma_\Lambda, \mathcal{D})$ *справедлива нерівність спектральної щілини*

$$\int_{\Gamma_\Lambda} \left|F(\gamma) - \mathrm{Pr}_{\mathtt{Ker} H^{\Gamma_\Lambda}} F(\gamma)\right|^2 d\pi_\Lambda(\gamma) \le C \int_{\Gamma_\Lambda} \left|\nabla^\Gamma F(\gamma)\right|^2_{T_\gamma(\Gamma)} d\pi_\Lambda(\gamma). \quad (2)$$

Для доведення слід переписати ліву частину (2), використовуючи Твердження 3 та на кожному $\Gamma_\Lambda^{(n)}$ використати Твердження 4.

Зауваження 6. Нерівність (2) справді є нерівністю спектральної щілини, оскільки (див. [2])

$$\int_{\Gamma_\Lambda} \left|\nabla^\Gamma F(\gamma)\right|^2_{T_\gamma(\Gamma)} d\pi_\Lambda(\gamma) = \int_{\Gamma_\Lambda} H^{\Gamma_\Lambda} F(\gamma) \cdot F(\gamma)\, d\pi_\Lambda(\gamma)$$

для всіх $F \in \mathcal{F}C_b^\infty\left(\Gamma_\Lambda, \mathcal{D}_{\mathcal{N}(\Lambda)}\right)$.

Зауваження 7. З властивості проекції випливає, що

$$\int_{\Gamma_\Lambda} \left|F(\gamma) - \mathrm{Pr}_{\mathtt{Ker} H^{\Gamma_\Lambda}} F(\gamma)\right|^2 d\pi_\Lambda(\gamma)$$
$$= \int_{\Gamma_\Lambda} F^2(\gamma)\, d\pi_\Lambda(\gamma) - \int_{\Gamma_\Lambda} \left(\mathrm{Pr}_{\mathtt{Ker} H^{\Gamma_\Lambda}} F(\gamma)\right)^2 d\pi_\Lambda(\gamma).$$

Оскільки

$$\int_{\Gamma_\Lambda} \mathrm{Pr}_{\mathtt{Ker} H^{\Gamma_\Lambda}} F(\gamma)\, d\pi_\Lambda(\gamma) = \int_{\Gamma_\Lambda} F(\gamma)\, d\pi_\Lambda(\gamma),$$

то за нерівностю Коші-Буняковського маємо:

$$\int_{\Gamma_\Lambda} \left|F(\gamma) - \mathrm{Pr}_{\mathtt{Ker} H^{\Gamma_\Lambda}} F(\gamma)\right|^2 d\pi_\Lambda(\gamma)$$
$$\le \int_{\Gamma_\Lambda} \left(F(\gamma) - \int_{\Gamma_\Lambda} F(\gamma)\, d\pi_\Lambda(\gamma)\right)^2 d\pi_\Lambda(\gamma),$$

і отже, ми бачимо, що нерівність Пуанкаре більш сильна, ніж нерівність спектральної щілини.

Перейдемо тепер до концентраційних властивостей міри Пуасона.

Теорема 8. *Нехай* $F \in \mathcal{F}C_b^\infty(\Gamma_\Lambda, \mathcal{D})$. *Тоді для довільного* $r > 0$

$$\pi_\Lambda \{\gamma \in \Gamma_\Lambda \,|F(\gamma) \geq \mathrm{Pr}_{\mathtt{Ker}H^{\Gamma_\Lambda}} F(\gamma) + r\} \\ \leq e^{-m(\Lambda)} \left(\exp\left(-\frac{r}{KM} + 1 \right) + \exp\left(-\frac{r}{M} + 4 \right) \right),$$

де $K = K(C) > 0, M = M(F) > 0$.

Доведення. Нехай $m_\Lambda(dx) := \frac{m(dx)}{m(\Lambda)}$ і нехай $m_\Lambda^n := (m_\Lambda)^n$. Нехай $F = g_F(\langle \varphi_1, \cdot \rangle, \ldots, \langle \varphi_N, \cdot \rangle) \in \mathcal{F}C_b^\infty(\Gamma_\Lambda, \mathcal{D})$. Покладемо

$$\sum_{j=1}^N \sup_{(y_1,\ldots,y_N)\in\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial g_F}{\partial q_j}(y_1, \ldots, y_N) \right| \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi_j(x)| =: M < +\infty.$$

Звідси, для довільного $n \geq 1$ маємо:

$$\sup_{x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^n |\nabla_{x_i} F(\{x_1, \ldots, x_n\})|^2 \leq nM^2,$$
$$\sup_{x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^d} \max_{1\leq i\leq n} |\nabla_{x_i} F(\{x_1, \ldots, x_n\})| \leq M.$$

Отже, використовуючи концентраційні властивості продакт-міри (див., наприклад, Corollary 4.6 в [3]) маємо:

$$m_\Lambda^n \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{dn} \middle| f^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) \geq \int_{\Lambda^n} f^{(n)} dm_\Lambda^n + r \right\} \\ \leq \exp\left(-\frac{1}{K} \min\left(\frac{r}{M}; \frac{r^2}{nM^2} \right) \right),$$

де K залежить лише від C.

Звідси для $r > 0$

$$\pi_\Lambda \{\gamma \in \Gamma_\Lambda \,|F(\gamma) \geq \mathrm{Pr}_{\mathtt{Ker}H^{\Gamma_\Lambda}} F(\gamma) + r\} \\ \leq e^{-m(\Lambda)} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!} \exp\left(-\frac{1}{K} \min\left(\frac{r}{M}; \frac{r^2}{nM^2} \right) \right)$$

$$= e^{-m(\Lambda)} \sum_{n=1}^{\left[\frac{r}{M}\right]} \frac{1}{n!} \exp\left(-\frac{r}{KM}\right) + e^{-m(\Lambda)} \sum_{n=\left[\frac{r}{M}\right]+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \exp\left(-\frac{r^2}{nKM^2}\right)$$

$$\leq \exp\left(-\frac{r}{KM} + 1 - m(\Lambda)\right) + e^{-m(\Lambda)} \sum_{n=\left[\frac{r}{M}\right]+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \exp\left(-\frac{\left[\frac{r}{M}\right]^2}{nK}\right).$$

Оскільки

$$\sum_{n=\left[\frac{r}{M}\right]+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \exp\left(\left[\frac{r}{M}\right] - \frac{\left[\frac{r}{M}\right]^2}{nK}\right) \leq \sum_{n=\left[\frac{r}{M}\right]+1}^{\infty} \frac{1}{n!} e^n < e^e,$$

то

$$\sum_{n=\left[\frac{r}{M}\right]+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \exp\left(-\frac{\left[\frac{r}{M}\right]^2}{nK}\right) \leq \exp\left(e - \left[\frac{r}{M}\right]\right) < \exp\left(4 - \frac{r}{M}\right).$$

$\square$

Наведемо ще одне твердження про концентраційні властивості пуасонівської міри. Для цього спочатку визначимо так звану метрику Васерштейна на просторі Γ_Λ (більш детально див. у [4]): для $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_\Lambda$ покладемо $\rho(\gamma_1, \gamma_2) = +\infty$, якщо $|\gamma_1| \neq |\gamma_2|$ та

$$\rho(\gamma_1, \gamma_2) = \inf_{\sigma \in S_n} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left|x_k - y_{\sigma(k)}\right|^2},$$

якщо $|\gamma_1| = |\gamma_2| = n, \gamma_1 = \{x_k\}, \gamma_2 = \{y_k\}$. В роботі [4] показано, що якщо функція $F \in L^2(\Gamma_\Lambda)$ є ρ-ліпшицевою, то існує таке число $N(F)$, що $\left|\nabla^\Gamma F(\gamma)\right|_{T_\gamma(\Gamma)} \leq N(F)$ π_Λ-м.с.

Теорема 9. *Нехай F — ρ-ліпшецева функція на Γ_Λ, причому $N(F) \leq 1$. Тоді для всіх $|\lambda| < \frac{2}{\sqrt{C}}$ маємо*

$$\int_{\Gamma_\Lambda} e^{\lambda\left(F(\gamma) - \mathrm{Pr}_{\mathtt{Ker}H^{\Gamma_\Lambda}} F(\gamma)\right)} d\pi_\Lambda(\gamma) \leq \frac{2 + \sqrt{C}\lambda}{2 - \sqrt{C}\lambda}.$$

Зокрема, якщо $0<\lambda<\frac{2}{\sqrt{C}}$, *то*

$$\pi_\Lambda\left(\left\{\gamma\in\Gamma_\Lambda\left|\left|F\left(\gamma\right)-\mathrm{Pr}_{\mathtt{Ker}H^{\Gamma_\Lambda}}F\left(\gamma\right)\right|\geq r\right.\right\}\right)\leq\frac{4+2\sqrt{C}\lambda}{2-\sqrt{C}\lambda}e^{-\lambda r}.$$

Доведення. Застосуємо нерівність Пуанкаре на Λ^n до функції $e^{\frac{f^{(n)}}{2}}$. Дістанемо:

$$\begin{aligned}\int_{\Lambda^n}e^{f^{(n)}}dm_\Lambda^n-\left(\int_{\Lambda^n}e^{\frac{f^{(n)}}{2}}dm_\Lambda^n\right)^2&\leq\frac{C}{4}\int_{\Lambda^n}e^{f^{(n)}}\left|\nabla^{(n)}f^{(n)}\right|^2dm_\Lambda^n\\&\leq\frac{C}{4}\left(N_n\left(f^{(n)}\right)\right)^2\int_{\Lambda^n}e^{f^{(n)}}dm_\Lambda^n,\end{aligned}$$

де $N_n\left(f^{(n)}\right)=\sup_n\sup_{\Lambda^n}\left|\nabla^{(n)}f^{(n)}\right|$. Очевидно, що, $N_n\left(\lambda f^{(n)}\right)=|\lambda|\,N_n\left(f^{(n)}\right)$. Далі, $N_n\left(f^{(n)}\right)\leq N\left(F\right)\leq 1$. Звідси (див. Proposition 2.12 у [3]) для всіх $|\lambda|<\frac{2}{\sqrt{C}}$

$$\int_{\Lambda^n}e^{\lambda\left(f^{(n)}-\int_{\Lambda^n}f^{(n)}dm_\Lambda^n\right)}dm_\Lambda^n\leq\frac{2+\sqrt{C}\lambda}{2-\sqrt{C}\lambda}.$$

Отже,

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_\Lambda}e^{\lambda\left(F(\gamma)-\mathrm{Pr}_{\mathtt{Ker}H^{\Gamma_\Lambda}}F(\gamma)\right)}d\pi_\Lambda\left(\gamma\right)\\&\leq e^{-m(\Lambda)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(m\left(\Lambda\right)\right)^n\frac{2+\sqrt{C}\lambda}{2-\sqrt{C}\lambda}=\frac{2+\sqrt{C}\lambda}{2-\sqrt{C}\lambda}.\end{aligned}$$

Зокрема, якщо $0<\lambda<\frac{2}{\sqrt{C}}$, то для довільного $r>0$ за нерівністю Чебишова маємо:

$$\begin{aligned}&\pi_\Lambda\left(\left\{\gamma\in\Gamma_\Lambda\left|\left|F\left(\gamma\right)-\mathrm{Pr}_{\mathtt{Ker}H^{\Gamma_\Lambda}}F\left(\gamma\right)\right|\geq r\right.\right\}\right)\\&\leq 2\frac{\int_{\Gamma_\Lambda}e^{\lambda\left(F(\gamma)-\mathrm{Pr}_{\mathtt{Ker}H^{\Gamma_\Lambda}}F(\gamma)\right)}d\pi_\Lambda\left(\gamma\right)}{e^{\lambda r}}\leq\frac{4+2\sqrt{C}\lambda}{2-\sqrt{C}\lambda}e^{-\lambda r}.\end{aligned}$$

□

Література

[1] *Albeverio S., Kondratiev Yu. G., and Röckner M. Analysis and geometry on configuration spaces* // J. Func. Anal. — 1998. — **154**. — P. 444–500.

[2] *Finkelshtein D. L., Kondratiev Yu. G., Röckner M., Konstantinov A. Yu. Gauss formula and symmetric extensions of the Laplacian on configuration spaces* // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probabilities and Related Topics. — 2001. — **4**. — № 4. — P. 489–509.

[3] *Ledoux M. Concentration of measures and logarithmic Sobolev inequalities* // Lecture Notes in Math. — 1998. — **1686**. — P. 120–216.

[4] *Röckner M., Schied A. Rademacher's theorem on configuration spaces and applications* // J. Funct. Anal. – 1999. – **169** — № 2. — P. 325–356.

Інститут математики Національної Академії наук України,
вул. Терещенківська, 3, 01601, Київ-4, Україна,
тел. (044) 228-86-85
fdl@imath.kiev.ua

Д. Л. Фінкельштейн

Нерівність спектральної щілини на просторах конфігурацій та концентраційні властивості пуасонівської міри

Анотація

В роботі розглянуто оператор Лапласа з граничними умовами Неймана на просторах конфігурацій з пуасонівською мірою над обмеженою областю. Вивчено спектр цього оператора та структура вакуумного простору. Доведено нерівність спектральної щілини. Ці результати застосовані для дослідження концентраційних властивостей пуасонівської міри.

D. L. Finkelshtein

Spectral gap inequality on configuration spaces and the concentration properties of the Poisson measure

Анотація

We consider the Laplace operator with Neumann boundary conditions on a configuration space with Poisson measure over a bounded domain. The spectrum of this operator is considered and a structure of its vacuum space is studied. The corresponding spectral gap inequality is proved. The applications of this results to study of the concentration properties of the Poisson measure are presented.