

## О РЕШЕТКАХ НАД ПСЕВДОБАССОВЫМИ КОММУТАТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ

Ю. А. Дрозд, Л. Ф. Чернова

Классическая теорема Дедекинда утверждает, что всякий конечно-порожденный модуль  $M$  без кручения над дедекиндовым кольцом  $A$  изоморфен прямой сумме идеалов. Точнее,  $M \simeq A^m \oplus I$ , где  $I$  — идеал кольца  $A$  (см. [1]). Если  $A$  — целозамкнутое нетерово кольцо, это уже не так, однако, в этом случае  $M$  содержит свободный подмодуль  $N$  такой, что  $M/N \simeq I$  [1]. В работах Басса, З. И. Боровича и Д. К. Фаддеева [2, 3] был доказан аналог теоремы Дедекинда для таких целостных колец  $A$ , что всякий идеал в  $A$  имеет две образующих (в [4] такие кольца были названы *бассовыми*). Именно в этом случае  $M \simeq A_1 \oplus \dots \oplus A_m \oplus I$ , где  $A_i$  — надкольца  $A$ , а  $I$  — идеал. Настоящая заметка посвящена перенесению этих результатов на такие нетеровы коммутативные кольца  $A$ , у которых все локализации  $A_{\mathfrak{p}}$  по простым идеалам высоты 1 бассовы. Соответствующую теорему удастся установить даже для более широкого класса колец — псевдонетеровых, что имеет некоторые технические преимущества (см., например, [5]).

1. Напомним, что коммутативное кольцо  $A$  называется *псевдонетеровым* [5, 6], если для любого элемента  $a \in A$  во множестве простых идеалов  $P(a)$ , содержащих  $a$ , есть лишь конечное число минимальных элементов, причем для всякого минимального  $\mathfrak{p} \in P(a)$  кольцо  $A_{\mathfrak{p}}$  нетерово. Далее,  $A$  всюду обозначает целостное псевдонетерово кольцо,  $K$  — его поле частных,  $P$  — множество простых

идеалов высоты 1 кольца  $A$ . Следуя [1],  $A$  — подмодуль  $M$  в конечномерном векторном пространстве  $V$  над полем  $K$  назовем  $A$ -решеткой в  $V$ , если  $KM = V$  и  $M$  содержится в некотором конечно-порожденном  $A$ -подмодуле в  $V$ . Те  $A$ -решетки в  $K$ , которые являются подкольцами в  $K$ , назовем *надкольцами*  $A$  (они, конечно, содержат  $A$ ). Решетку  $M$ , в частности надкольцо, назовем *дивизориальной* [5], если  $M = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} M_{\mathfrak{p}}$ . Если  $A$  — кольцо Крулля, то решетка дивизориальна тогда и только тогда, когда она рефлексивна [1], но в общем случае это, конечно, не так. Кольцо  $A$  назовем *псевдобассовым*, если для любого  $\mathfrak{p} \in P$  кольцо  $A_{\mathfrak{p}}$  бассово [4], т. е.  $A_{\mathfrak{p}}$  и все его надкольца горнштейновы. Для любого  $A$ -модуля  $M$  обозначим  $M(\mathfrak{p}) = M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}}$ ,  $x(\mathfrak{p})$  — образ элемента  $x \in M$  при каноническом отображении  $M \rightarrow M(\mathfrak{p})$ ,  $\varphi(\mathfrak{p})$  — гомоморфизм  $N(\mathfrak{p}) \rightarrow M(\mathfrak{p})$ , индуцированный гомоморфизмом  $\varphi: N \rightarrow M$ .

**ТЕОРЕМА.** Пусть кольцо  $A$  псевдобассово,  $M$  — некоторая  $A$ -решетка в  $n$ -мерном пространстве. Тогда существует цепочка надколец  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_{n-1}$  кольца  $A$  и мономорфизм  $\varphi: A_1 \oplus \dots \oplus A_{n-1} \rightarrow M$  такой, что  $M/\text{Im } \varphi$  изоморфен идеалу кольца  $A$ . При этом можно считать, что надкольца  $A_1, \dots, A_{n-1}$  дивизориальны и для любого  $\mathfrak{p} \in P$  мономорфизм  $\varphi_{\mathfrak{p}}$  расщепим.

2. Докажем вначале следующие леммы.

**ЛЕММА 1.** Пусть  $A$  — локальное кольцо с максимальным идеалом  $\mathfrak{p}$ ,  $M$  и  $N$  — свободные  $A$ -модули конечного ранга. Мономорфизм  $\varphi: M \rightarrow N$  расщепим тогда и только тогда, когда индуцированное отображение  $\varphi(\mathfrak{p}): M(\mathfrak{p}) \rightarrow N(\mathfrak{p})$  также мономорфно.

**Доказательство.** Если  $\varphi$  расщепим, то и  $\varphi(\mathfrak{p})$  — расщепимый мономорфизм. Наоборот, пусть  $\varphi(\mathfrak{p})$  — мономорфизм. Если  $x_1, \dots, x_n$  — базис  $N$ , то элементы  $x_1(\mathfrak{p}), \dots, x_n(\mathfrak{p})$  линейно независимы в  $N(\mathfrak{p})$ , следовательно, их образы  $y_i = \varphi(\mathfrak{p})x_i(\mathfrak{p})$  линейно независимы в  $M(\mathfrak{p})$ . Поэтому в  $M(\mathfrak{p})$  есть базис вида  $y_1, \dots, y_m$  ( $m \geq n$ ). Положим  $z_i = \varphi(x_i)$  при  $i = 1, \dots, n$  и выберем такие  $z_i$  ( $i = n+1, \dots, m$ ), что  $z_i(\mathfrak{p}) = y_i$ . Тогда  $\{z_1, \dots, z_n\}$  — базис  $\text{Im } \varphi$ ,  $\{z_1, \dots, z_m\}$  — базис  $M$ , так что  $M/\text{Im } \varphi$  свободный модуль и  $\varphi$  расщепим.

**ЛЕММА 2.** Пусть  $A$  — локальное нетерово кольцо,  $M$  и  $N$  конечно-порожденные  $A$ -модули и  $\varphi: N \rightarrow M$  — расщепимый мономорфизм. Тогда если  $\psi: N \rightarrow M$  такой

гомоморфизм, что  $\psi(\mathfrak{p}) = \varphi(\mathfrak{p})$ , то  $\psi$  также расщепимый мономорфизм.

**Доказательство.** Отождествим  $M$  с  $N \oplus L$ , а  $\varphi$  с гомоморфизмом  $N \rightarrow N \oplus L$ , задаваемым матрицей  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Пусть  $\psi: N \rightarrow N \oplus L$  задается матрицей  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ . Тогда  $\alpha(\mathfrak{p}) = 1$ , так что  $\alpha \equiv 1 \pmod{\text{rad End}_A N}$ , и потому  $\alpha$  обратим. Следовательно, если  $\eta \in \text{End}_A N$  задается матрицей

$$\begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ -\alpha^{-1}\beta & 1 \end{pmatrix},$$

то  $\eta\psi = \varphi$ , откуда следует, что  $\psi$  — расщепимый мономорфизм.

**ЛЕММА 3.** Пусть  $Y$  и  $Z$  — конечные подмножества в  $P$ , причем  $Y \cap Z = \emptyset$ . Тогда  $\bigcap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p} \not\subset \bigcup_{\mathfrak{p} \in Z} \mathfrak{p}$ .

**Доказательство** следует из [1, гл. II, § 1, п. 1, предложение 2].

**3.** Перейдем к доказательству теоремы. Обозначим  $X$  множество тех  $\mathfrak{p} \in P$ , для которых  $A_{\mathfrak{p}}$ -модуль  $M_{\mathfrak{p}}$  не свободен. Это множество конечно. Пусть  $X = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$ . Так как все кольца  $A_{\mathfrak{p}}$  бассовы, то для любого  $i = 1, \dots, r$  найдутся такие надкольца  $A_{1i} \subset \dots \subset A_{ni}$  кольца  $A$ , что  $M_{\mathfrak{p}_i} \simeq \bigoplus_{k=1}^r A_{ki}$  [2, 3]. В силу [5], существуют такие дивизориальные надкольца  $A_1 \subset \dots \subset A_n$  кольца  $A$ , что  $(A_k)_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$ , если  $\mathfrak{p} \notin X$ , а  $(A_k)_{\mathfrak{p}_i} = A_{ki}$  для всех  $i = 1, \dots, r$ . Докажем индукцией по  $m$  следующее утверждение.

**Предложение 1.** Для любого  $m < n$  существует мономорфизм  $\varphi^{(m)}: \bigoplus_{i=1}^m A_i \rightarrow M$  такой, что для всякого  $\mathfrak{p} \in P$   $\varphi_{\mathfrak{p}}^{(m)}$ -расщепимый мономорфизм.

**Доказательство.** База индукции  $m = 0$  тривиальна. Предположим, что мономорфизм  $\varphi^{(m-1)}$  уже построен. Обозначим  $S = \bigcup_{i=1}^r \mathfrak{p}_i$ . Тогда  $\varphi_S^{(m-1)}: \bigoplus_{k=1}^{m-1} (A_k)_S \rightarrow M$  расщепимый мономорфизм,  $A_S$  — полулокальное бассово кольцо и  $M_S \simeq \bigoplus_{k=1}^n (A_k)_S$  (см. [2, 3]). Обозначим  $\varphi_k$  ограничение  $\varphi^{(m-1)}$  на  $A_k$ . Тогда существует гомоморфизм  $\xi: A_m \rightarrow M$  такой, что если  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}, \xi): \bigoplus_{k=1}^m A_k \rightarrow M$ , то  $\varphi_{\mathfrak{p}}$  — расщепимый мономорфизм для всех  $\mathfrak{p} \in X$ . Пусть  $Y = X \cup \{\mathfrak{p} \in P \mid \text{Ker } \varphi(\mathfrak{p}) \neq 0\}$ . Тогда  $Y$  конечно и, если положить  $T = \bigcup_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p}$ , то  $A_T$  — полулокальное бассово кольцо, причем  $M_T \simeq \bigoplus_{k=1}^n (A_k)_T$ . Поэтому существует гомоморфизм  $\eta: A_m \rightarrow M$  такой, что

$\psi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}, \eta)$  — мономорфизм и  $\psi_p$  расщепим для всех  $p \in Y$ . Можно считать, что гомоморфизм  $(\varphi_1, \dots, \dots, \varphi_{m-1}, \xi, \eta): (\bigoplus_{k=1}^m A_k) \oplus A_m \rightarrow M$  — мономорфизм. Действительно, так как  $m < n$ , то существует  $\zeta: A_m \rightarrow M$  такой, что  $\theta = (\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}, \xi, \zeta): (\bigoplus_{k=1}^m A_k) \oplus A_m \rightarrow M$  мономорфизм, а тогда по леммам 1 и 2  $\eta$  можно заменить на  $\eta + a\zeta$ , где  $a \in \bigcap_{p \in Y} p$  и  $a \neq 0$ .

Обозначим теперь  $Z = \{p \in P \setminus Y \mid \text{Ker } \theta(p) \neq 0\}$ . Снова  $Z$  конечно. Выберем по лемме 3  $b \in \bigcap_{p \in Y} p \setminus \bigcup_{p \in Z} p$  и положим  $\varphi_m = b\xi + \eta$  и  $\varphi^{(m)} = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ . Очевидно,  $\varphi^{(m)}$  — мономорфизм. Если  $p \in Y$ , то  $\varphi^{(m)}(p) = \psi(p)$ , так что  $\varphi_p^{(m)}$  — расщепимый мономорфизм по лемме 2. Если  $p \in Z$ , то  $b \in A_p^*$ , а  $\eta(p)$  есть линейная комбинация  $\varphi_1(p), \dots, \varphi_{m-1}(p)$ . Поэтому  $\varphi^{(m)}(p)$  отличается от  $\varphi(p)$  на некоторый автоморфизм, так что  $\text{Ker } \varphi^{(m)}(p) = 0$  и  $\varphi_p^{(m)}$  расщепим по лемме 1. Наконец, если  $p \notin Y \cup Z$ , то даже  $\text{Ker } \theta(p) = 0$ , тем более  $\text{Ker } \varphi^{(m)}(p) = 0$ , т. е. снова  $\varphi_p^{(m)}$  расщепим. Предложение доказано.

При  $m = n - 1$  получаем мономорфизм  $\varphi = \varphi^{(n-1)}: \bigoplus_{k=1}^{n-1} A_k \rightarrow M$  такой, что  $\varphi_p$  расщепим для всех  $p \in P$ . Обозначим  $N = \text{Im } \varphi$ . Тогда  $N$  — дивизориальная решетка. Если  $a \in A$  ненулевой элемент,  $x \in M$  и  $ax \in N$ , то  $ax \in N_p$  для всех  $p \in P$ . Но  $M_p/N_p$  — модуль без кручения, так что  $x \in N_p$ , а потому  $x \in \bigcap_{p \in P} N_p = N$ . Итак,  $M/N$  есть  $A$ -модуль без кручения, причем  $(M/N) \otimes_A K \simeq K$ , т. е.  $M/N$  изоморфен идеалу, и теорема доказана.

Одесский государственный педагогический институт им. К. Д. Ушинского

Поступило  
31.03.86

#### СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. М.: Мир, 1971.
- [2] Bass H. Torsion free and projective modules // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 102. P. 319—327.
- [3] Борович З. И., Фаддеев Д. К. Представления порядков с циклическим индексом // Труды МИАН СССР. 1965. Т. 80. С. 51—65.
- [4] Дрозд Ю. А., Ройтер А. В. Коммутативные кольца с конечным числом целочисленных неразложимых представлений // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1967. Т. 31, № 4. С. 783—798.
- [5] Дрозд Ю. А. О полугруппе дивизоров коммутативного кольца // Труды МИАН СССР. 1976. Т. 101, № 3. С. 334—348.
- [6] Дрозд Ю. А. О существовании максимальных порядков // Математические заметки. 1985. Т. 37, вып. 3. С. 313—316.