МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 41, № 4 (1987)

О РЕШЕТКАХ НАД ПСЕВДОБАССОВЫМИ КОММУТАТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ

Ю. А. Дрозд, Л. Ф. Чернова

Классическая теорема Дедекинда утверждает, что всякий конечно-порожденный модуль M без кручения над дедекиндовым кольцом A изоморфен прямой сумме идеалов. Точнее, $M \simeq A^m \oplus I$, где I — идеал кольца A (см. [1]). Если A — целозамкнутое нетерово кольцо, это уже не так, однако, в этом случае M содержит свободный подмодуль N такой, что $M/N \simeq I$ [1]. В работах Басса, З. И. Боревича и Д. К. Фаддеева [2, 3] был доказан аналог теоремы Дедекинда для таких целостных колец A, что всякий идеал в A имеет две образующих (в [4] такие кольца были названы *бассовыми*). Именно в этом случае $M \simeq A_1 \oplus \ldots \oplus A_m \oplus I$, где A_i — надкольца A, а I — идеал. Настоящая заметка посвящена перенесению этих результатов на такие нетеровы коммутативные кольца A, у которых все локализации $A_\mathfrak{p}$ по простым идеалам высоты 1 бассовы. Соответствующую теорему удается установить даже для более широкого класса колец — псевдонетеровых, что имеет некоторые технические преимущества (см., например, [5]).

1. Напомним, что коммутативное кольцо A называется *псевдонетеровым* [5, 6], если для любого элемента $a \in A$ во множестве простых идеалов $P(a)$, содержащих a, есть лишь конечное число минимальных элементов, причем для всякого минимального $\mathfrak{p} \in P(a)$ кольцо $A_\mathfrak{p}$ нетерово. Далее, A всюду обозначает целостное псевдонетерово кольцо, K — его поле частных, P — множество простых

идеалов высоты 1 кольца A. Следуя [1], A — подмодуль M в конечномерном векторном пространстве V над полем K назовем *A-решеткой в V*, если $KM = V$ и M содержится в некотором конечно-порожденном A-подмодуле в V. Те A-решетки в K, которые являются подкольцами в K, назовем *надкольцами A* (они, конечно, содержат A). Решетку M, в частности надкольцо, назовем *дивизориальной* [5], если $M = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} M_{\mathfrak{p}}$. Если A — кольцо Крулля, то решетка дивизориальна тогда и только тогда, когда она рефлексивна [1], но в общем случае это, конечно,не так. Кольцо A назовем *псевдобассовым*, если для любого $\mathfrak{p} \in P$ кольцо $A_{\mathfrak{p}}$ бассово [4], т. е. $A_{\mathfrak{p}}$ и все его надкольца горенштейновы. Для любого A-модуля M обозначим $M(\mathfrak{p}) = M_{\mathfrak{p}}/_{\mathfrak{p}}M_{\mathfrak{p}}$, $x(\mathfrak{p})$ — образ элемента $x \in M$ при каноническом отображении $M \to M(\mathfrak{p})$, $\varphi(\mathfrak{p})$ — гомоморфизм $N(\mathfrak{p}) \to M(\mathfrak{p})$, индуцированный гомоморфизмом $\varphi: N \to M$.

ТЕОРЕМА. *Пусть кольцо A псевдобассово, M — некоторая A-решетка в n-мерном пространстве. Тогда существует цепочка надколец $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_{n-1}$ кольца A и мономорфизм $\varphi: A_1 \oplus \ldots \oplus A_{n-1} \to M$ такой, что $M/\mathrm{Im}\,\varphi$ изоморфен идеалу кольца A. При этом можно считать, что надкольца $A_1, \ldots, A_{n-1}$ дивизориальны и для любого $\mathfrak{p} \in P$ мономорфизм $\varphi_{\mathfrak{p}}$ расщепим.*

2. Докажем вначале следующие леммы.

ЛЕММА 1. *Пусть A — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{p}$, M и N — свободные A-модули конечного ранга. Мономорфизм $\varphi: M \to N$ расщепим тогда и только тогда, когда индуцированное отображение $\varphi(\mathfrak{p}): M(\mathfrak{p}) \to N(\mathfrak{p})$ также мономорфно.*

Доказательство. Если φ расщепим, то и $\varphi(\mathfrak{p})$ — расщепимый мономорфизм. Наоборот, пусть $\varphi(\mathfrak{p})$ — мономорфизм. Если $x_1, \ldots, x_n$ — базис N, то элементы $x_1(\mathfrak{p}), \ldots, x_n(\mathfrak{p})$ линейно независимы в $N(\mathfrak{p})$, следовательно, их образы $y_i = \varphi(\mathfrak{p})\, x_i(\mathfrak{p})$ линейно независимы в $M(\mathfrak{p})$. Поэтому в $M(\mathfrak{p})$ есть базис вида $y_1, \ldots, y_m$ $(m \geqslant n)$. Положим $z_i = \varphi(x_i)$ при $i = 1, \ldots, n$ и выберем такие z_i $(i = n + 1, \ldots, m)$, что $z_i(\mathfrak{p}) = y_i$. Тогда $\{z_1, \ldots, z_n\}$ — базис $\mathrm{Im}\,\varphi$, $\{z_1, \ldots, z_m\}$ — базис M, так что $M/\mathrm{Im}\,\varphi$ свободный модуль и φ расщепим.

ЛЕММА 2. *Пусть A — локальное нетерово кольцо, M и N конечно-порожденные A-модули и $\varphi: N \to M$ — расщепимый мономорфизм. Тогда если $\psi: N \to M$ такой* *гомоморфизм, что* $\psi(\mathfrak{p}) = \varphi(\mathfrak{p})$, *то* ψ *также расщепимый мономорфизм.*

Доказательство. Отождествим M с $N \oplus L$, а φ с гомоморфизмом $N \to N \oplus L$, задаваемым матрицей $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Пусть ψ: $N \to N \oplus L$ задается матрицей $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Тогда $\alpha(\mathfrak{p}) = 1$, так что $\alpha \equiv 1 \pmod{\operatorname{rad} \operatorname{End}_A N}$, и потому α обратим. Следовательно, если $\eta \in \operatorname{End}_A N$ задается матрицей

$$\begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ -\alpha^{-1}\beta & 1 \end{pmatrix},$$

то $\eta\psi = \varphi$, откуда следует, что ψ — расщепимый мономорфизм.

ЛЕММА 3. *Пусть* Y и Z — *конечные подмножества в* P, *причем* $Y \cap Z = \varnothing$. *Тогда* $\bigcap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p} \not\subset \bigcup_{\mathfrak{p} \in Z} \mathfrak{p}$.

Доказательство следует из [1, гл. II, § 1, п. 1, предложение 2].

3. Перейдем к доказательству теоремы. Обозначим X множество тех $\mathfrak{p} \in P$, для которых $A_\mathfrak{p}$-модуль $M_\mathfrak{p}$ не свободен. Это множество конечно. Пусть $X = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$. Так как все кольца $A_\mathfrak{p}$ бассовы, то для любого $i = 1, \ldots, r$ найдутся такие надкольца $A_{1i} \subset \ldots \subset A_{ni}$ кольца A, что $M_{\mathfrak{p}i} \simeq \bigoplus_{k=1}^{r} A_{ki}$ [2, 3]. В силу [5], существуют такие дивизориальные надкольца $A_1 \subset \ldots \subset A_n$ кольца A, что $(A_k)_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p}$, если $\mathfrak{p} \notin X$, а $(A_k)_{\mathfrak{p}_i} = A_{ki}$ для всех $i = 1, \ldots, r$. Докажем индукцией по m следующее утверждение.

Предложение 1. *Для любого* $m < n$ *существует мономорфизм* $\varphi^{(m)}$: $\bigoplus_{i=1}^{m} A_i \to M$ *такой, что для всякого* $\mathfrak{p} \in P$ $\varphi_\mathfrak{p}^{(m)}$*-расщепимый мономорфизм.*

Доказательство. База индукции $m = 0$ тривиальна. Предположим, что мономорфизм $\varphi^{(m-1)}$ уже построен. Обозначим $S = \bigcup_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i$. Тогда $\varphi_S^{(m-1)}$: $\bigoplus_{k=1}^{m-1} (A_k)_S \to M$ расщепимый мономорфизм, A_S — полулокальное бассово кольцо и $M_S \simeq \bigoplus_{k=1}^{n} (A_k)_S$ (см. [2, 3]). Обозначим φ_k ограничение $\varphi^{(m-1)}$ на A_k. Тогда существует гомоморфизм ξ: $A_m \to M$ такой, что если $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}, \xi)$: $\bigoplus_{k=1}^{m} A_k \to M$, то $\varphi_\mathfrak{p}$— расщепимый мономорфизм для всех $\mathfrak{p} \in X$. Пусть $Y = X \cup \{\mathfrak{p} \in P \mid \operatorname{Ker} \varphi(\mathfrak{p}) \neq 0\}$. Тогда Y конечно и, если положить $T = \bigcup_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p}$, то A_T — полулокальное бассово кольцо, причем $M_T \simeq \bigoplus_{k=1}^{n} (A_k)_T$. Поэтому существует гомоморфизм η: $A_m \to M$ такой, что

$\psi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}, \eta)$ — мономорфизм и $\psi_\mathfrak{p}$ расщепим для всех $\mathfrak{p} \in Y$. Можно считать, что гомоморфизм $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}, \xi, \eta)$: $(\oplus_{k=1}^{m} A_k) \oplus A_m \to M$ — мономорфизм. Действительно, так как $m < n$, то существует ζ: $A_m \to M$ такой, что $\theta = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}, \xi, \zeta)$: $(\oplus_{k=1}^{m} A_k) \oplus A_m \to M$ мономорфизм, а тогда по леммам 1 и 2 η можно заменить на $\eta + a\zeta$, где $a \in \bigcap_{\mathfrak{p}\in Y}\mathfrak{p}$ и $a \neq 0$.

Обозначим теперь $Z = \{\mathfrak{p} \in P \setminus Y \mid \operatorname{Ker} \theta(\mathfrak{p}) \neq 0\}$. Снова Z конечно. Выберем по лемме 3 $b \in \bigcap_{\mathfrak{p}\in Y}\mathfrak{p} \setminus \bigcup_{\mathfrak{p}\in Z}\mathfrak{p}$ и положим $\varphi_m = b\xi + \eta$ и $\varphi^{(m)} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$. Очевидно, $\varphi^{(m)}$ — мономорфизм. Если $\mathfrak{p} \in Y$, то $\varphi^{(m)}(\mathfrak{p}) = \psi(\mathfrak{p})$, так что $\varphi_\mathfrak{p}^{(m)}$ — расщепимый мономорфизм по лемме 2. Если $\mathfrak{p} \in Z$, то $b \in A_\mathfrak{p}^*$, а $\eta(\mathfrak{p})$ есть линейная комбинация $\varphi_1(\mathfrak{p}), \ldots, \varphi_{m-1}(\mathfrak{p})$. Поэтому $\varphi^{(m)}(\mathfrak{p})$ отличается от $\varphi(\mathfrak{p})$ на некоторый автоморфизм, так что $\operatorname{Ker} \varphi^{(m)}(\mathfrak{p}) = 0$ и $\varphi_\mathfrak{p}^{(m)}$ расщепим по лемме 1. Наконец, если $\mathfrak{p} \notin Y \bigcup Z$, то даже $\operatorname{Ker} \theta(\mathfrak{p}) = 0$, тем более $\operatorname{Ker} \varphi^{(m)}(\mathfrak{p}) = 0$, т. е. снова $\varphi_\mathfrak{p}^{(m)}$ расщепим. Предложение доказано.

При $m = n - 1$ получаем мономорфизм $\varphi = \varphi^{(n-1)}$: $\oplus_{k=1}^{n-1} A_k \to M$ такой, что $\varphi_\mathfrak{p}$ расщепим для всех $\mathfrak{p} \in P$. Обозначим $N = \operatorname{Im} \varphi$. Тогда N — дивизориальная решетка. Если $a \in A$ ненулевой элемент, $x \in M$ и $ax \in N$, то $ax \in N_\mathfrak{p}$ для всех $\mathfrak{p} \in P$. Но $M_\mathfrak{p}/N_\mathfrak{p}$ — модуль без кручения, так что $x \in N_\mathfrak{p}$, а потому $x \in \bigcap_{\mathfrak{p}\in P} N_\mathfrak{p} = N$. Итак, M/N есть A-модуль без кручения, причем $(M/N) \otimes_A K \simeq K$, т. е. M/N изоморфен идеалу, и теорема доказана.

Одесский государственный педагогический институт им. К. Д. Ушинского

Поступило 31.03.86

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. М.: Мир, 1971.
[2] Bass H. Torsion free and projective modules // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 102. P. 319—327.
[3] Боревич З. И., Фаддеев Д. К. Представления порядков с циклическим индексом // Труды МИАН СССР. 1965. Т. 80. С. 51—65.
[4] Дрозд Ю. А., Ройтер А. В. Коммутативные кольца с конечным числом целочисленных неразложимых представлений // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1967. Т. 31, № 4. С. 783—798.
[5] Дрозд Ю. А. О полугруппе дивизоров коммутативного кольца // Труды МИАН СССР. 1976. Т. 101, № 3. С. 334—348.
[6] Дрозд Ю. А. О существовании максимальных порядков // Математические заметки. 1985. Т. 37, вып. 3. С. 313—316.